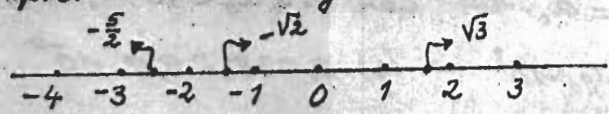
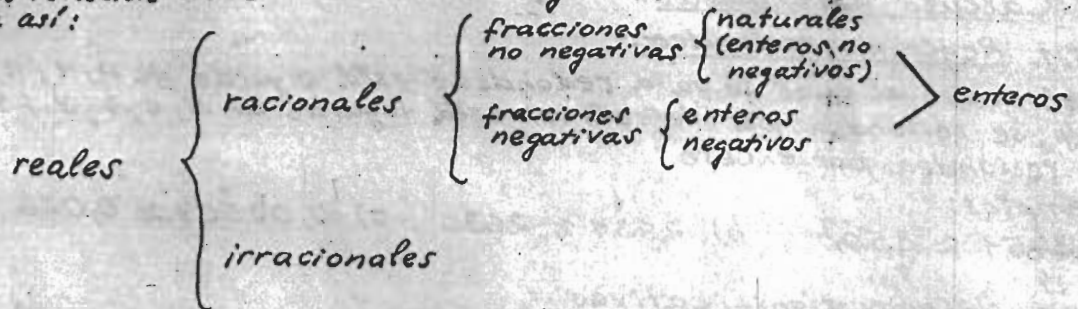


El conjunto de los números reales se puede representar sobre una recta de forma tal que a cada número real se le haga corresponder un pto. de la recta y viceversa. Esta recta se llama recta real.



La relación entre los distintos conjuntos numéricos podemos resumir la así:



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}, \quad \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}_+ \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}, \quad \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Otros subconjuntos importantes de $\mathbb{R}$ son:

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}, \text{ conj. de los números reales no negativos.}$$

$$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}, \text{ conj. de los números reales positivos.}$$

$$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}, \text{ conj. de los números reales no positivos.}$$

$$\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}, \text{ conj. de los números reales negativos.}$$

1.3. Intervalos de números reales.-

Por un intervalo de números reales entendemos un conjunto de números reales comprendidos entre otros dos llamados extremos.

Todo intervalo es subconjunto del conjunto de los números reales.

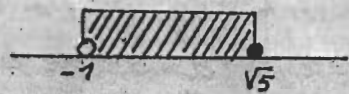
Entre dos números reales existen infinitos números reales.

Para indicar que se incluye un extremo utilizamos un corchete y para indicar que se excluye, utilizamos un paréntesis

Siempre que en un extremo aparezca $+\infty$ o $-\infty$ se utiliza un paréntesis.

Ejemplos:

a).



$$(-1; \sqrt{5}] = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x \leq \sqrt{5}\}$$

b).



$$(-\infty; -2] \cup [1/2; 4)$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x \leq -2 \text{ o } 1/2 \leq x < 4\}$$

Siempre que se incluya un extremo,

lo representamos en la recta con un punto relleno; siempre que se excluya, con un punto sin rellenar.

Si en el intervalo estuviera contenido un número que quisiéramos excluir y no fuese uno de los extremos, por ejemplo, en el intervalo $(-1; \sqrt{5}]$ el número 1, entonces escribimos:

$$(-1; \sqrt{5}] \setminus \{1\} \text{ o } \{x \in \mathbb{R} : -1 < x \leq \sqrt{5}, x \neq 1\}$$



1.4. Notación científica de un número real.

-4-

Sea $a \in \mathbb{R}$, a está expresado en notación científica si tiene la forma:

$$a = a_0 \cdot 10^k \text{ con } 1 \leq a_0 < 10, k \in \mathbb{Z}.$$

Ejemplos:

a) $1364 = 1,364 \cdot 10^3$ b) $0,098 = 9,8 \cdot 10^{-2}$

1.5. Cálculo aproximado.

1.5.1. Regla de redondeo.

Si el orden al cual se va a redondear está seguido de 0, 1, 2, 3 ó 4, se redondea por defecto; si está seguido de 5, 6, 7, 8 ó 9, se redondea por exceso.

Ejemplos:

a) $3451 \approx 3500$, b) $2631 \approx 2630$, c) $0,02567 \approx 0,026$.

1.5.2. Cifras significativas.

En un valor aproximado se llaman cifras significativas todas las que se encuentran (a la derecha) a partir de la primera cifra diferente de cero.

Ejemplos:

a) 1200 tiene 4 cifras significativas.

b) 0,0240 tiene 3 cifras significativas.

c) 0,0001 tiene 1 cifra significativa.

d) $1,2 \cdot 10^4$ tiene 2 cifras significativas, (en notación científica, los ceros de la potencia de 10 no son cifras significativas)

1.5.3. Regla fundamental del cálculo aproximado.

Cuando se calcula con valores aproximados, el resultado debe darse con tantas cifras significativas como tenga el menor dato. Los cálculos intermedios se realizan con una cifra significativa más que las que debe tener la respuesta.

1.6. Tanto por ciento.

Se dice que a es el $x\%$ de b si se cumple que $a = \frac{x}{100} \cdot b$

▼ Para calcular otro de los elementos que intervienen en esta relación basta despejar en ella.

Ejemplos:

a) El 5% de una cantidad "y" se representa: $\frac{5}{100} \cdot y$ ó $0,05y$.

b) El 60% de una cantidad "m" se representa: $\frac{60}{100} \cdot m = \frac{3}{5}m$ ó $0,6m$.

c) Para determinar qué porcentaje representa $a = 55$ de $b = 200$:

$$x = \frac{a \cdot 100}{b} = \frac{5500}{200} = 27,5\%$$

1.7. Cálculo del mínimo común múltiplo (m.c.m.) y del máximo común divisor (m.c.d.) de dos números naturales.

Para calcular tanto el m.c.m. como el m.c.d. de dos números naturales descomponemos cada uno de ellos en el producto de potencias de números primos, entonces el m.c.m. es el producto de las potencias comunes y no comunes con el mayor exponente y el m.c.d. es el producto de las potencias

comunes con el mayor exponente.

Ejemplo: Sean los números 420 y 126.

420	2	126	2
210	2	63	3
105	3	21	3
35	5	7	7
7	7	1	1
1			

$$420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

$$\text{m.c.m.: } 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 1260$$

$$\text{m.c.d.: } 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$$

1.8. Valor absoluto de un número real.-

Sea $a \in \mathbb{R}$. Se define:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

$$a). |-5| = 5 \quad b). |3,2| = 3,2$$

Los valores de x para los cuales se cumple $|x| \leq b$ con $b \in \mathbb{R}$ son los números reales x tales que $-b \leq x \leq b$. Los valores de x para los cuales $|x| > b$ son los números reales tales que $x < -b$ ó $x > b$.

1.9. Potencias de exponentes enteras.- Sea $a \in \mathbb{R}$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ veces}}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad a^0 = 1 \text{ si } a \neq 0;$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ si } a \neq 0 \text{ y } n \in \mathbb{N}^*.$$

Propiedades:

$$a). a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$c). (a^n)^m = (a^m)^n = a^{mn}$$

$$b). (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$d). \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m},$$

para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y $m, n \in \mathbb{Z}$.

2. Trabajo con variables.-

2.1. Términos semejantes.-

Término o monomio: es todo número, variable o cualquier combinación de números y variables relacionados únicamente por una o varias de las operaciones de multiplicación, división y potenciación. La parte formada por las variables se llama "parte literal".

Valor numérico de un término: es el número que se obtiene cuando se sustituyen las variables del término por números y se efectúan las operaciones indicadas.

! No se puede calcular el valor numérico de un término si se hace cero el denominador cuando se sustituyen las variables que aparecen en él por sus valores respectivos.

Valores admisibles: son los valores de las variables para los cuales existe un valor numérico.

-6-
• Términos semejantes: Son aquellos términos que tienen la misma parte literal y solamente difieren en sus coeficientes.

2.2. Expresiones algebraicas. Polinomios.

• Expresión algebraica: Es una expresión en la que los términos aparecen relacionados mediante las operaciones de cálculo. Cuando la expresión algebraica es la suma de dos monomios la llamamos binomio, y cuando es la suma de tres monomios la llamamos trinomio.

• Dominio de una expresión algebraica: Es el conjunto formado por todos los valores admisibles.

Ejemplo: El dominio de la expresión $\frac{x}{a+1}$ es $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

• Polinomio entero en una variable: es toda expresión algebraica formada por términos del tipo $\alpha \cdot x^n$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. El mayor exponente al que aparece elevada la variable es el grado del polinomio.

Ejemplo: a) $P(x) = 3x^2 + \frac{1}{4}x - 8$ es de grado 2.

b) $Q(x) = 6x^4 - \sqrt{3} \cdot x^2 - 6x + 2$ es de grado 4.

2.2.1. Operaciones con polinomios.

2.2.1.1. Adición y sustracción. Uso de paréntesis.

• Los paréntesis se utilizan cuando se desea indicar operaciones en las que intervienen los términos incluidos dentro de ellos o cuando por otra razón es necesario agrupar determinados términos.

• Si un paréntesis está precedido de un signo "+", puede suprimirse este junto con el signo + y los términos dentro de él conservan sus propios signos. Si un paréntesis está precedido de un signo "-", puede suprimirse este junto con el signo - siempre que se cambien los signos de cada uno de los términos incluidos dentro de él.

• Para adicionar o sustraer polinomios procedemos así:

- se eliminan los paréntesis en caso de que existan teniendo en cuenta lo apuntado arriba.

- se reducen los términos semejantes (se operan los coeficientes y se mantiene la parte literal).

2.2.1.2. Multiplicación.

• Para multiplicar dos polinomios multiplicamos cada término de uno de ellos por cada uno de los términos del otro (aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición) y finalmente reducimos términos semejantes si existen.

2.2.1.3. División de un polinomio $P(x)$ por un binomio de la forma $(x-a)$. División sintética.

• Cuando dividimos un polinomio $P(x)$ de grado n por un binomio de la forma $x-a$ (polinomio de grado 1) se cumple que:

$$P(x) = (x-a) \cdot Q(x) + R,$$

donde $Q(x)$ es el cociente (polinomio de grado $n-1$) y R es el resto (un número, o sea, un polinomio de grado cero).

División sintética, método de Horner o Regla de Ruffini. -7-

Ejemplo: Dividamos $5x^3 - 6x^2 - 11x - 7$ por $x-2$ (observa que el dividendo y el divisor están ordenados en potencias descendentes).

valor de a :	5	-6	-11	-7	→ coeficientes del dividendo
← 2	5	+10	+8	-6	
	5	4	-3	-13	→ resto

coeficientes del polinomio cociente

Cociente: $Q(x) = 5x^2 + 4x - 3$, resto: $R = -13$, entonces

se cumple: $P(x) = (x-2)Q(x) + R$, es decir,

$$5x^3 - 6x^2 - 11x - 7 = (x-2)(5x^2 + 4x - 3) - 13$$

Un polinomio $P(x)$ es divisible por un binomio de la forma $(x-a)$ si, y sólo si, se puede expresar en la forma:

$$P(x) = (x-a) \cdot Q(x)$$

! En este caso se cumple $R=0$

Ejemplo: Determinemos si el polinomio $P(x) = x^3 + 5x^2 + 10x + 8$ es divisible por $x+2$.

	1	5	10	8
-2	1	-2	-6	-8
	1	3	4	0

$P(x)$ es divisible por $x+2$ porque al dividir $P(x)$ por $x+2$ el resto es cero.

Entonces se cumple:

$$P(x) = (x+2) \cdot Q(x)$$

$$x^3 + 5x^2 + 10x + 8 = (x+2) \cdot (x^2 + 3x + 4)$$

! Para que un polinomio $P(x)$ sea divisible por un binomio de la forma $x-a$ es necesario que a sea un divisor del término independiente del polinomio. En el primer ejemplo puede afirmarse sin efectuar la división que $P(x)$ no es divisible por $x-2$ ya que 2 no es un divisor del término independiente -7. En el segundo ejemplo como -2 es un divisor de 8 es "posible" que $P(x)$ sea divisible por $x+2$, pero para afirmar que es así hay que realizar la división para comprobar que el resto es cero, o aplicar teorema del resto ($P(a)=R$)

2.3. Productos notables. Descomposición factorial.

2.3.1. Productos notables.

- a). $m(a+b+c) = ma + mb + mc$ (factor común)
- b). $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ (trinomio cuadrado perfecto)
- c). $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
- d). $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ (diferencia de cuadrados)
- e). $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$
- f). $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$
- g). $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- h). $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
- i). $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

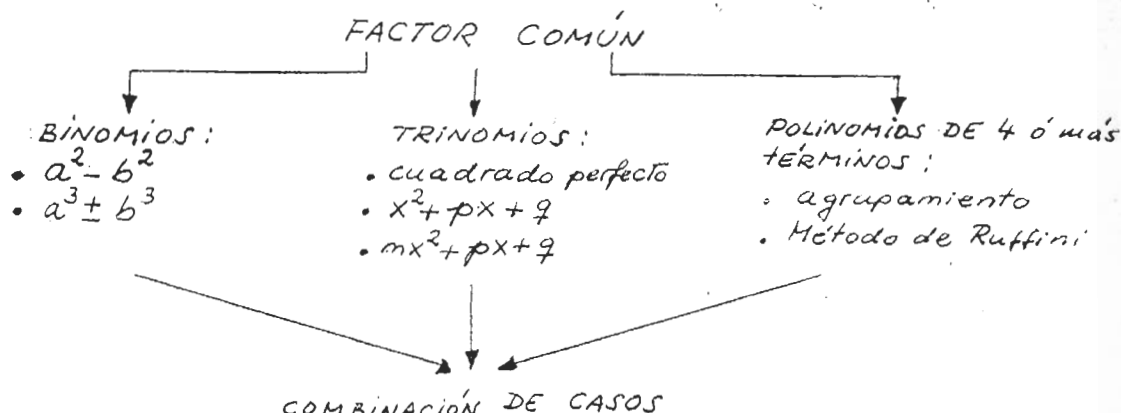
! Los productos notables y la regla de Ruffini son imprescindibles para realizar la descomposición factorial de un polinomio.

2.3.2. Descomposición factorial.

-8-

Realizar la descomposición factorial de un polinomio es descomponer dicho polinomio "completamente" en factores, aplicando productos notables, método de Ruffini, agrupamiento o combinando estos casos.

Para descomponer en factores debes proceder según el orden que te muestra el siguiente esquema:



! Ver ejemplo 3, LT, págs. 17-18.

2.4. Fracciones algebraicas.

2.4.1. Simplificación de fracciones algebraicas.

Fracción algebraica: Si A y B son dos expresiones algebraicas con $B \neq 0$, y en B aparece al menos una variable con exponente entero positivo, el cociente indicado $\frac{A}{B}$ recibe el nombre de fracción algebraica.

Sean A, B y C fracciones algebraicas con $B \neq 0$, $C \neq 0$.

$$\frac{A.C}{B.C} = \frac{A}{B}$$

↑
simplificación

↓
ampliación

Para simplificar una fracción algebraica se factoriza el numerador y el denominador y se divide cada uno de ellos por cada factor que les sea común.

! Ver ejemplo 4, LT págs. 18-19.

2.4.2. Multiplicación y división de fracciones algebraicas.

2.4.2.1. Multiplicación.

Para multiplicar fracciones algebraicas se procede de forma análoga a como hacemos para multiplicar fracciones comunes:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A.C}{B.D} \quad (B \neq 0, D \neq 0)$$

Con el objetivo de obtener un resultado ya simplificado es conveniente proceder de la siguiente forma:

- Factorizar los numeradores y denominadores de las fracciones dadas (cuando no lo estén ya),
- Simplificar los factores que sean comunes a los numeradores y denominadores,
- efectuar las multiplicaciones indicadas.

! Ver ejemplo 5 a), LT pág 19.

2.4.2.2. División.

El procedimiento que se utiliza para dividir fracciones algebraicas es el mismo que ya conoces para dividir fracciones comunes:

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} \quad (B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0). \quad \text{! Ver ejemplo 5 c); LT pág. 20.}$$

X

2.4.3. Adición y sustracción de fracciones algebraicas.

-9-

Para adicionar o sustraer fracciones algebraicas se procede igual que con las fracciones comunes. Para ello debes buscar el m.c.m. de los denominadores.

Para determinar el m.c.m. de los denominadores, y en general, para determinar el m.c.m. de dos expresiones algebraicas procedemos de igual forma a como hacemos para hallar el m.c.m. de dos números naturales (ver aspecto 1.7. en págs. 4-5 de este resumen), es decir, descomponemos las expresiones en factores y tomamos los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

Ejemplo: Determinemos el m.c.m. de:

$$a) x^2 - 4 \text{ y } x^3 - 2x^2, \quad b) 9a^2 - 6a + 1 \text{ y } 3a^2 - 10a + 3$$

$$x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$$

$$9a^2 - 6a + 1 = (3a-1)^2$$

$$x^3 - 2x^2 = x^2(x-2)$$

$$3a^2 - 10a + 3 = (a-3)(3a-1)$$

$$\text{m.c.m.: } x^2(x+2)(x-2)$$

$$\text{m.c.m.: } (3a-1)^2(a-3)$$

El procedimiento para adicionar o sustraer fracciones algebraicas es:

- Buscar el m.c.m. de los denominadores,
- dividir el m.c.m. de los denominadores por cada uno de los denominadores y ampliar los numeradores,
- efectuar los productos indicados en el numerador y reducir términos semejantes en caso de que existan,
- simplificar el resultado si es posible.

! Ver ejemplo 5 b), LT págs. 19-20.

3. Ecuaciones lineales y cuadráticas con una incógnita.

3.1. Aspectos generales sobre ecuaciones.

Se llaman soluciones o raíces de una ecuación a los valores que sustituidos en el lugar de las incógnitas verifican la igualdad que representa la ecuación, es decir, las soluciones son los valores que satisfacen la ecuación.

Se llama conjunto solución de una ecuación al conjunto formado por todas las soluciones.

! Resolver una ecuación es determinar su conjunto solución.

Dos ecuaciones que se satisfacen para los mismos valores de las incógnitas, es decir, que tienen las mismas soluciones se denominan ecuaciones equivalentes.

Los métodos para resolver una ecuación, variadísimos en la forma, fundamentalmente se reducen a uno solo: procurar su transformación en otras más sencillas. A veces esta transformación conduce a una ecuación equivalente pero no siempre es así y en tales casos se procura que la ecuación transformada contenga, al menos, todas las soluciones de la ecuación original.

3.1.1. Transformaciones de ecuaciones más usadas.

3.1.1.1. Transformaciones equivalentes.

a) Sumando (o restando) a los dos miembros de una ecuación la misma expresión algebraica entera (en particular una constante) resulta una ecuación equivalente.

b) Multiplicando (o dividiendo) los dos miembros de una ecuación por un mismo número diferente de cero resulta una ecuación equivalente.

! Se puede cambiar de signo todos los términos de una ecuación pues esto equivale a multiplicar ambos miembros por -1.

3.1.1.2. Transformaciones no equivalentes.-

- a) Si se multiplica una ecuación por una expresión entera que contenga la variable la ecuación que se obtiene puede tener más soluciones que la ecuación original.
 - ✓ Siempre que se aplique la transformación anterior hay que comprobar si se han introducido "raíces extrañas" que son los valores que son soluciones de la ecuación transformada pero no de la ecuación original.
- b) Si se divide una ecuación por una expresión entera que contenga la variable o si se multiplica por una fracción que contenga la incógnita en el denominador, la ecuación que se obtiene menos soluciones que la ecuación original.
 - ✓ Siempre que se aplique la transformación anterior hay que comprobar si el valor o los valores que hacen cero la expresión entera por la que se ha dividido o el denominador de la fracción por la que se ha multiplicado son o no soluciones de la ecuación original.
- c) Si se elevan al cuadrado los miembros de una ecuación la ecuación que se obtiene puede tener más soluciones que la ecuación original.
 - ✓ Siempre que se aplique la transformación anterior hay que comprobar si se han introducido raíces extrañas.

3.2. Ecuaciones lineales.-

- Toda ecuación de la forma $ax+b=0$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ o toda ecuación que mediante transformaciones equivalentes pueda llevarse a esta forma se llama ecuación lineal con una incógnita.
- Toda ecuación lineal con una incógnita admite una solución única $x = -\frac{b}{a}$.
- Al resolver una ecuación lineal despejamos la variable.
- ✓ Ver ejemplo 1a) LT pág. 28. Se debe concluir que $S = \{1\}$.

3.3. Ecuaciones cuadráticas.-

- Toda ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ o toda ecuación que mediante transformaciones equivalentes pueda llevarse a esta forma se llama ecuación cuadrática o de segundo grado con una incógnita.
- Una ecuación cuadrática puede tener en $\mathbb{R}$ dos soluciones, una o ninguna.
- Una ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ se resuelve procediendo de las siguientes formas:
 - a) Si el trinomio ax^2+bx+c tiene descomposición factorial se puede utilizar este procedimiento para resolver la ecuación reduciéndola a dos ecuaciones lineales. Para esto se aplica la propiedad: Para todos los números reales m, n se cumple $m \cdot n = 0$ si, y sólo si, $m=0$ o $n=0$.
 - b) Si no resulta fácil descomponer en factores el trinomio ax^2+bx+c , entonces aplicamos la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado:
La ecuación $ax^2+bx+c=0$ tiene soluciones reales si, y sólo si, $D = b^2 - 4ac \geq 0$. El número D se llama discriminante de la ecuación.
- Si $D > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

- Si $D=0$, entonces la ecuación tiene una solución $x = -\frac{b}{2a}$. -11-
- Si $D < 0$, la ecuación tiene dos soluciones complejas conjugadas.
- ! Ver ejemplo 1 b), c), d), LT págs. 28-29. Se debe plantear el con-
junto solución en cada caso.
- Teorema de Vieta:

x_1 y x_2 son soluciones o raíces de la ecuación $mx^2 + px + q = 0$ si, y sólo si,
 $-(x_1 + x_2) = \frac{p}{m}$ y $x_1 \cdot x_2 = \frac{q}{m}$.

4. Ecuaciones fraccionarias.-

- Toda ecuación que contenga fracciones algebraicas, es decir, en las que la variable aparezca en el denominador se llama ecuación fraccionaria.
- Para resolver una ecuación fraccionaria procedemos así:
- a). Se transforma la ecuación fraccionaria en una ecuación entera para lo cual es necesario eliminar los denominadores:
 - Se halla el mcm de los denominadores,
 - Se multiplican ambos miembros de la ecuación por el mcm de los denominadores.
- b). Se resuelve la ecuación entera,
- c). Se analiza si alguna raíz de la ecuación entera es una raíz extraña de la ecuación original.
- d). Se da el conjunto solución excluyendo de él las raíces extrañas en caso de que existan.
- ! Ver ejemplo 2 a), LT págs. 29-30. Se debe concluir que $S = \{-1\}$.

5. Sistemas de ecuaciones.-

5.1. Sistemas de ecuaciones lineales.-

5.1.1. Generalidades.-

- Las ecuaciones que tienen la forma $ax + by + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ se llaman ecuaciones lineales en dos variables (representan rectas en el plano coordenado (ver aspecto; Geometría analítica de la recta en el plano en la segunda parte de este resumen).
- Las ecuaciones que tienen la forma $ax + by + cz + d = 0$; $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ se llaman ecuaciones lineales en tres variables (representan planos en el espacio).
- Una solución de una ecuación lineal en dos variables es un par ordenado formado por los valores de las variables para los cuales la ecuación se satisface.
- Una solución de una ecuación lineal en tres variables es una terna formada por los valores de las variables para los cuales se satisface la ecuación.
- Tanto una ecuación lineal con dos variables como una con tres tienen infinitas soluciones.

5.1.2. Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.-

- Llamamos sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables a un sistema de la forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$
- Las soluciones de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables son las soluciones comunes a las dos ecuaciones que lo forman y el conjunto de todas estas soluciones comunes es el conjunto solución del sistema.

- El conjunto solución de un sistema de ecuaciones es el conjunto intersección de los conjuntos solución de las ecuaciones que lo forman.
- Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables puede tener:
 - una única solución (las rectas se intersecan),
 - ninguna solución (las rectas son paralelas),
 - infinitas soluciones (las rectas son coincidentes)
- Para resolver analíticamente un sistema de dos ecuaciones con dos variables podemos utilizar dos métodos:
 - método de sustitución
 - método de adición y sustracción (o método de reducción)

Ver ejemplo 1, LT págs. 43-45. Debes tener en cuenta que en a) debe concluirse que la solución es el par $(3; 2)$ y que el conjunto solución es $S = \{(3; 2)\}$. En b) debe concluirse que el sistema no tiene solución y que $S = \emptyset$. En c) debe concluirse que las infinitas soluciones son los pares $(x; y)$ de números reales tales que $x + 2y = -5$.

Es posible conocer si un sistema tiene solución única o infinitas o si no tiene solución sin resolverlo, para ello se deben comparar los cocientes de los coeficientes correspondientes de las ecuaciones:

Sea el sistema:
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$
, entonces se cumple:

Si $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ el sistema tiene solución única,

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ el sistema no tiene solución,

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ el sistema tiene infinitas soluciones.

5.1.3. Sistemas de tres ecuaciones lineales con tres variables.

Llamamos sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables a un sistema de la forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \end{cases}$$

Estos sistemas pueden tener solución única, infinitas soluciones o no tener solución.

Para la resolución de estos sistemas puede utilizarse, según sea más cómodo, el método de sustitución o el de reducción. Generalmente se utiliza el de reducción y en tales casos procedemos así:

a). Se toman dos parejas de ecuaciones en las que se elimina la misma variable para obtener dos nuevas ecuaciones con sólo dos variables,

b). Se resuelve el sistema formado por estas dos ecuaciones,

c). se sustituyen los valores encontrados en una de las ecuaciones originales y se halla el valor de la variable inicialmente eliminada.

Ver ejemplo 2, LT págs. 46-48. Debes tener en cuenta que en a) debe concluirse que la solución es la terna $(3; -2; 5)$ y que el conjunto solución es $S = \{(3; -2; 5)\}$. En b) debe concluirse que la solución es la terna $(2; -1; 3)$ y que el conjunto solución es $S = \{(2; -1; 3)\}$.

El conjunto solución de un sistema de ecuaciones es el conjunto intersección de los conjuntos solución de las ecuaciones que lo forman.

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables puede tener:

- una única solución (las rectas se intersecan),
- ninguna solución (las rectas son paralelas),
- infinitas soluciones (las rectas son coincidentes)

Para resolver analíticamente un sistema de dos ecuaciones con dos variables podemos utilizar dos métodos:

- método de sustitución
- método de adición y sustracción (o método de reducción)

Ver ejemplo 1, LT págs. 43-45. Debes tener en cuenta que en a) debe concluirse que la solución es el par $(3; 2)$ y que el conjunto solución es $S = \{(3; 2)\}$. En b) debe concluirse que el sistema no tiene solución y que $S = \emptyset$. En c) debe concluirse que las infinitas soluciones son los pares $(x; y)$ de números reales tales que $x + 2y = -5$.

Es posible conocer si un sistema tiene solución única o infinitas o si no tiene solución sin resolverlo, para ello se deben comparar los cocientes de los coeficientes correspondientes de las ecuaciones:

Sea el sistema: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$, entonces se cumple:

Si $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ el sistema tiene solución única,

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ el sistema no tiene solución,

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ el sistema tiene infinitas soluciones.

5.1.3. Sistemas de tres ecuaciones lineales con tres variables.

Llamamos sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables a un sistema de la forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \end{cases}$$

Estos sistemas pueden tener solución única, infinitas soluciones o no tener solución.

Para la resolución de estos sistemas puede utilizarse, según sea más cómodo, el método de sustitución o el de reducción. Generalmente se utiliza el de reducción y en tales casos procedemos así:

a). Se toman dos parejas de ecuaciones en las que se elimina la misma variable para obtener dos nuevas ecuaciones con sólo dos variables,

b). Se resuelve el sistema formado por estas dos ecuaciones,

c). se sustituyen los valores encontrados en una de las ecuaciones originales y se halla el valor de la variable inicialmente eliminada.

Ver ejemplo 2, LT págs. 46-48. Debes tener en cuenta que en a) debe concluirse que la solución es la terna $(3; -2; 5)$ y que el conjunto solución es $S = \{(3; -2; 5)\}$. En b) debe concluirse que la solución es la terna $(2; -1; 3)$ y que el conjunto solución es $S = \{(2; -1; 3)\}$.

5.2. Sistemas cuadráticos.

Un sistema de ecuaciones se llama cuadrático cuando en él aparece al menos una ecuación cuadrática.

Para la prueba de ingreso solamente es objetivo resolver sistemas cuadráticos de dos ecuaciones con dos variables formados por una ecuación cuadrática y otra lineal.

Para resolver tales sistemas procedemos así:

- Se despeja una variable en la ecuación lineal,
- se sustituye el valor de la variable despejada en la ecuación cuadrática,
- se resuelve la ecuación de segundo grado en una variable obtenida,
- se calculan los valores de la otra variable,
- se da el conjunto solución.

Ver ejemplo 3 a), b), LT págs. 48-50. En cada uno debe concluirse con el conjunto solución.

6. Problemas que conducen a ecuaciones y a sistemas de ecuaciones.

6.1. Ejemplos de traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico.

- Un número aumentado en 3: $x+3$.
- Un número disminuido en 2: $x-2$.
- El duplo de un número: $2x$.
- El quintuplo de un número: $5x$.
- La mitad de un número: $\frac{1}{2}x$ ó $\frac{x}{2}$.
- El cuadrado de un número: x^2 .
- El triplo de un número aumentado en 5: $3x+5$.
- Dos números enteros consecutivos: n y $n+1$.
- Un número par: $2x$.
- Un número impar: $2x+1$.
- Un número de dos cifras: $10x+y$ (donde x e y representan las cifras de las decenas y de las unidades respectivamente).
- Un número de tres cifras: $100x+10y+z$ (donde x , y , z representan las cifras de las centenas, las decenas y las unidades respectivamente).
- La edad de una persona hace 4 años: $x-4$ (donde x representa la edad actual de la persona).
- La edad de una persona dentro de 4 años: $x+4$ (donde x representa la edad actual de la persona).
- Si al dividir un número por d se obtiene cociente 3 y resto 1: $x = 3 \cdot d + 1$ (donde x representa el número).
- El 5% de un número: $0,05x$ ó $\frac{5}{100}x$.
- Si una persona camina x km por hora, el número de kilómetros que camina en t horas (en un movimiento rectilíneo uniforme): xt .
- Una persona realiza un trabajo en x días; la parte del trabajo que realiza en un día: $\frac{1}{x}$.
- Una llave llena un depósito en t horas. La parte del depósito que llena en una hora: $\frac{1}{t}$.
- El número de centavos que hay en x pesos, y pesetas y z medios: $100x + 20y + 5z$.

6.2. Sugerencias para resolver un problema.

- Leer cuidadosamente el problema tantas veces que sean necesarias hasta comprender la situación que se plantea,
- determinar los datos y definir las incógnitas con las que se trabajará,
- buscar las relaciones o combinaciones existentes que te permitan formular la ecuación o las ecuaciones que representan el problema,
- resolver la ecuación o el sistema de ecuaciones planteado,
- comprobar la solución o las soluciones directamente en el texto del problema y no en la ecuación planteada (puedes hacerlo mentalmente),
- responder explícitamente a lo preguntado en el problema (debes tener en cuenta las unidades de medida).

7. Radicales. Ecuaciones con radicales.

7.1. Raíz n-ésima de un número real.

- Sea $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. La raíz n-ésima de a en $\mathbb{R}$ es la solución de la ecuación $x^n = a$. Notación $\sqrt[n]{a}$.
- En $\mathbb{R}$ se cumple: si n es par, $\sqrt[n]{a}$ tiene sentido o es un número real para $a \geq 0$; si n es impar, entonces $\sqrt[n]{a}$ siempre tiene sentido, es decir, si n es impar, $\sqrt[n]{a}$ siempre es un número real.
- Si n es par y $a > 0$, existen dos raíces n-ésimas en $\mathbb{R}$, una positiva y otra negativa, pero para lograr definir un sólo número para $\sqrt[n]{a}$ se considera sólo la positiva (raíz aritmética o principal).
Ejemplos: $\sqrt{64} = 8$, $\sqrt{9} = 3$.
- Debes tener presente, sin embargo, que en el caso de que quieras determinar los números x tales que $x^2 = 64$ o $x^2 = 9$ se cumple que $x = \pm 8$ o $x = \pm 3$ respectivamente.
- Si n es impar, $\sqrt[n]{a}$ tiene el mismo signo que la cantidad subradical. Ejemplos: $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[3]{-27} = -3$.

7.2. Potencias de exponente racional.

- Sea $a \in \mathbb{R}_+$; $m, n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$, entonces definimos:

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{para } a > 0$$

$$a^{m/n} = 0 \quad \text{para } a = 0.$$

- Propiedades de las potencias de exponente racional:
Se cumplen las mismas propiedades de las potencias de exponente entero (ver aspecto 1.9 en pág. 5 de este resumen).
Además se cumple la MONOTONÍA:

$$b < c \Leftrightarrow \begin{cases} a^b < a^c & \text{si } a > 1 \\ a^b > a^c & \text{si } 0 < a < 1 \end{cases},$$

para todo $b, c \in \mathbb{Q}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$.

- Las propiedades de las potencias de exponente racional se extienden a potencias de exponente real.

7.3. Propiedades de los radicales.-

Radical: es toda expresión de la forma $\sqrt[n]{a^m}$ con $n, m \in \mathbb{Z}$, $n > 1$ y a una expresión cualquiera; n es el índice y a^m el radicando.

Debido a que $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$, los radicales cumplen propiedades que son consecuencias de las propiedades de las potencias de exponente racional:

$$a) \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$d) \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$b) \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$e) \sqrt[k \cdot n]{a^{k \cdot m}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$c) (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

7.4. Simplificación de radicales.-

Un radical está simplificado cuando:

- el índice no tiene factores comunes con el exponente del radicando
- se han extraído los factores que son raíces exactas,
- el radicando no tiene denominador.

En la práctica se extraen del radical los factores cuyos exponentes sean mayor o igual que el índice. En estos casos se divide el exponente por el índice, el cociente de esta división es el exponente de la potencia que "sale" y el resto es el exponente de la potencia que "queda en el radical".

Ejemplo: $\sqrt[3]{a^5 \cdot b^6} = ab^2 \sqrt[3]{a^2}$

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 3} \\ -3 \quad 1 \leftarrow \\ \hline 2 \leftarrow \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \overline{) 3} \\ -6 \quad 2 \leftarrow \\ \hline 0 \leftarrow \end{array}$$

7.5. Adición y sustracción de radicales.-

Adicionamos y sustraemos radicales de la misma forma que realizamos términos semejantes.

Dos radicales son semejantes si tienen el mismo índice y el mismo radicando.

7.6. Multiplicación y división de radicales.-

Para multiplicar o dividir radicales diferenciamos dos casos:

1. caso: los radicales tienen igual índice: en este caso aplicamos directamente las propiedades a) o b) de los radicales directamente

Ejemplo: $2\sqrt[3]{5} \cdot 4\sqrt[3]{6} = 8\sqrt[3]{5 \cdot 6} = 8\sqrt[3]{30}$

2. caso: los radicales tienen diferentes índices: en este caso, aplicando la propiedad e) de los radicales escribimos los radicales con el mismo índice y después aplicamos propiedad a) o b).

Ejemplo: $\sqrt[3]{4} : \sqrt{2} = \sqrt[3 \cdot 2]{4^2} : \sqrt[2 \cdot 3]{2^3} = \sqrt[6]{16} : \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{\frac{16}{8}} = \sqrt[6]{2} = \sqrt[3]{2}$

7.7. Racionalización de denominadores.-

Hablamos de racionalizar una expresión cuando se trata de una expresión donde aparece un radical en el denominador, entonces racionalizar significa eliminar el radical del denominador, para ello se multiplica el numerador y el denominador por un mismo radical de modo que al multiplicar los denominadores se elimine el radical aplicando propiedades.

Ejemplo: $\frac{2}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{2\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{2\sqrt[3]{25}}{5}$

7.8. Ecuaciones en radicales.-

-16-

Las ecuaciones con radicales son aquellas en las que aparece la variable al menos bajo un signo radical. Para resolver este tipo de ecuaciones es necesario transformarlas en otras en las que la variable no aparezca en el radicando.

Para la prueba de ingreso el objetivo es resolver ecuaciones con radicales de índice 2.

El algoritmo para resolver una ecuación con radicales de este tipo es:

a). Racionalizar la ecuación. Esto consiste en eliminar los radicales de la ecuación, para ello seguimos dos pasos fundamentalmente:

- aislar el radical,
- elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación.

Si al elevar al cuadrado todavía aparece un radical en la ecuación tenemos que volver a aislar el radical y elevar al cuadrado ambos miembros.

b). Resolver la ecuación obtenida,

c). Comprobar en la ecuación original las raíces obtenidas para desechar las que no la satisfacen (raíces extrañas),

d). Plantear el conjunto solución

Ver ejemplo 2b), LT pág. 30. En este caso se debe concluir que $S = \{0\}$

8. Logaritmos. Ecuaciones logarítmicas y exponenciales.-

8.1. Logaritmos. Propiedades.-

Sean $a, b, x \in \mathbb{R}$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$)

$$\log_a b = x \iff a^x = b$$

Propiedades:

$$1). a^{\log_a b} = b \quad 2). \log_a a = 1 \quad 3). \log_a 1 = 0$$

$$4). \log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \quad 5). \log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

$$6). \log_a b^x = x \log_a b \quad 7). \log_{a^x} b = \frac{1}{x} \log_a b$$

$$8). \log_a c \cdot \log_c b = \log_a b$$

De la propiedad 8) resulta la fórmula del cambio de base:

$$\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$$

9). MONOTONIA:

$$b < c \iff \begin{cases} \log_a b < \log_a c & \text{si } a > 1 \\ \log_a b > \log_a c & \text{si } 0 < a < 1 \end{cases}$$

La monotonía es imprescindible para resolver una ecuación logarítmica.

8.2. Ecuaciones logarítmicas.-

Las ecuaciones logarítmicas son aquellas en las que la variable aparece al menos en el argumento o en la base de un logaritmo.

Para resolver una ecuación logarítmica procedemos así:

1). Aplicamos propiedades y transformamos de manera que se obtenga:

- la igualdad de dos logaritmos en la misma base, en este caso podemos igualar entonces los argumentos, o
- un logaritmo igual a un número, en este caso aplicamos definición de logaritmo,

2). resolvemos la ecuación resultante,

3). comprobamos en la ecuación original,

4). planteamos el conjunto solución.

Ver ejemplo 2c), LT pág. 31. En este caso se debe concluir que $S = \{-1\}$.

8.3. Ecuaciones exponenciales.-

Las ecuaciones exponenciales son aquellas en las que la variable aparece al menos en un exponente.

Para resolver una ecuación exponencial es importante tener en cuenta la propiedad:

$$\text{Si } a^x = a^y \text{ entonces } x = y \quad (a \neq 1)$$

Una ecuación exponencial se resuelve así:

- aplicamos propiedades de las potencias (ver pág. 5 de este resumen) para obtener la igualdad de dos potencias en la misma base,
- igualamos los exponentes,
- resolvemos la ecuación resultante,
- comprobamos si la ecuación obtenida es fraccionaria, con radicales, logarítmica o trigonométrica (si contiene las razones tangente o cotangente),
- planteamos el conjunto solución.

Ver ejemplo 2d), LT pág. 31. En este caso se debe concluir que $S = \{2, 3\}$.

Hay ecuaciones logarítmicas y exponenciales en las que aplicando propiedades de los logaritmos y de las potencias respectivamente pueden resolverse como una ecuación cuadrática.

Ejemplos:

a) $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$

$$3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$$

$$(3^x)^2 - 10 \cdot 3^x + 9 = 0 \quad \text{En este caso se considera la variable como } 3^x$$

$$(3^x - 9) \cdot (3^x - 1) = 0$$

$$3^x - 9 = 0 \quad \text{o} \quad 3^x - 1 = 0$$

$$3^x = 3^2$$

$$\boxed{x = 2}$$

$$3^x = 3^0$$

$$\boxed{x = 0}$$

b) $\log_2^2(x+1) - \log_2(x+1) + 1 = 0$

$$[\log_2(x+1)]^2 - 2 \log_2(x+1) + 1 = 0$$

$$(\log_2(x+1) - 1)^2 = 0 \quad \text{En este caso se considera la variable como } \log_2(x+1)$$

$$\log_2(x+1) - 1 = 0$$

$$\log_2(x+1) = 1$$

$$x+1 = 2$$

$$\boxed{x = 1}$$

9. Inecuaciones.-

9.1. Inecuaciones lineales.-

- * Una inecuación lineal en una variable es una inecuación del tipo $ax+b \leq 0$ ó $ax+b \geq 0$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.
- El procedimiento para resolver una inecuación lineal en una variable es muy similar al que se utiliza en la resolución de una ecuación lineal en una variable:
 - 1). los sumandos se transponen de igual manera que en las ecuaciones agrupando en un mismo miembro los términos que contienen la variable y los números en el otro,
 - 2). los coeficientes de las variables en las inecuaciones lineales se transpone de igual forma que en las ecuaciones pero teniendo en cuenta que:
 - si el coeficiente es positivo, la desigualdad no se altera.
 - si el coeficiente es negativo, el signo de desigualdad se invierte.
- + Resolver una inecuación es determinar su conjunto solución.
- ! Ver ejemplo 1, LT pág. 57. En cada uno de estos casos se debe plantear el conjunto solución:

a). $S = \{x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{1}{2}\}$ ó $S = [\frac{1}{2}, +\infty)$

b). $S = \{x \in \mathbb{R} : x < -\frac{3}{2}\}$ ó $S = (-\infty, -\frac{3}{2})$

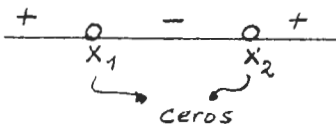
c). $S = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}$ ó $S = (-\infty, 1]$

9.2. Inecuaciones cuadráticas.-

- Una inecuación cuadrática en una variable es una inecuación del tipo $ax^2+bx+c \geq 0$ ó $ax^2+bx+c \leq 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.
- ! Para resolver una inecuación cuadrática debemos tener en cuenta el signo del trinomio ax^2+bx+c :

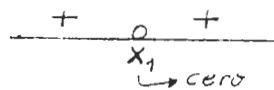
1. caso: $a > 0$

- a). Si el Trinomio tiene dos ceros, cambia de signo en cada uno de ellos, de modo que el eje "x" (la recta numérica) queda dividido en tres intervalos que se alternan en signos.



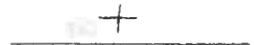
- ! Ten en cuenta que en x_1 y x_2 el trinomio alcanza el valor cero, para los valores de la variable mayores que x_2 o menores que x_1 el trinomio alcanza un valor positivo y para los valores entre los ceros un valor negativo

- b). Si el Trinomio tiene un único cero (cero doble), la recta numérica queda dividida en dos intervalos que tienen signo positivo.



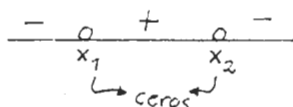
- ! Para el valor x_1 el trinomio se hace cero, pero para cualquier otro valor de la variable, el trinomio tiene signo positivo, es decir, alcanza un valor positivo.

- c). Si el Trinomio no tiene ceros, entonces alcanza un valor positivo para cualquier valor de la variable.



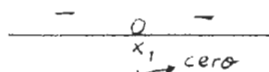
2. Caso: $a < 0$

a). Si el Trinomio tiene dos ceros, cambia de signo en cada uno de ellos, de modo que la recta numérica queda dividida en tres intervalos que se alternan en signos.



! Ten en cuenta que en x_1 y x_2 el trinomio se hace cero. Para los valores mayores que x_2 o menores que x_1 el trinomio tiene un valor negativo y para los valores entre los ceros un valor positivo.

b). Si el trinomio tiene un único cero (cero doble), la recta numérica queda dividida en dos intervalos que tienen signo negativo.



! Para el valor x_1 el trinomio se hace cero, pero para cualquier otro valor de la variable el trinomio tiene signo negativo, es decir, tiene o alcanza un valor negativo.

c). Si el Trinomio no tiene ceros, entonces alcanza un valor negativo para cualquier valor de la variable.



Para resolver una inecuación cuadrática procedemos así:

- 1). En caso de que la inecuación no tenga la forma $ax^2+bx+c \geq 0$ o ≤ 0 , se transforma de forma tal que un miembro sea cero,
- 2). determinamos los ceros del trinomio ax^2+bx+c (descomponiendo los factores o aplicando la fórmula de resolución de una ecuación de segundo grado al resolver la ecuación $ax^2+bx+c=0$),
- 3). se analiza el signo del Trinomio ax^2+bx+c en los intervalos determinados por los ceros en la recta numérica (ver casos 1. y 2. planteados anteriormente),
- 4). se determina el conjunto solución el cual será la unión de aquellos intervalos en los que el signo del trinomio coincida con el signo de la desigualdad que representa la inecuación.

! Ten en cuenta que si el signo de desigualdad es " $\leq$ " o " $\geq$ " se incluyen los ceros del trinomio y en este caso los puntos que representan los ceros en la recta numérica los rellenamos. Si el signo de la desigualdad es " $<$ " o " $>$ " no se incluyen los ceros del trinomio y en este caso los puntos que representan los ceros en la recta numérica no los rellenamos.

! Ver ejemplo 2, LT págs. 58-60. En cada uno de los casos falta dar el conjunto solución de la inecuación:

a). $S = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1 \text{ o } x \geq 3\}$ o $S = (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$

b). $S = \{x \in \mathbb{R} : 0,815 < x < 3,19\}$ o $S = (0,815; 3,19)$

c). $S = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

d). $S = \emptyset$

e). $S = \mathbb{R}$

9.3. Inecuaciones fraccionarias.-

Una inecuación fraccionaria en una variable es una inecuación en la que la variable aparece al menos en un denominador.

Para resolver una inecuación fraccionaria procedemos así:

- 1). Si un miembro de la inecuación no es cero, transponemos todos los términos de un miembro para el otro para hacer cero un miembro,

!! En una inecuación fraccionaria NO puedes multiplicarla por una expresión que contenga la variable como haces en el caso de una ecuación fraccionaria.

- 2). Reducimos el miembro que no es cero a una expresión o fracción algebraica de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$

- 3). descomponemos en factores el numerador y el denominador y se simplifican si es posible,

- 4). hallamos los ceros del numerador y del denominador y los representamos en la recta numérica (si el signo de desigualdad es " $\leq$ " o " $\geq$ " rellenamos los puntos que representan los ceros del numerador, los puntos que representan los ceros del denominador no se rellenan pues estos representan valores que no están en el dominio de la inecuación). De esta forma la recta numérica queda dividida en intervalos,

- 5). determinamos el signo de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en cada uno de los intervalos de la recta numérica,

!! En la práctica, para determinar el signo de cada uno de los intervalos se tiene en cuenta el número de factores lineales de la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en los que el coeficiente de la variable es negativo, si este número es par, entonces en la recta numérica (de derecha a izquierda) señalamos el signo de cada intervalo comenzando por "+" y alternamos con el signo "-" al pasar por cada cero (excepto si el cero es doble). Si el número de factores en los que la variable tiene coeficiente negativo es impar, entonces comenzamos (de derecha a izquierda) con el signo "-".

! Si el cero de un factor de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es doble (llamamos doble si el factor tiene exponente par), entonces al pasar por él en la recta numérica el signo no cambia.

- 6). determinamos el conjunto solución, el cual será el conjunto unión de aquellos intervalos en los que el signo coincide con el signo de la desigualdad.

! Tienes que tener en cuenta que si en el paso 3) simplificaste factores (entendemos simplificar completamente del denominador), entonces hay que excluir del conjunto solución los ceros de esos factores que se simplifican. Además hay que tener en cuenta si el signo de desigualdad es estricto o no.

! Ver ejemplo 3, LT págs. 61-63. En cada uno de los casos falta escribir el conjunto solución:

- a). $S = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -3 \text{ o } x > 1\}$ o $S = (-\infty; -3] \cup (1; +\infty)$
- b). $S = \{x \in \mathbb{R} : x < -4 \text{ o } -1 < x < 2\}$ o $S = (-\infty; -4) \cup (-1; 2)$
- c). ! En este caso el libro no considera al valor $x=3$ como solución lo que no es correcto, pues el signo de la desigualdad es " $>$ ".
 $S = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x \leq 0 \text{ o } x=3 \text{ o } x > 5\}$ o $S = (-2; 0] \cup \{3\} \cup (5; +\infty)$
- d). $S = \{x \in \mathbb{R} : x < -2, x \neq -5 \text{ o } 0 < x < 1\}$ o $S = (-\infty; -2) \setminus \{-5\} \cup (0; 1)$
- e). $S = \{x \in \mathbb{R} : x < -2\}$ o $S = (-\infty; -2)$.

9.4. Inecuaciones logarítmicas. Inecuaciones exponenciales. -

9.4.1. Inecuaciones logarítmicas. -

Una inecuación logarítmica es una inecuación en la que la variable aparece al menos en un argumento o en la base de un logaritmo.

En general procedemos de la siguiente manera para resolver una inecuación logarítmica:

- 1). determinamos el "dominio" de la inecuación, es decir, determinamos el conjunto de números reales para los cuales está definido cada uno de los logaritmos planteados en la inecuación,
- 2). aplicamos propiedades de los logaritmos (ver pág. 16 de este resumen) en ambos miembros hasta obtener la comparación de dos logaritmos en la misma base,
- 3). aplicamos MONOTONIA de la logaritimización (propiedad 4), pág. 16) para comparar los argumentos,

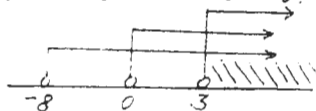
! Fíjate bien si la base a del logaritmo cumple que: $a > 1$ o $0 < a < 1$.

- 4). Resolvemos la inecuación obtenida (lineal, cuadrática o fraccionaria),
- 5). determinamos el conjunto solución de la inecuación obtenida,
- 6). determinamos, finalmente, el conjunto solución de la inecuación, este será la intersección del dominio de la inecuación hallado en el paso 1) y del conjunto solución de la inecuación hallada en el paso 5).

! Ejemplo: Resolver: $\log_{1/2}(x+8) + \log_{1/2}(x-3) > \log_{1/2} 3x$.

Hallemos primeramente el dominio de la inecuación:

$$\begin{aligned} x+8 > 0 & \quad y \quad x-3 > 0 & \quad y \quad 3x > 0 \\ x > -8 & \quad x > 3 & \quad x > 0 \end{aligned}$$



$$D = \{x \in \mathbb{R} : x > 3\}$$

Busquemos los valores que satisfacen la desigualdad.

$$\log_{1/2}(x+8) + \log_{1/2}(x-3) > \log_{1/2} 3x$$

$$\log_{1/2}(x+8)(x-3) > \log_{1/2} 3x$$

$$(x+8)(x-3) < 3x$$

$$x^2 + 5x - 24 < 3x$$

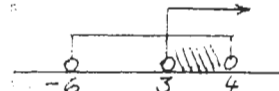
$$x^2 + 2x - 24 < 0$$

$$(x+6)(x-4) < 0$$

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ -6 \quad 4 \end{array}$$

$$x \in \mathbb{R} : -6 < x < 4$$

Para determinar el conjunto solución de la inecuación:



$$S = \{x \in \mathbb{R} : 3 < x < 4\}$$

$$S = (3; 4)$$

9.4.2. Inecuaciones exponenciales.-

- Una inecuación exponencial es una inecuación en la que la variable aparece al menos en el exponente de una potencia.
- En general procedemos de la siguiente manera para resolver una inecuación exponencial:

- 1) Aplicamos propiedades de las potencias (ver pág. 5 de este resumen) en ambos miembros hasta obtener la comparación de dos potencias en la misma base,
- 2) aplicamos MONOTONIA de la potenciación (propiedad que aparece en la pág. 14 de este resumen),

⚠ Debes prestar atención si la base a de la potencia cumple $a > 1$ ó $0 < a < 1$

- 3) resolvemos la inecuación obtenida,
- 4) planteamos el conjunto solución.

⚠ Ejemplo: Resolver $3^{x^2-7x+16} > 81$

$$3^{x^2-7x+16} > 3^4$$

$$x^2-7x+16 > 4$$

$$x^2-7x+12 > 0$$

$$(x-3)(x-4) > 0$$



$$S = \{x \in \mathbb{R} : x < 3 \text{ ó } x > 4\}$$

$$S = (-\infty; 3) \cup (4; +\infty)$$

10. Funciones.-

10.1. Concepto de función.

Una función f de un conjunto A en un conjunto B es una correspondencia que a cada elemento del conjunto A le hace corresponder exactamente un elemento del conjunto B .

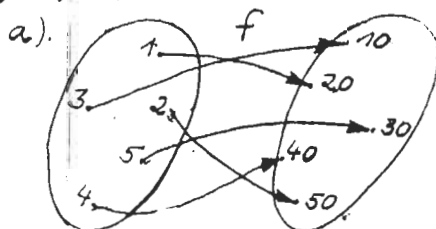
- El conjunto A es el dominio de la función f y escribimos $\text{Dom } f = A$.

- ⚠ El dominio de una función es el conjunto formado por todos los valores a cada uno de los cuales es posible asociarle un único valor según la función.

- El elemento del conjunto B que corresponda a un elemento x con $x \in \text{Dom } f$ se llama imagen de x y se denota por $f(x)$. El conjunto formado por todas las imágenes se llama conjunto imagen de la función f y se denota por $\text{Im } f$.

$$\text{Im } f = \{f(x) : x \in \text{Dom } f\}$$

⚠ Ejemplos:

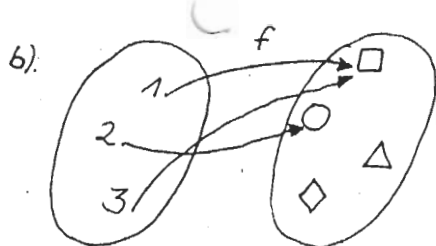


La correspondencia f representada es una función porque a cada elemento del primer conjunto se le hace corresponder exactamente un elemento del segundo.

$$\text{Dom } f = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\text{Im } f = \{10, 20, 30, 40, 50\}$$

$$f(1) = 20; f(2) = 50; f(3) = 10; f(4) = 40; f(5) = 30$$

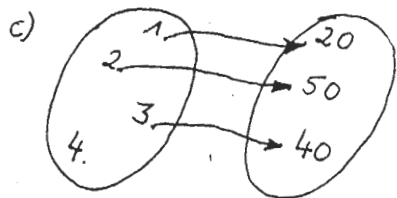


La correspondencia f representa una función porque a cada elemento del primer conjunto (conjunto de partida) se le hace corresponder exactamente un elemento del segundo conjunto (conjunto de llegada).

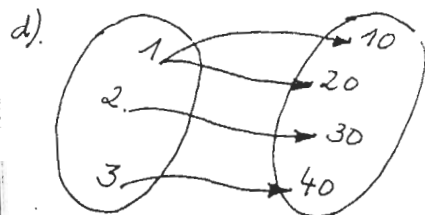
$$\text{Dom } f = \{1; 2; 3\}$$

$$\text{Im } f = \{\square; \circ\}$$

$$f(1) = \square; f(2) = \circ; f(3) = \triangle$$



La correspondencia f no es una función porque no a cada elemento del conjunto de partida se le hace corresponder un elemento del conjunto de llegada (! al 4 no se le hace corresponder ninguno).



La correspondencia f no es una función porque a cada elemento del conjunto de partida no se le hace corresponder un único elemento del conjunto de llegada (! al 1 se le hace corresponder el 10 y el 20).

e) La correspondencia f que hace corresponder a cada número real x el número real $x+1$ es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

10.1.1. Representación de una función.-

La forma más frecuente empleada para representar una función real es la ecuación correspondiente a dicha función. Por ejemplo la función f vista en e) del ejemplo anterior puede representarse por:

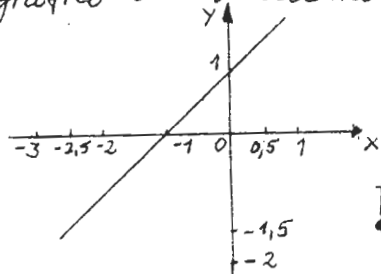
$$y = x + 1, x \in \mathbb{R} \quad \text{o} \quad f(x) = x + 1, x \in \mathbb{R}$$

Una función puede ser representada también en una tabla de valores mediante la indicación de pares ordenados $(x; y)$. Por ejemplo para la función $f(x) = x + 1, x \in \mathbb{R}$ tenemos:

x	-3	-2,5	-1	0	0,5	1	2	...
y	-2	-1,5	0	1	1,5	2	3	...

En este caso decimos que los pares $(-3; -2)$, $(-2,5; -1,5)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$, $(0,5; 1,5)$, $(1; 2)$, $(2; 3)$... pertenecen a la función f .

Otra posibilidad de representar una función es mediante su gráfico en un sistema de coordenadas rectangulares. Por ejemplo:



$$f(x) = x + 1, x \in \mathbb{R}$$

Note que en el eje " x " están situados los elementos del dominio de f y en el eje " y " están contenidos los elementos de la imagen de f . En este caso tenemos: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$; $\text{Im } f = \mathbb{R}$.

!! En general dada una función por su representación gráfica podemos determinar su domi-

nio y su imagen proyectando el gráfico sobre el eje "x" y sobre el eje "y" respectivamente.

10.2. Propiedades de las funciones.

10.2.1. Puntos de intersección del gráfico de una función con los ejes coordenados.

a). Si P_x es un punto de intersección del gráfico de una función con el eje "x", entonces las coordenadas de este punto vienen dadas por un par de la forma $(x_p; 0)$, es decir, la ordenada de este punto es siempre cero.

! CERO DE UNA FUNCIÓN f : Un número real x_p , $x \in \text{Dom} f$ se llama cero de f si, y sólo si,
 $f(x_p) = 0$

! Los ceros de una función pueden, por tanto, ser calculados igualando la función a cero y buscando las soluciones de la ecuación correspondiente, pero siempre hay que comprobar si estos valores pertenecen al dominio de la función.

• No se pueden confundir los ceros de una función con los puntos de intersección de su gráfico con el eje "x". Un cero de una función es un elemento (un número real) del dominio de la función y es el valor de la abscisa de un punto de intersección del gráfico de la función con el eje "x".

b). Si P_y es el punto de intersección del gráfico de una función con el eje "y", entonces las coordenadas de este punto vienen dadas por un par de la forma $(0; y_p)$, es decir, la abscisa de este punto es siempre cero. En este caso y_p no recibe ningún nombre especial.

10.2.2 Monotonía y simetría.

• Una función f en un intervalo I de su dominio se llama monótona creciente (monótona decreciente) si para todo $x_1, x_2 \in I$ se cumple:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$$

! Cuando se cumple para todo $x_1, x_2 \in I$ que

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)),$$

se dice que f es estrictamente creciente (decreciente).

• Una función f se llama par (impar) cuando con $x \in \text{Dom} f$ siempre se cumple que $-x \in \text{Dom} f$ y además que

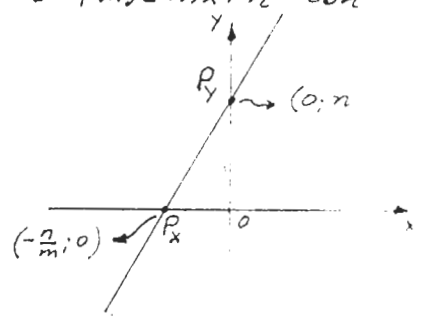
$$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x))$$

! El gráfico de una función par es simétrico con respecto al eje "y" (simetría axial) y el gráfico de una función impar es simétrico con respecto al origen de coordenadas (simetría central).

10.3. Funciones elementales.-

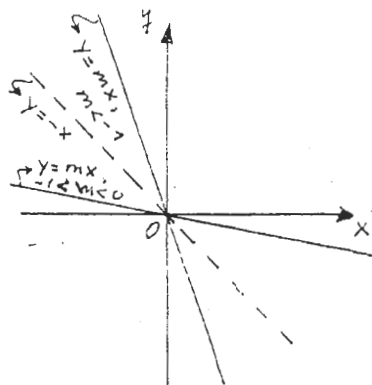
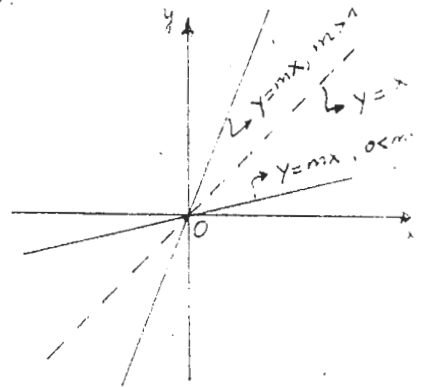
10.3.1. Funciones lineales.-

- Las funciones con una ecuación de la forma $f(x) = mx + n$ con $m, n \in \mathbb{R}$ se llaman funciones lineales.
- El gráfico de una función lineal es una recta que está determinada unívocamente por dos pares ordenados que pertenecen a la función.
- Ver otros aspectos sobre la representación de rectas en el plano en la segunda parte de este resumen.
- El dominio de una función lineal es $\mathbb{R}$.
- La imagen de una función lineal es $\mathbb{R}$.
- Una función lineal $f(x) = mx + n$ tiene como suma un cero: $x = -\frac{n}{m}$.
- Si $m > 0$, entonces f es estrictamente creciente en todo su dominio, y si $m < 0$, f es estrictamente decreciente en todo su dominio.
- Una función lineal m es ni par ni impar.
- Si una función lineal tiene la forma $f(x) = n$ para todo $x \in \mathbb{R}$ es decir, si $m = 0$, su gráfico es una paralela al eje "x". Una función de este tipo recibe el nombre de función constante. Por el contrario una paralela al eje "y" no representa una función, tales rectas tienen ecuación $x = a$, $a \in \mathbb{R}$.



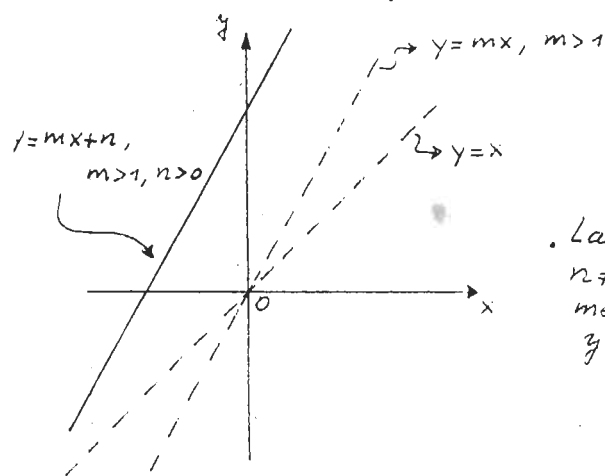
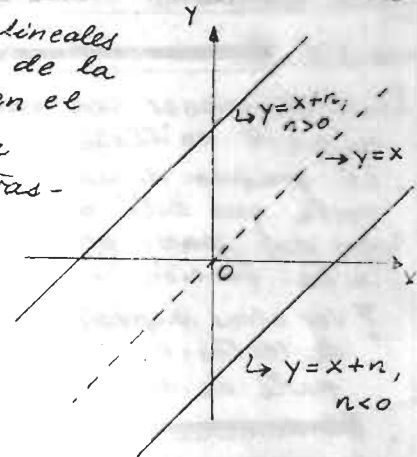
10.3.1.1. Casos particulares.-

- Las funciones lineales del tipo $f(x) = mx$, $m \in \mathbb{R}$ (es decir, cuando $n = 0$) tienen un uso frecuente en la Matemática y en la Física, siempre representan relaciones proporcionales.
- Si $m = 1$, entonces la recta $y = x$ es la bisectriz de los cuadrantes I y III.
- Si $m > 1$, entonces la recta $y = mx$ se obtiene de la recta $y = x$ mediante una "dilatación" (se aleja del eje "x").
- Si $0 < m < 1$, entonces la recta $y = mx$ se obtiene de la recta $y = x$ mediante una "contracción" (se acerca al eje "x").



- Si $m = -1$, entonces la recta $y = -x$ es la bisectriz de los cuadrantes II y IV.
- Si $m < -1$, entonces la recta $y = mx$ se obtiene de la recta $y = -x$ mediante una "dilatación".
- Si $-1 < m < 0$, entonces la recta $y = mx$ se obtiene de la recta $y = -x$ mediante una "contracción".

Las rectas que representan funciones lineales del tipo $f(x) = x + n$, $n \neq 0$ se obtienen de la recta $y = x$ mediante una traslación en el eje "y". Si n es positivo, se traslada hacia arriba y si n es negativo, se traslada hacia abajo.

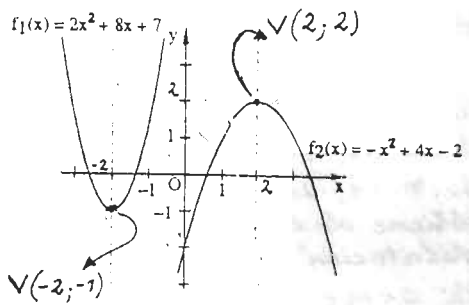


Las rectas $y = mx + n$ con $m \neq 1$, $m \neq -1$, $n \neq 0$ se obtienen de la recta $y = x$ mediante una dilatación (contracción) y una traslación en el eje "y".

10.3.2. Funciones cuadráticas.-

Las funciones con una ecuación de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ se llaman funciones cuadráticas.

El gráfico de una función cuadrática es una parábola. El eje de simetría de la parábola es una recta paralela al eje "y" que viene dada por la ecuación $x = -\frac{b}{2a}$ y corta a la parábola en un punto V llamado vértice que viene dado por el par $V\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.



Al número real $D = b^2 - 4ac$ se le llama discriminante de la función cuadrática.

El vértice puede ser representado mediante el discriminante también por $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$.

Para $a > 0$, la parábola abre hacia arriba, para $a < 0$ la parábola abre hacia abajo.

Una función cuadrática puede tener un cero, dos o ninguno y esto está determinado por el valor del discriminante D :

Si $D > 0$, la función tiene dos ceros,

Si $D = 0$, la función tiene un cero

Si $D < 0$, la función no tiene ceros.

Los ceros vienen dados por las expresiones:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

El dominio de una función cuadrática es el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, pero

La imagen de una función cuadrática es el conjunto:

$$Imf = \left\{ y \in \mathbb{R} : y \geq -\frac{D}{4a} \right\} \text{ si } a > 0$$

$$\text{o } Imf = \left\{ y \in \mathbb{R} : y \leq -\frac{D}{4a} \right\} \text{ si } a < 0$$

Nota que $-\frac{D}{4a}$ es la ordenada del vértice de la parábola.

Para las funciones f_1 y f_2 representadas en la figura anterior se cumple:

$$Imf_2 = \left\{ y \in \mathbb{R} : y \leq 2 \right\} ; Imf_1 = \left\{ y \in \mathbb{R} : y \geq -1 \right\}$$

Para analizar la monotonía de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ hay que hacerlo examinando los intervalos de cada rama de la parábola diferenciando dos casos:

1. caso: Si $a > 0$, f es

- estrictamente monótona decreciente para $x \in \mathbb{R}, x \leq -\frac{b}{2a}$
- estrictamente monótona creciente para $x \in \mathbb{R}, x \geq -\frac{b}{2a}$

2. caso: Si $a < 0$, f es

- estrictamente monótona creciente para $x \in \mathbb{R}, x \leq -\frac{b}{2a}$
- estrictamente monótona decreciente para $x \in \mathbb{R}, x \geq -\frac{b}{2a}$

Nota que el valor de referencia para los intervalos de monotonía es la abscisa del vértice de la parábola.

10.3.2.1 Casos particulares.

De interés especial son las funciones cuadráticas para las cuales $a=1$, es decir, las del tipo $f(x) = x^2 + bx + c$ o mediante un cambio

de denominación: $f(x) = x^2 + px + q$.

Diferenciamos algunos casos:

1. Caso: $p=0, q=0$

En este caso tenemos una función cuadrática de la forma $f(x) = x^2$. Al gráfico de esta función le llamamos parábola normal y su vértice es el origen de coordenadas $(0,0)$

La función $f(x) = x^2$ tiene solamente un cero: $x_0 = 0$.

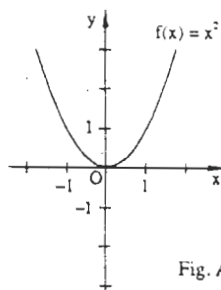


Fig. A 12

2. Caso: $p=0, q \neq 0$

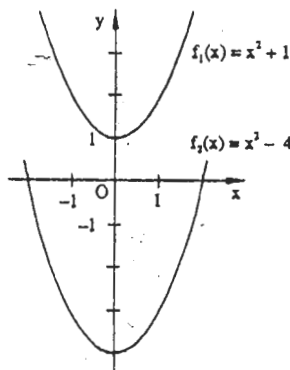
En este caso tenemos una función cuadrática de la forma $f(x) = x^2 + q, q \in \mathbb{R}^*$. El gráfico de esta función se obtiene de la parábola normal trasladándola $|q|$ unidades en el eje "y" (si q es positivo hacia arriba y si q es negativo hacia abajo).

El vértice es el punto $V(0, q)$

Si $q > 0$, no existen puntos de intersección con el eje "x" y por tanto la función no tiene ceros.

Si $q < 0$, la función tiene dos ceros:

$$x_1 = \sqrt{-q} \quad \text{y} \quad x_2 = -\sqrt{-q}$$



3. Caso: $p \neq 0, q = 0$

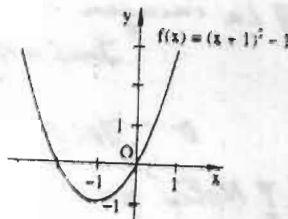
En este caso tenemos una función cuadrática de la forma $f(x) = x^2 + px$. Para poder hacer una comparación con los casos anteriores es necesario hacer un completamiento cuadrático para obtener la forma

$$f(x) = (x-d)^2 + e.$$

Por ejemplo:

Si $f(x) = x^2 + 2x$ procedemos así:

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x+1)^2 - 1$$



- El gráfico de la función $f(x) = (x-d)^2 + e$ se obtiene de la parábola normal trasladándola $|d|$ unidades en el eje "x" (si d es negativo hacia la izquierda y si d es positivo hacia la derecha) y trasladándola también $|e|$ unidades en el eje "y" (si e es positivo hacia arriba y si e es negativo hacia abajo).
- El vértice es el punto $V(d, e)$

4. Caso: $p \neq 0, q \neq 0$

- En este caso tenemos una función cuadrática de la forma $f(x) = x^2 + px + q$. Si el trinomio es un trinomio cuadrado perfecto, entonces tendrá la forma $(x-d)^2$, si no es un trinomio cuadrado perfecto, realizamos un completamiento cuadrático para obtener la forma $(x-d)^2 + e$ como en el 3. caso.

10.3.3. Funciones potenciales.

Las funciones con una ecuación de la forma $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{Q}$ se llaman funciones potenciales.

Para el exponente o grado n de las funciones potenciales diferenciamos los siguientes casos:

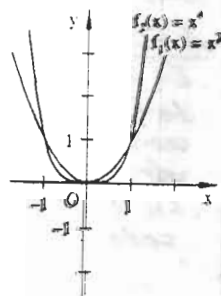
1. caso: $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

a). Para n par: los gráficos son parábolas con vértice en el origen de coordenadas, son simétricas con respecto al eje "y", es decir, en este caso se trata de funciones pares.

- El dominio es el conjunto $\mathbb{R}$ y la imagen es el conjunto $\mathbb{R}_+$ de los números reales no negativos.

- Tienen un cero: $x_0 = 0$.

- Son monótonas estrictamente decrecientes en el intervalo $(-\infty; 0]$ y estrictamente crecientes en el intervalo $[0; +\infty)$.

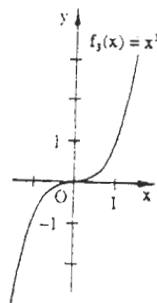


b). Para n impar: los gráficos son parábolas con vértice en el origen de coordenadas, son simétricas con respecto al origen de coordenadas, es decir, en este caso se trata de funciones impares.

- El dominio es el conjunto $\mathbb{R}$ y la imagen es el conjunto $\mathbb{R}$ también.

- Tienen un cero: $x_0 = 0$.

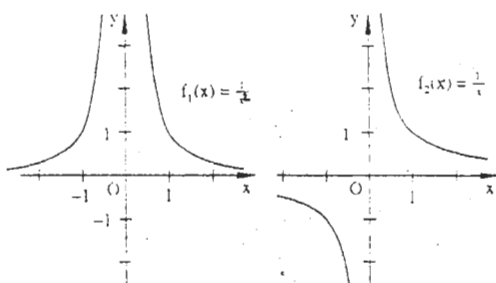
- Son monótonas estrictamente crecientes en todo su dominio.



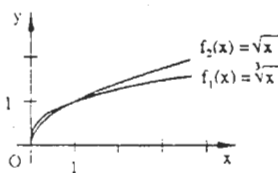
2. caso: $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \leq -1$

-29-

- Los gráficos son hipérbolas.
- El dominio es el conjunto $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$.
- No tienen ceros.
- Si n es par la imagen es $\mathbb{R}_+$ y si n es impar la imagen es $\mathbb{R}^*$.



3. caso: $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ o $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ (Funciones radicales)



- Los gráficos de estas funciones son una rama de una parábola.
- El dominio es el conjunto $\mathbb{R}_+$ de los números reales no negativos.
- La imagen es el conjunto $\mathbb{R}_+$.
- Tienen un cero: $x_0 = 0$.
- Son monótonas crecientes en todo su dominio.

- Las funciones radicales del tipo $f(x) = C \cdot \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $C \in \mathbb{R}$, $C > 0$ cumplen las mismas propiedades que las funciones del tipo $f(x) = \sqrt[n]{x}$, solamente existe una diferencia en sus gráficos. El gráfico de $f(x) = C \cdot \sqrt[n]{x}$ se obtiene del gráfico de $f(x) = \sqrt[n]{x}$ mediante una "dilatación" si $C > 1$ o mediante una "contracción" si $0 < C < 1$.
- Si $C < 0$, el gráfico se obtiene reflejando en el eje "x" el gráfico de $f(x) = |C| \cdot \sqrt[n]{x}$, en estos casos cambia la imagen y la monotonía.

10.3.4. Funciones exponenciales.-

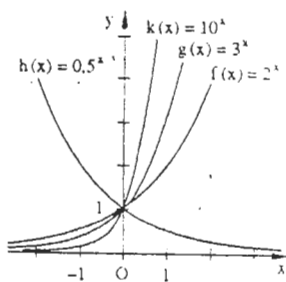
- Las funciones con una ecuación de la forma $f(x) = ca^x$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$, $c \in \mathbb{R}^*$ se llaman funciones exponenciales.

1. caso: $f(x) = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$). En este caso $c = 1$.

- Los gráficos se encuentran por encima del eje "x" en I y II cuadrantes y se acercan "asintóticamente" al eje "x" (se dice que el eje "x" es una asíntota).

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$, $\text{Im } f = \mathbb{R}_+$

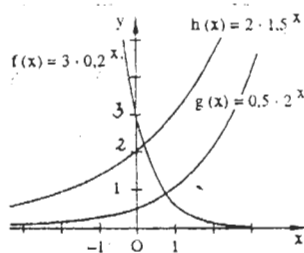
- No tienen ceros.
- Un punto característico de sus gráficos es el punto de intersección con el eje "y", el punto $(0; 1)$.
- Si $a > 1$, las funciones son estrictamente monótonas crecientes y si $0 < a < 1$, las funciones son estrictamente monótonas decrecientes.



2. caso: $f(x) = C \cdot a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $C > 0$, $C \neq 1$)

- Las funciones de este tipo cumplen las mismas propiedades que las funciones del tipo $f(x) = a^x$ con excepción del punto de intersección con el eje "y", en estos casos es el punto $(0; C)$.

- Si $C < 0$, el gráfico se obtiene reflejando en el eje "x" el gráfico de $f(x) = |C| \cdot a^x$. En estos casos cambia la imagen y la monotonía.



10.3.5. Funciones logarítmicas.

Las funciones con una ecuación de la forma $f(x) = c \cdot \log_a x$ con $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ se llaman funciones logarítmicas.

1 caso: $f(x) = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$). En este

caso $c = 1$.

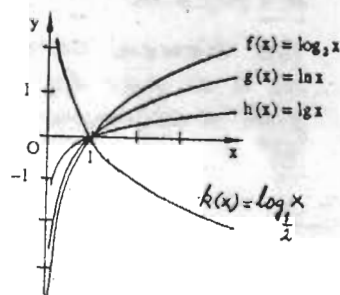
Los gráficos se encuentran a la derecha del eje "y" en I y IV cuadrantes y se acercan "asintóticamente" al eje "y" (se dice que el eje "y" es una asíntota).

Dom $f = \mathbb{R}_+^*$ (conjunto de los reales positivos)

Im $f = \mathbb{R}$

Tienen un cero: $x_0 = 1$. Cortan al eje "x" en $(1, 0)$.

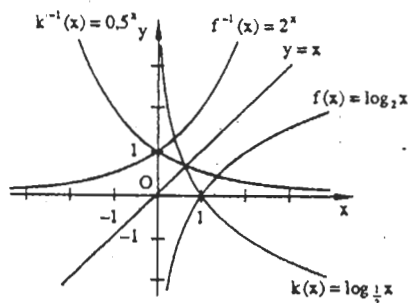
Si $a > 1$, las funciones son estrictamente monótonas crecientes y si $0 < a < 1$, las funciones son estrictamente monótonas decrecientes.



2. caso: $f(x) = c \cdot \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $c > 0$, $c \neq 1$)

Las funciones de este tipo cumplen las mismas propiedades que las del tipo $f(x) = \log_a x$ con excepción del punto de intersección con el eje "x", en estos casos es el punto $(c, 0)$ y por tanto el cero de la función es $x_0 = c$.

Si $c < 0$, el gráfico se obtiene reflejando en el eje "x" el gráfico de $f(x) = |c| \cdot \log_a x$.



El gráfico de una función $f(x) = \log_a x$ se obtiene "reflejando" el gráfico de $f(x) = a^x$ en la recta $y = x$ (bisectriz de los cuadrantes I y III). La función $f(x) = a^x$ es la "inversa" de la función $f(x) = \log_a x$.

10.3.6. Funciones racionales.

Las funciones con una ecuación de la forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

se llaman funciones racionales.

El dominio de una función racional es el conjunto de los números reales x para los cuales se cumple que $Q(x) \neq 0$.

Los ceros de una función racional $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ son los números reales x_0 con $x_0 \in \text{Dom } f$ para los cuales se cumple $P(x_0) = 0$.

Ten en cuenta siempre, que para afirmar que un número real es el cero de una función racional, no basta que haga cero la expresión del numerador, es necesario además, que pertenezca al dominio de la función.

Los polos de una función racional son los números reales x_p que hacen cero el denominador de la expresión simplificada $\frac{P(x)}{Q(x)}$, es decir, para los que $Q(x_p) = 0$. -31-

Ten en cuenta que para determinar los polos de una función racional primeramente tienes que simplificar en el caso de que sea posible y después resolver la ecuación que resulta de igualar a cero el denominador.

Ejemplo: Sea la función $f(x) = \frac{x^5 - 9x^3}{x^3 - 7x - 6}$ Ver!!

a) Hallemos su dominio: determinemos los valores que hacen cero el denominador pues estos son los valores reales que no pueden estar en el dominio.

$$x^3 - 7x - 6 = 0$$

$$(x-3)(x^2+3x+2)=0 \quad (\text{aplicando Ruffini})$$

$$(x-3)(x+1)(x+2)=0$$

$$x=3 \text{ ó } x=-1 \text{ ó } x=-2$$

Luego el dominio es: $\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -2, x \neq -1, x \neq 3\}$

$$\text{ó } \text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 3\}$$

b) Hallemos los ceros de f : determinemos los valores que hacen cero el numerador y que cumplan además que estén en el dominio.

$$x^5 - 9x^3 = 0$$

$$x^3(x^2 - 9) = 0$$

$$x^3(x+3)(x-3) = 0$$

$$x=0 \text{ ó } x=-3 \text{ ó } x=3$$

Pero $3 \notin \text{Dom } f$. Luego los ceros de f son $x=0$ y $x=-3$.

c) Hallemos los polos de f : analicemos si es posible simplificar, si es así, simplifiquemos e igualamos el denominador de la expresión simplificada a cero.

$$\frac{x^5 - 9x^3}{x^3 - 7x - 6} = \frac{x^3(x+3)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x+1)(x+2)} = \frac{x^3(x+3)}{(x+1)(x+2)}$$

$$(x+1)(x+2) = 0$$

$$x=-1 \text{ ó } x=-2$$

Luego los polos de la función f son $x=-1$ y $x=-2$.

Límite de una función racional en un punto: el cálculo del límite de una función racional se reduce a la evaluación de la función en el valor en cuestión, es decir

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} \quad \text{para } Q(x_0) \neq 0.$$

Si $Q(x_0) = 0$, entonces la función se indefiniría para x_0 y en este caso no es posible evaluar directamente en la función. Para nosotros sólo son de interés aquellos casos en los que la indefinición se elimina al descomponer en factores el numerador y el denominador y simplificando el factor que se hace cero al evaluar para x_0 .

Ejemplo: Calcular $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^5 - 9x^3}{x^3 - 7x - 6}$

En este caso la función se indifine para $x=3$ pues se hace cero el denominador, entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^5 - 9x^3}{x^3 - 7x - 6} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3(x^2 - 9)}{(x-3)(x^2 + 3x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3(x+3)(\cancel{x-3})}{(\cancel{x-3})(x+1)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3(x+3)}{(x+1)(x+2)} = \frac{3^3(3+3)}{(3+1)(3+2)} \\ &= \frac{162}{20} \\ &= \frac{81}{10} \\ &= 8,1 \end{aligned}$$

Observación:

En la práctica tenemos que trabajar con funciones que son el resultado de componer varias funciones elementales. Si queremos, por ejemplo, determinar el dominio de las funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2}$ y b) $g(x) = \log_{x-2}(x+1)$

hay que buscar para qué valores reales se cumple:

a) $x^2 - 2 > 0$ y b) $x+1 > 0$ y $x-2 > 0$ y $x-2 \neq 1$

Las funciones trigonométricas las trataremos en el epígrafe 11 de este resumen.

11. Trigonometría.-

11.1. Ángulos positivos y ángulos negativos.-

Un círculo de radio $r=1$ lo nombramos círculo unidad.

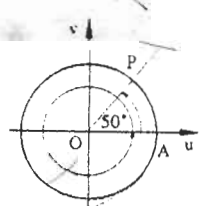
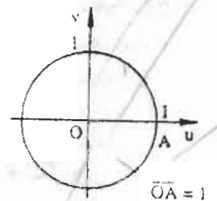
Si consideramos un círculo unidad con centro en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares, cualquier ángulo α se obtiene mediante una rotación alrededor del origen O de un radio OA .

Si la dirección de la rotación es en el sentido contrario de las manecillas del reloj, la medida del ángulo tiene signo positivo y si la dirección es en el sentido de las manecillas del reloj, la medida del ángulo tiene signo negativo.

La figura muestra cómo se obtiene el ángulo $\angle AOP = 50^\circ$ mediante la rotación del radio OA . La misma posición del radio OP se obtiene también al realizar rotaciones de:

$$410^\circ = 50^\circ + 1.360^\circ; 770^\circ = 50^\circ + 2.360^\circ; 1130^\circ = 50^\circ + 3.360^\circ; \dots$$

$$-310^\circ = 50^\circ - 1.360^\circ; -670^\circ = 50^\circ - 2.360^\circ; -1030^\circ = 50^\circ - 3.360^\circ; \dots$$



11.2. Sistemas de medidas de los ángulos.-

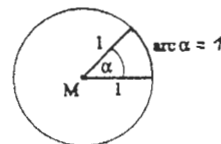
Los sistemas más usados para medir ángulos son:

- Sistema sexagesimal: la unidad de medida es 1° .
- Sistema circular: la unidad de medida es 1 radian.

- 1 radian es la medida de un ángulo central en un círculo unidad para el cual se cumple que la longitud del arco correspondiente es igual a la unidad.
- La relación entre grado y radian viene dada por:

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,29578^\circ$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad.}$$



- La siguiente tabla muestra los valores más usados en grados y en radianes:

0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

- Utilizando el sistema circular, es decir, dando la medida de los ángulos en radianes, estamos considerando números reales.

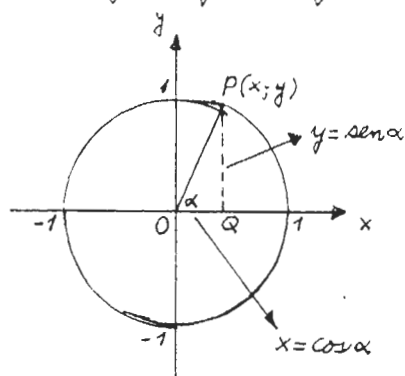
11.3. Razones trigonométricas: seno, coseno, tangente y cotangente.

- La ordenada "y" del punto $P(x; y)$ que le corresponde al ángulo α en el círculo unidad se llama seno del ángulo α .

$$\text{sen } \alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = \frac{y}{1} = y$$

- La abscisa "x" del punto $P(x; y)$ que le corresponde al ángulo α en el círculo unidad se llama coseno del ángulo α .

$$\text{cos } \alpha = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{x}{1} = x$$



- Sea α un ángulo con $\alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$). El cociente del seno y el coseno de α se llama tangente del ángulo α .

$$\tan \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{y}{x}$$

! Para $\alpha = 90^\circ + k \cdot 180^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$) no está definida la tangente.

- Sea α un ángulo con $\alpha \neq 0^\circ + k \cdot 180^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$). El cociente del coseno y el seno de α se llama cotangente del ángulo α .

$$\cot \alpha = \frac{\text{cos } \alpha}{\text{sen } \alpha} = \frac{x}{y}$$

11.3.1. Signos de las razones trigonométricas.

Razón	Cuadrantes			
	I	II	III	IV
	$0 < \alpha < \pi/2$ $0^\circ < \alpha < 90^\circ$	$\pi/2 < \alpha < \pi$ $90^\circ < \alpha < 180^\circ$	$\pi < \alpha < 3\pi/2$ $180^\circ < \alpha < 270^\circ$	$3\pi/2 < \alpha < 2\pi$ $270^\circ < \alpha < 360^\circ$
seno	+	+	-	-
coseno	+	-	-	+
tangente	+	-	+	-
cotangente	+	-	+	-

2 π . 0

SEN = SEN +
COS = COS +
TAN = TAN +
COT = COT +
SEN = SEN +
COS = COS -
TAN = TAN -
COT = COT -

$\pi/2$

$$\frac{\text{SEN}}{\text{COS}} = \tan$$

$$\frac{\text{COS}}{\text{SEN}} = \cot$$

11.3.2. Valores de las razones trigonométricas de los ángulos notables y de los ángulos axiales. -34-

a). Ángulos notables. -

x	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
Razón	30°	45°	60°
sen	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
cos	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
tan	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$
cot	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$

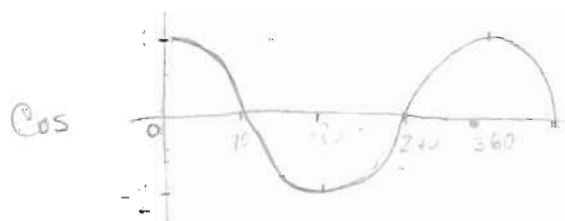
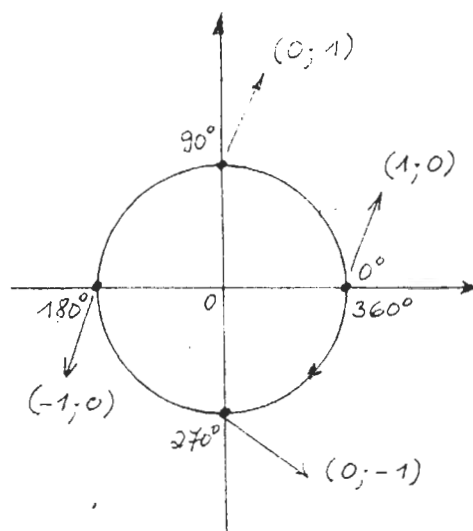
! Mediante un "recurso" utilizado frecuentemente en la escuela debes saber construir tú mismo esta tabla aunque debes tratar de memorizar estos valores ya que son utilizados en un número considerable de ejercicios.

b). Ángulos axiales. -

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
Razón	0°	90°	180°	270°	360°
sen	0	1	0	-1	0
cos	1	0	-1	0	1
tan	0	$-$	0	$-$	0
cot	$-$	0	$-$	0	$-$

! Un recurso para fijar estos valores te lo proponemos en la figura de la derecha considerando el círculo unidad.

Solamente tienes que tener en cuenta que en los pares señalados la abscisa es el valor del coseno y la ordenada es el valor del seno.



11.3.3. Fórmulas de reducción.

Mediante el uso de las llamadas "fórmulas de reducción" podemos determinar el valor de una razón trigonométrica de un ángulo cualquiera β conociendo solamente el valor de la razón trigonométrica en cuestión de un ángulo α del primer cuadrante.

La fórmula de reducción del II cuadrante es $\pi - \alpha$ o $180^\circ - \alpha$.

La fórmula de reducción del III cuadrante es $\pi + \alpha$ o $180^\circ + \alpha$.

La fórmula de reducción del IV cuadrante es $2\pi - \alpha$ o $360^\circ - \alpha$.

El problema se reduce a escribir el ángulo β en cuestión en una de las formas anteriores y a tener en cuenta las relaciones que se dan en la siguiente tabla:

cuadrante	II	III	IV
	$\pi - \alpha$ $180^\circ - \alpha$	$\pi + \alpha$ $180^\circ + \alpha$	$2\pi - \alpha$ $360^\circ - \alpha$
sen	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\sin \alpha$
cos	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$\cos \alpha$
tan	$-\tan \alpha$	$\tan \alpha$	$-\tan \alpha$
cot	$-\cot \alpha$	$\cot \alpha$	$-\cot \alpha$

($\alpha \in I$)

! La tabla debe usarse de la siguiente forma.

Por ejemplo:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cot(2\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

Otras fórmulas de reducción que se utilizan con frecuencia son:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$

Por ejemplo:

Si tenemos la expresión $\sin(90^\circ + \alpha)$, una variante para eliminar la suma del argumento es aplicar la identidad trigonométrica del seno de una suma (ver epígrafe 11.5), pero aplicando una de las fórmulas anteriores el trabajo se simplifica, es decir, podemos plantear directamente:

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$$

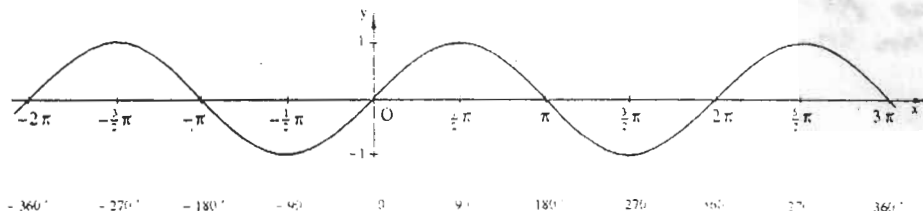
11.4. Funciones Trigonométricas. -

En el epígrafe 10.3. ya hemos visto las funciones elementales, pero a ellas también pertenecen las funciones Trigonométricas: función seno, función coseno, función tangente y función cotangente.

11.4.1. Función seno. -

a) La función seno con ecuación $y = \sin x, x \in \mathbb{R}$

- Gráfico (en el intervalo $-2\pi \leq x \leq 3\pi$)



- Dominio: $\mathbb{R}$
- Imagen: $\{y \in \mathbb{R} : -1 \leq y \leq 1\}$ o $[-1; 1]$
- Ceros: $k\pi; k \in \mathbb{Z}$
- Período: 2π , porque para cualquier número real x se obtiene la misma imagen si a x le adicionamos un múltiplo entero de 2π , es decir,

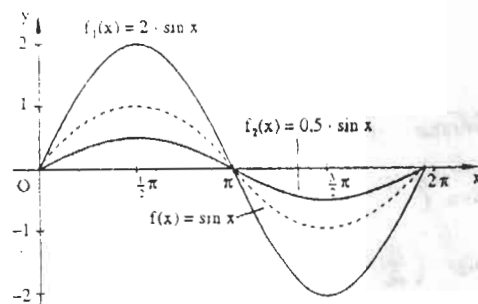
$$\sin x = \sin (x + k \cdot 2\pi) \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

- La función $f(x) = \sin x$ es una función impar porque para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple $\sin(-x) = -\sin x$. (el gráfico es simétrico con respecto al origen del sistema de coordenadas).

b) La función seno con ecuación $y = a \cdot \sin x, x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, a > 0$.

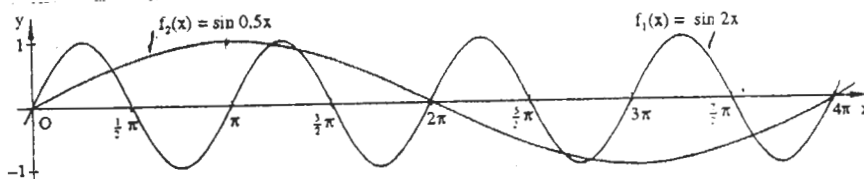
- Gráfica (en el intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$) para $a=2$ y para $a=0,5$:

- ! Cumple las mismas propiedades que la función $f(x) = \sin x$, solamente varía la imagen. Mientras que la imagen de $f(x) = \sin x$ es $\text{Im} f = [-1; 1]$, la imagen de $f(x) = a \cdot \sin x$ es $\text{Im} f = [-a; a]$



c) La función seno con ecuación $y = \sin bx, x \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, b > 0$

- Gráfico (en el intervalo $0 \leq x \leq 4\pi$) para $b=2$ y para $b=0,5$:

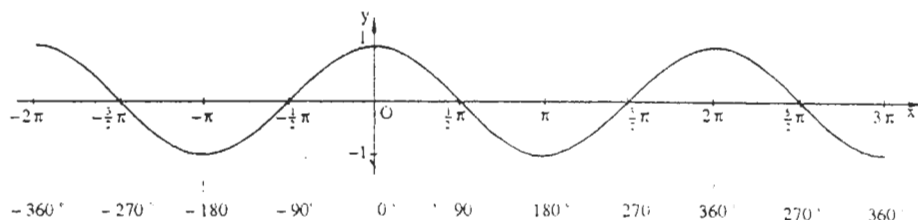


! Cuando comparamos este tipo de función seno con la función $f(x) = \sin x$ debemos notar que la imagen no varía, es decir, $\text{Im}f = [-1; 1]$, pero sí hay cambios con respecto al período y a los ceros.
Si $b > 1$, el período se "acorta" y si $0 < b < 1$, el período se "alarga".

11.4.2. Función coseno.-

a). La función coseno con ecuación $y = \cos x, x \in \mathbb{R}$

- Gráfico (en el intervalo $-2\pi \leq x \leq 3\pi$)



- Dominio: $\mathbb{R}$
- Imagen: $\{y \in \mathbb{R} : -1 \leq y \leq 1\}$ o $[-1; 1]$
- ceros: $(2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$
- Período: 2π porque $\cos x = \cos(x + k \cdot 2\pi); k \in \mathbb{Z}$
- Es una función par porque para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple $\cos(-x) = \cos(x)$. El gráfico es simétrico con respecto al eje "y".

b) Las funciones del tipo $y = a \cdot \cos x$, $y = \cos bx$; $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$.

Para este tipo de función se cumple algo similar a lo visto en el epígrafe 11.4.1. b) y c) para las funciones $y = a \cdot \sin x$ y $y = \sin bx$.

11.4.3. Función tangente.-

La función tangente con ecuación $y = \tan x, x \in \mathbb{R}$

- Gráfico (en el intervalo $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$).

- Dominio: $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$
o $\mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$

! Fíjate que del dominio se excluyen los números reales que hacen cero la razón $\cos x$, ya que para estos valores se indefinice la razón $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

- Imagen: $\mathbb{R}$

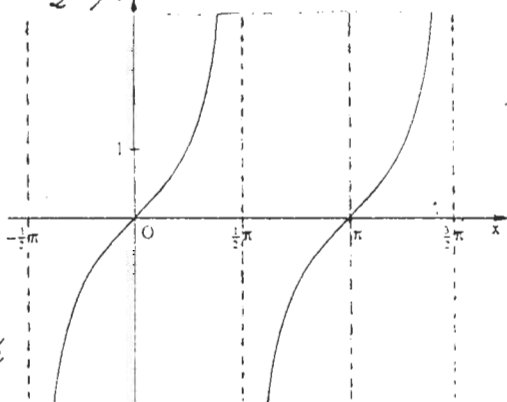
- ceros: $x = k\pi; k \in \mathbb{Z}$

! Fíjate que los ceros de la función tangente son los ceros de la función seno.

- Período: π porque $\tan x = \tan(x + k \cdot \pi); k \in \mathbb{Z}$.

- Es una función impar porque $\tan(-x) = -\tan x$.

- En los intervalos abiertos $\left((2k-1) \cdot \frac{\pi}{2}; (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} \right)$ la función es estrictamente monótona creciente.



11.4.4. Función cotangente.-

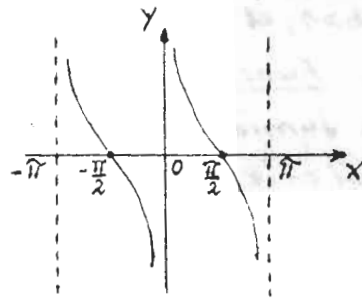
La función cotangente con ecuación

$$y = \cot x, x \in \mathbb{R}.$$

- Gráfico (en el intervalo $-\pi < x < \pi$)

- Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

▼ Fíjate que del dominio se excluyen los números reales que hacen cero la razón $\sin x$, ya que para estos valores se indefiniría la razón trigonométrica $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$.



- Imagen: $\mathbb{R}$

- Ceros: $x = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$

▼ Fíjate que los ceros de la función cotangente son los ceros de la función coseno.

- Período: π porque $\cot x = \cot(x + k\pi); k \in \mathbb{Z}$.

- Es una función impar porque $\cot(-x) = -\cot x$.

- En los intervalos abiertos $((k-1)\pi; k\pi)$ la función es estrictamente monótona decreciente.

* 11.5. Identidades trigonométricas fundamentales.-

a). $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \implies \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

$$\sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

b). $\tan x \cdot \cot x = 1 \implies \tan x = \frac{1}{\cot x}$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}$$

c). $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

d). Identidades del ángulo duplo:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \quad ; \quad \cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x}$$

e) Identidades del ángulo suma y del ángulo diferencia: -39-

$$\cdot \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cdot \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\cdot \tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} ; \cot(x \pm y) = \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot y \pm \cot x}$$

f). Identidades del ángulo triplo:

$$\cdot \sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$\cdot \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

g) Identidades del ángulo mitad:

$$\cdot \sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} ; \tan \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

$$\cdot \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} ; \cot \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$$

▼ Ver ejemplos 1 y 2, LT págs. 68-69.

Observación: Al demostrar una identidad trigonométrica, y en general, una identidad (igualdad) cualquiera, debes siempre partir de un miembro y llegar al otro, o si esto resulta difícil, debes desarrollar o transformar un miembro hasta una determinada expresión y entonces considerar por otro lado el otro miembro y transformarlo en la expresión a la que llegaste con el otro miembro. Con frecuencia los estudiantes parten de la igualdad que quieren demostrar y "manteniendo" la igualdad desarrollan los dos miembros al mismo tiempo llegando a una igualdad trivial, pero este método no es correcto, o mejor dicho, no es un método para demostrar que se cumple una determinada igualdad. ¡Debes proceder de una de las dos formas expresadas anteriormente!

11.6. Ecuaciones Trigonómicas, -

• Toda ecuación en la que la incógnita está contenida en el argumento de al menos una razón trigonométrica se llama ecuación trigonométrica.

• Para resolver una ecuación trigonométrica debes tener en cuenta los siguientes pasos:

1). Expresar todas las razones trigonométricas que aparecen en la ecuación con el mismo argumento aplicando identidades.

2). Expresar todas las razones trigonométricas en términos de una sola razón aplicando identidades.

- 3). Resolver la ecuación haciendo Transformaciones, considerando como incógnita la razón trigonométrica en que quedó expresada la ecuación (factorizando o de cualquier otra forma).
- 4). Determinar los valores de la variable que satisfacen las ecuaciones transformadas.
- 5). Analizar si estos valores no "indefinen" alguna expresión contenida en la ecuación original. Si para alguno de ellos existe una indefinición, entonces ese o esos valores no son soluciones de la ecuación.
- 6). Plantear el conjunto solución.

! Ver ejemplo 3, LT pág. 69-72.

- 3). Resolver la ecuación haciendo Transformaciones, considerando como incógnita la razón trigonométrica en que quedó expresada la ecuación (factorizando o de cualquier otra forma).
- 4). Determinar los valores de la variable que satisfacen las ecuaciones transformadas.
- 5). Analizar si estos valores no "indefinen" alguna expresión contenida en la ecuación original. Si para alguno de ellos existe una indefinición, entonces ese o esos valores no son soluciones de la ecuación.
- 6). Plantear el conjunto solución.

! Ver ejemplo 3, LT pág. 69-72.

- 3). Resolver la ecuación haciendo Transformaciones, considerando como incógnita la razón trigonométrica en que quedó expresada la ecuación (factorizando o de cualquier otra forma).
- 4). Determinar los valores de la variable que satisfacen las ecuaciones transformadas.
- 5). Analizar si estos valores no "indefinen" alguna expresión contenida en la ecuación original. Si para alguno de ellos existe una indefinición, entonces ese o esos valores no son soluciones de la ecuación.
- 6). Plantear el conjunto solución.

! Ver ejemplo 3, LT pág. 69-72.

- 3). Resolver la ecuación haciendo Transformaciones, considerando como incógnita la razón trigonométrica en que quedó expresada la ecuación (factorizando o de cualquier otra forma).
- 4). Determinar los valores de la variable que satisfacen las ecuaciones transformadas.
- 5). Analizar si estos valores no "indefinen" alguna expresión contenida en la ecuación original. Si para alguno de ellos existe una indefinición, entonces ese o esos valores no son soluciones de la ecuación.
- 6). Plantear el conjunto solución.

! Ver ejemplo 3, LT pág. 69-72.

1.1. Postulados de rectas y planos.-

- Toda recta tiene infinitos puntos pero hay infinitos puntos que no pertenecen a ella.
- Por cada punto pasan infinitas rectas.
- Dos puntos distintos cualesquiera determinan una recta y solo una.
- El conjunto de puntos de una recta se puede poner en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números reales, de manera que conserva el orden.
- Una recta define una dirección.
- Dos rectas distintas pueden tener común un solo punto o ninguno.
- Si dos rectas tienen dos puntos comunes son coincidentes.
- Tres puntos distintos no situados en línea recta determinan un plano, al cual pertenecen.
- Por una recta pasan infinitos planos.
- Cada plano tiene infinitos puntos y fuera de él también hay infinitos puntos.
- La recta determinada por dos puntos cualesquiera de un plano, está situada en él.

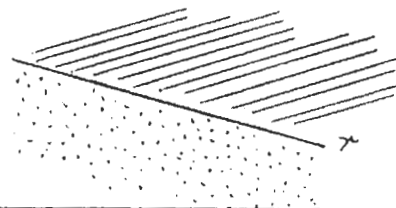
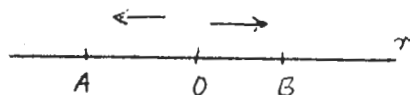
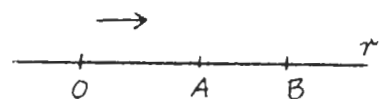
1.2. Semirectas y semiplanos.-

Semirecta: Parte de una recta que tiene un origen en uno de sus puntos y se extiende indefinidamente a un lado de este punto.

Notación: OA , OB , etc.

observación: Cuando en una recta cualquiera r se marca un punto O , esta recta queda dividida en dos semirectas opuestas OA y OB .

Semiplano: Toda recta trazada en un plano lo divide en dos regiones llamadas semiplanos.



1.3. Segmentos.-

Segmento: Parte de una recta limitada por dos de sus puntos.



NOTACIÓN: $\overline{AB}$ ó $\overline{BA}$

• Relaciones: igualdad y desigualdad de segmentos.

Dos segmentos son iguales (o congruentes) cuando superpuestos coinciden sus extremos, cuando esto no sucede son desiguales.

Observaciones:

• Para dos segmentos dados se verifica exactamente una de estas relaciones: son iguales o son desiguales.

• La igualdad de segmentos es una relación:

Reflexiva: $\overline{AB} = \overline{AB}$

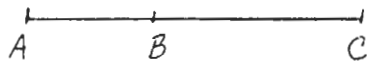
Simétrica: Si $\overline{AB} = \overline{CD}$, entonces $\overline{CD} = \overline{AB}$

y transitiva: Si $\overline{AB} = \overline{CD}$ y $\overline{CD} = \overline{EF}$ entonces $\overline{AB} = \overline{EF}$.

La relación menor que (o mayor que) de segmentos es una relación:

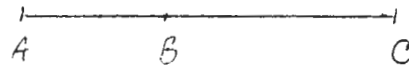
transitiva: Si $\overline{AB} < \overline{CD}$ y $\overline{CD} < \overline{EF}$ entonces $\overline{AB} < \overline{EF}$.
(>) (>) (>)

• Suma de segmentos.-



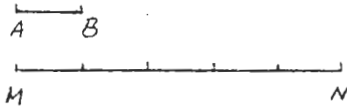
$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

• Diferencia de segmentos.-



$$\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{BC}$$

• Producto de un segmento por un número natural n.-

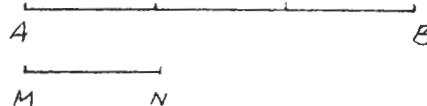


$$\overline{MN} = \overline{AB} + \overline{AB} + \overline{AB} + \overline{AB} + \overline{AB}$$

$$\overline{MN} = 5\overline{AB}$$

($\overline{MN}$ es un múltiplo de $\overline{AB}$)

• Cociente de un segmento por un número natural n (n ≠ 0).-



$$\overline{AB} : 3 = \frac{1}{3} \overline{AB} = \overline{MN}$$

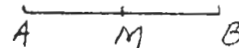
Nota: Las operaciones con segmentos cumplen las mismas propiedades que las operaciones con números.

• Distancia entre dos puntos.-

La menor distancia entre dos puntos de un plano es la longitud (medida) del segmento que los une y se le llama distancia entre los puntos.

• Punto medio de un segmento.-

El punto medio de un segmento es un punto situado en él y que lo divide en dos segmentos iguales.



$$M \in \overline{AB}$$

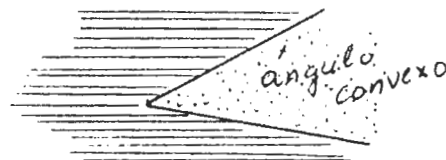
$$\overline{AM} = \overline{MB}$$

2. Ángulos.-

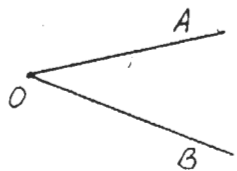
2.1. Definición. Elementos.-

Das semirectas del mismo origen que no sean opuestas ni coincidentes, dividen al plano en dos regiones: ángulo convexo y ángulo cóncavo.

El ángulo convexo es la región que no contiene a las semirectas opuestas de las consideradas, el cóncavo es la otra región.



Nota: También se puede definir un ángulo como la unión o la intersección de dos semiplanos.



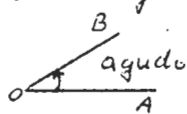
vértice: Punto O

lados: semirectas OA y OB

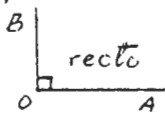
notación: $\angle AOB$

2.2. Clasificación de los ángulos según su amplitud (medida).-

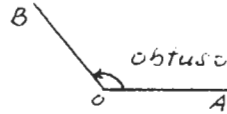
Los ángulos se dividen en convexos, planos, cóncavos o sobrepuestos y completos.



$$\angle AOB < 90^\circ$$

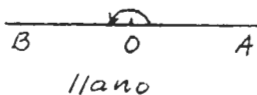


$$\angle AOB = 90^\circ$$



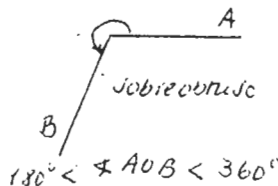
$$90^\circ < \angle AOB < 180^\circ$$

Convexos

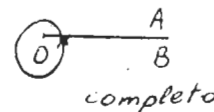


$$\angle AOB = 180^\circ$$

$$= 2R$$



$$180^\circ < \angle AOB < 360^\circ$$

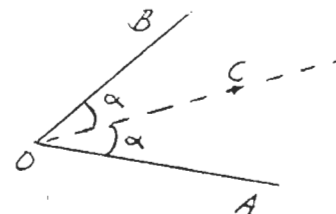


$$\angle AOB = 360^\circ$$

$$= 4R$$

2.3. Bisectriz de un ángulo.-

Es la semirecta cuyo origen es el vértice del ángulo y divide al ángulo en dos partes iguales.



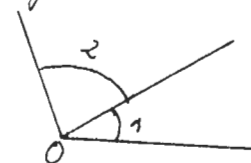
$$OC \text{ bisectriz de } \angle AOB \Leftrightarrow \angle AOC = \angle COB$$

2.4. Relaciones de igualdad y desigualdad de ángulos.-

- Dos ángulos son iguales (o congruentes) cuando superpuestos coinciden sus lados.
- Dos ángulos son desiguales cuando al hacer coincidir sus vértices y dos de sus lados ocurre que no coinciden los otros dos.
- Entre dos ángulos se verifica exactamente una de las relaciones: son iguales o son desiguales.
- La relación de igualdad de ángulos es reflexiva, simétrica y transitiva (Ver estas propiedades para igualdad de segmentos)
- La relación menor que (mayor que) de ángulos es transitiva (ver esta propiedad para segmentos)

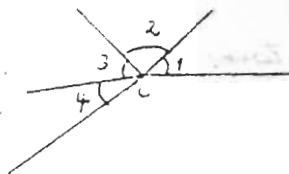
2.5. Ángulos consecutivos.-

Dos ángulos son consecutivos si tienen el vértice y un lado común, no tienen otro punto común.

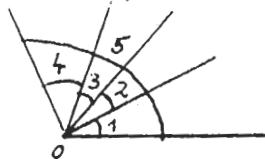


-44-

Nota: Varios ángulos consecutivos cuando uno lo es con el siguiente.



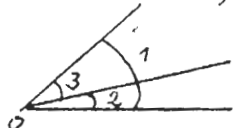
Suma de ángulos consecutivos.



$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = \angle 5$$

Observación: Para sumar varios ángulos no consecutivos es necesario darles esta posición.

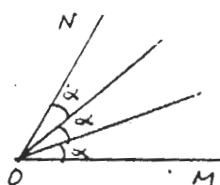
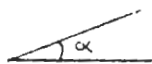
Diferencia de ángulos.



$$\angle 1 - \angle 2 = \angle 3$$

$$\text{pues } \angle 3 + \angle 2 = \angle 1$$

Producto de un ángulo por un número natural n .

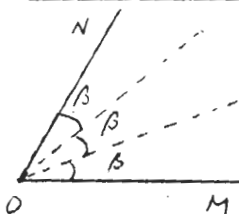


$$3\angle \alpha = \angle MON$$

$$\angle MON = \angle \alpha + \angle \alpha + \angle \alpha$$

($\angle MON$ es un múltiplo de $\angle \alpha$)

Cociente de un ángulo por un número natural n ($n \neq 0$).



$$\angle MON : 3 = \frac{1}{3} \angle MON = \angle \beta$$

$$\text{pues } 3\angle \beta = \angle MON$$

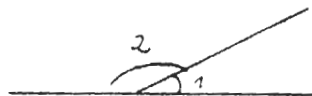
Nota: Las operaciones con ángulos cumplen las propiedades de las operaciones con números.

2.6. Ángulos complementarios: Son los que su suma es un ángulo recto, o sea 90° .

2.7. Ángulos suplementarios: Son los que su suma es dos rectos, o sea 180° .

2.8. Ángulos adyacentes:

Son dos ángulos consecutivos que tengan los lados no comunes en línea recta.



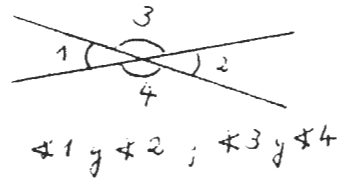
Propiedad: Los ángulos adyacentes son suplementarios.

Recíproco: Si dos ángulos consecutivos son suplementarios entonces esos ángulos son adyacentes.

2.9. Ángulos opuestos por el vértice. -

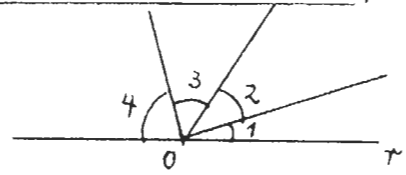
Son los ángulos para los que se cumple que los lados de uno son las prolongaciones respectivas de los lados del otro.

Propiedad: Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.



2.10. Propiedades de los ángulos sobre un lado de una recta. -

Si a un mismo lado de una recta r y por un punto O situada en ella se trazan varias semirectas, entonces la suma de todos los ángulos consecutivos que se forman es igual a dos rectos, o sea 180° .



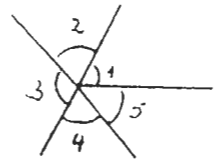
$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 2R = 180^\circ$$

Recíproco: Si varios ángulos consecutivos suman dos rectos, entonces el primero y el último de sus lados están en línea recta.

Observación: Este recíproco se emplea mucho para demostrar que dos semirectas del mismo origen resultan opuestas, es decir, que pertenecen a una misma recta.

2.11. Propiedad de los ángulos alrededor de un punto. -

La suma de todos los ángulos consecutivos formados alrededor de un punto por semirectas que en él concurren es igual a cuatro rectos, o sea 360° .

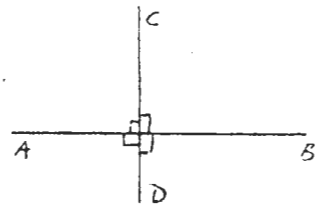


$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 4R = 360^\circ$$

3. Rectas perpendiculares, rectas oblicuas y distancia de un punto a una recta. -

3.1. Perpendiculares. -

Dos rectas son perpendiculares si al cortarse forman cuatro ángulos iguales (rectos).



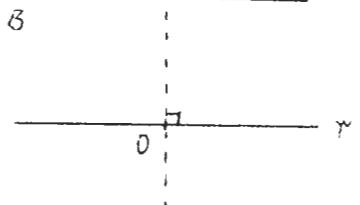
Propiedades:

$$AB \perp CD$$

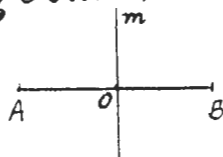
La perpendicularidad de rectas es una relación simétrica:

$$AB \perp CD \Rightarrow CD \perp AB$$

En un plano, por un punto dado en una recta, siempre se le puede trazar una perpendicular a esa recta y sólo una.



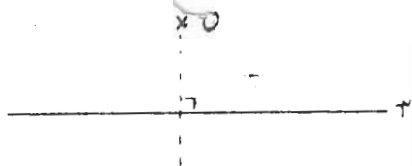
! Observación: La perpendicular a un segmento en su punto medio se llama la MEDIATRIZ de dicho segmento.



$$m \perp AB$$

$$m \text{ mediatriz de } AB \Leftrightarrow m \cap \overline{AB} = \{O\}; O \text{ punto medio de } \overline{AB}.$$

- Por un punto exterior a una recta, pasa una perpendicular a dicha recta y sólo una.



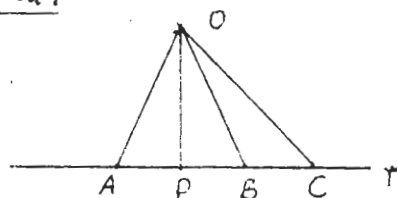
3.2. Rectas oblicuas, -

Las rectas que al cortarse no lo hacen perpendicularmente se llaman oblicuas, una con respecto a la otra.

Observación: El punto en el que una recta perpendicular a oblicua a otra, la corta, se llama pie de la perpendicular o pie de la oblicua.

3.3. Propiedades de la perpendicular y oblicuas trazadas desde un punto exterior a una recta, -

- La perpendicular es menor que las oblicuas.
- Las oblicuas cuyos pies se aparten igualmente del pie de la perpendicular son iguales.
- De dos oblicuas que se aparten desigualmente del pie de la perpendicular es mayor la que más se aparte.



$$\overline{OP} < \overline{OA}, \overline{OP} < \overline{OB}, \overline{OP} < \overline{OC}$$

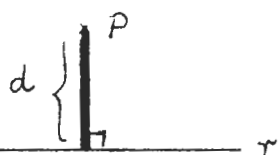
$$\overline{AP} = \overline{PB} \Rightarrow \overline{OA} = \overline{OB}$$

$$\overline{PC} > \overline{PA} \Rightarrow \overline{OC} > \overline{OA}$$

Nota: Aquí sólo se consideran los segmentos de perpendicular y de oblicuas del punto exterior a la recta.

3.4. Distancia de un punto a una recta, -

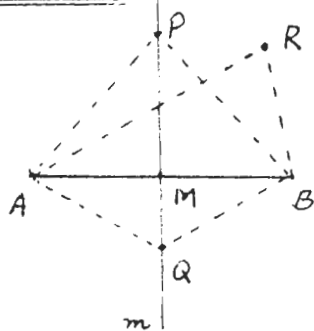
Es la longitud del segmento de perpendicular del punto a la recta.



4. Propiedades de la mediatriz y la bisectriz, -

4.1 Propiedades de la mediatriz:

- Todo punto situado en la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del segmento
- Todo punto situado fuera de la mediatriz de un segmento no equidista de los extremos del segmento.

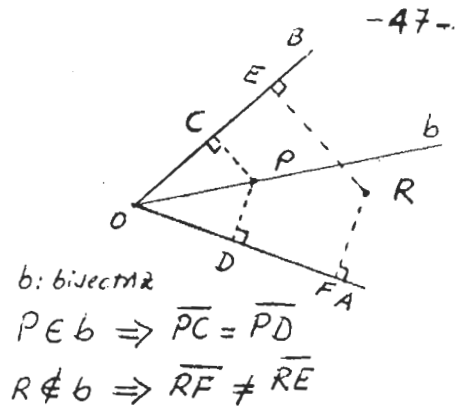


$$P, Q \in m \Rightarrow \begin{cases} \overline{PA} = \overline{PB} \\ \overline{QA} = \overline{QB} \end{cases}$$

$$R \notin m \Rightarrow \overline{RA} \neq \overline{RB}$$

4.2. Propiedades de la bisectriz:-

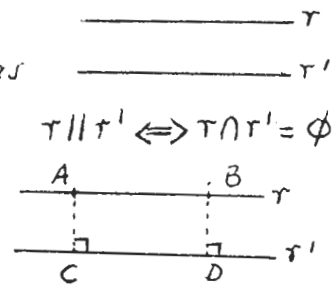
- Todo punto situado en la bisectriz de un ángulo equidista de los lados del ángulo.
- Todo punto fuera de la bisectriz no equidista de los lados del ángulo.



5. Rectas paralelas. Propiedades:-

Dos rectas de un mismo plano son paralelas si no tienen ningún pro. común.

- Si dos rectas son paralelas entonces todos los puntos de una de ellas están a la misma distancia de la otra.



- El paralelismo de rectas es una relación que es:

Reflexiva: $r \parallel r$

Simétrica: $r \parallel r' \Rightarrow r' \parallel r$

transitiva: $\left. \begin{matrix} r \parallel r' \\ r' \parallel r'' \end{matrix} \right\} \Rightarrow r \parallel r''$, para rectas cualesquiera $r, r' \text{ y } r''$.

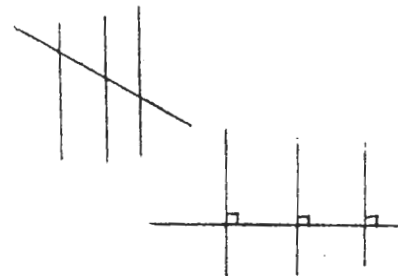
$$\left. \begin{matrix} r \parallel r' \\ A, B \in r \end{matrix} \right\} \Rightarrow \overline{AC} = \overline{BD}$$

- Dos perpendiculares a una misma recta son paralelas entre sí.

$$\left. \begin{matrix} r \perp a \\ r' \perp a \end{matrix} \right\} \Rightarrow r \parallel r'$$



- Por un punto exterior a una recta se puede trazar a ella una paralela y sólo una.
- En un plano, dos paralelas a una misma recta son paralelas entre sí.
- Si una recta corta a otra, corta también a sus paralelas.
- Si una recta es perpendicular a otra, lo es también a sus paralelas.

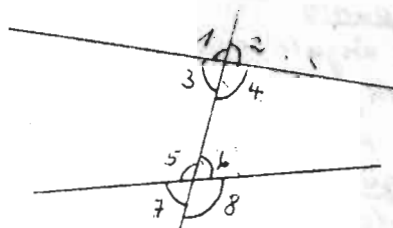


6. Ángulos entre paralelas:-

recta secante: es la recta que corta a otras varias.

6.1. Ángulos que se forman cuando una secante corta a dos rectas cualesquiera.

ángulos alternos $\begin{cases} \angle 1 \text{ y } \angle 8 \\ \angle 2 \text{ y } \angle 7 \\ \angle 3 \text{ y } \angle 6 \\ \angle 4 \text{ y } \angle 5 \end{cases}$



ángulos correspondientes. $\begin{cases} \angle 1 \text{ y } \angle 5 \\ \angle 2 \text{ y } \angle 6 \\ \angle 3 \text{ y } \angle 7 \\ \angle 4 \text{ y } \angle 8 \end{cases}$

ángulos conjugados $\begin{cases} \angle 1 \text{ y } \angle 7 \\ \angle 2 \text{ y } \angle 8 \\ \angle 3 \text{ y } \angle 5 \\ \angle 4 \text{ y } \angle 6 \end{cases}$

6.2. Propiedades de los ángulos entre paralelas.

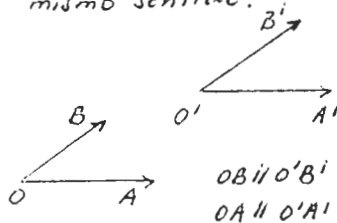
• Cuando una secante corta a dos rectas paralelas se cumple:

- los ángulos correspondientes son iguales,
- los ángulos alternos son iguales,
- los ángulos conjugados son suplementarios (suman 180°)

• Recíproco: Si una secante corta a dos rectas y se forman ángulos correspondientes iguales o alternos iguales o conjugados suplementarios, esas rectas son paralelas.

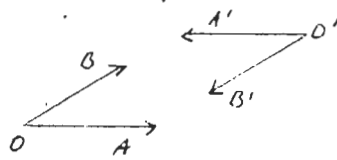
6.3. Propiedades de los ángulos que tienen sus lados paralelos.

• Lados paralelos en el mismo sentido:



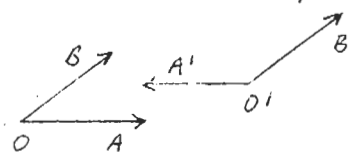
$$\angle AOB = \angle A'O'B'$$

• Lados paralelos en sentido opuesto:



$$\angle AOB = \angle A'O'B'$$

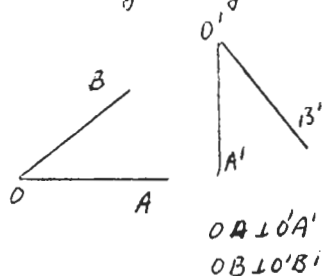
• Dos lados paralelos en el mismo sentido y los otros dos en sentido opuesto:



$$\angle AOB + \angle A'O'B' = 2R = 180^\circ$$

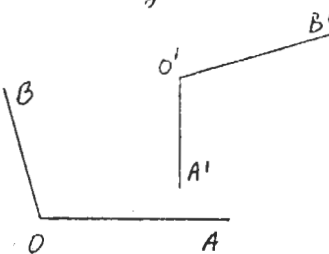
6.4. Propiedades de los ángulos que tienen sus lados perpendiculares.

• Ambos ángulos agudos:



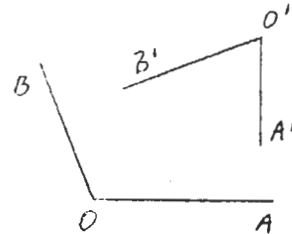
$$\angle AOB = \angle A'O'B'$$

• Ambos ángulos obtusos:



$$\angle AOB = \angle A'O'B'$$

• Un ángulo agudo y el otro obtuso:



$$\angle AOB + \angle A'O'B' = 2R = 180^\circ$$

7. Triángulos.

-49-

7.1 Clasificación según la longitud de sus lados.

a) **EQUILÁTERO:**

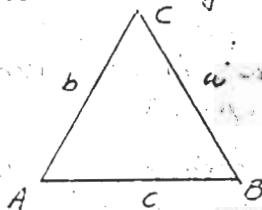
Todos los lados iguales.

b) **ISÓSCELES:**

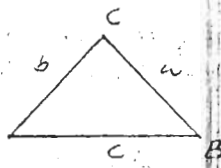
Dos lados iguales.

c) **ESCALENO:**

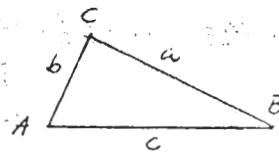
Todos los lados distintos.



$$a = b = c$$



$$a = b$$



$$a \neq b \neq c$$

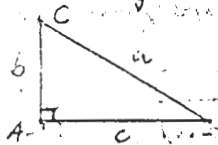
vértice Principal o vertical; C

Observación: Todo triángulo equilátero es isósceles.

7.2 Clasificación según la amplitud de sus ángulos.

a) **RECTÁNGULO:**

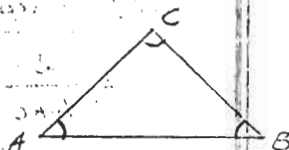
Tiene un ángulo recto. Todos los ángulos son agudos.



catetos: c, b

hipotenusa: a

b) **ACUTÁNGULO:**



c) **OBTUSÁNGULO:**

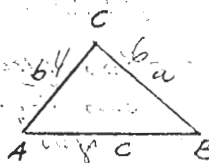
Tiene un ángulo obtuso.



7.3 Desigualdad triangular.

En todo triángulo cada lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

$$a < b + c; b < a + c; c < a + b; a > b - c; b > a - c; c > a - b$$



Observación: Para que se cumpla la desigualdad triangular basta verificar que el lado mayor es menor que la suma de los otros dos.

7.4 Rectas notables.

• **ALTURAS:** Son los segmentos de perpendicular trazados de los vértices a las rectas de los lados opuestos.

Observaciones:

- En muchos casos hay que prolongar el lado opuesto en cuestión para trazar la perpendicular.

- En todo triángulo a mayor lado corresponde menor altura.

-80-

- La altura relativa al lado a está dada por:

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

donde a, b, c son las longitudes de los lados y p es el semiperímetro: $p = \frac{a+b+c}{2}$. Análogamente se hallan h_b y h_c .

• MEDIANAS: Son los segmentos determinados por cada vértice y el punto medio del lado opuesto.

Observación: La longitud de la mediana relativa al lado a está dada por:

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

! En todo triángulo rectángulo la mediana sobre la hipotenusa es la mitad de ésta.

• BISECTRICES: Son los segmentos de bisectrices de los ángulos interiores comprendidos entre cada vértice y el lado opuesto.

Observación: La longitud de la bisectriz correspondiente al vértice A está dada por:

$$b_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)}$$

Análogamente se hallan b_b y b_c .

• MEDIATRICES: Son las mediatrices de cada lado.

NOTAS: - Las alturas, medianas y bisectrices de un triángulo son segmentos mientras que las mediatrices son rectas.

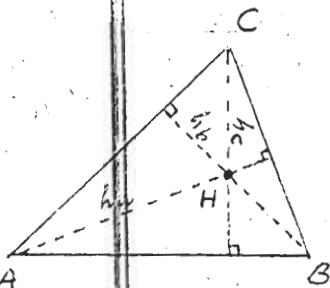
- En un triángulo equilátero coinciden las rectas notables relativas a cada vértice.

- En un triángulo isósceles coinciden las rectas notables relativas al vértice principal.

7.5. Puntos notables.

• ORTOCENTRO: Punto donde se cortan las alturas o sus prolongaciones.

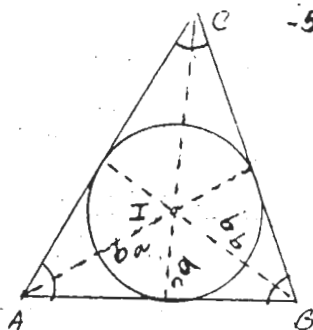
Observación: Cuando el triángulo es acutángulo el ortocentro está en el interior del triángulo, cuando es obtusángulo en el exterior y cuando es rectángulo en el vértice del ángulo recto.



INCENTRO: Punto donde se cortan las bisectrices.

Observación:

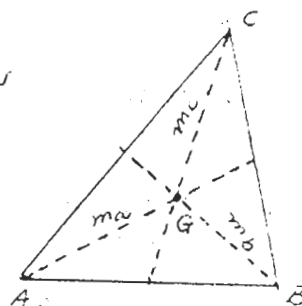
- El incentro siempre está situado en el interior del triángulo.
- El incentro es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.



BARICENTRO (o centro de Gravedad): Punto donde se cortan las medianas.

Observación:

- El baricentro está situado siempre en el interior del triángulo.
- La distancia del baricentro a cada vértice es igual a $\frac{2}{3}$ de la longitud de la mediana correspondiente, por tanto es evidente que se encuentre a $\frac{1}{3}$ del lado opuesto.

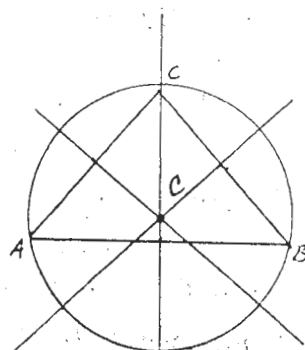


CIRCUNCENTRO:

Punto donde se cortan las mediatrices.

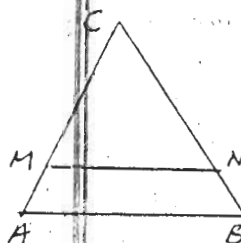
Observaciones:

- Cuando el triángulo es acutángulo el circuncentro está en el interior del triángulo; cuando es obtusángulo en el exterior y cuando es rectángulo en el punto medio de la hipotenusa.
- El circuncentro es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.
- Para determinar la circunferencia circunscrita a un triángulo cualquiera se trazan las mediatrices de dos de sus lados y así queda determinado el centro; el radio es la distancia del centro a uno de los vértices.



7.6. Proporcionalidad de los segmentos determinados en dos lados de un triángulo por una paralela al tercer lado.

Si una paralela a un lado de un triángulo corta a los otros dos, los divide en segmentos proporcionales.



$$\frac{CM}{MA} = \frac{CN}{NB}$$

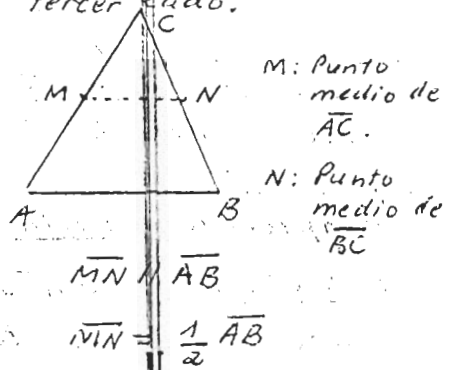
-72-

Recíproco: Si una recta, al cortar a dos lados de un triángulo, los divide en segmentos proporcionales, entonces es paralela al tercer lado.

Caso Particular:

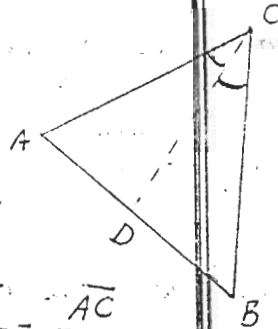
El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo se llama **PARALELA MEDIA** del triángulo.

Propiedad: La paralela media de un triángulo es paralela al tercer lado e igual a su mitad



7.7. Propiedad de la bisectriz de un ángulo interior de un triángulo.

La bisectriz de un ángulo interior de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados.



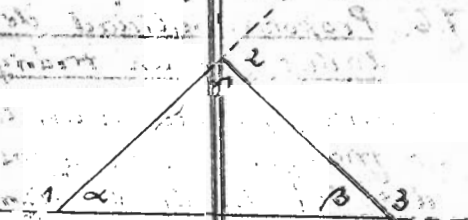
7.8. Propiedades de los ángulos de un triángulo.

La suma de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera es igual a dos rectos, o sea 180° .

Observación: Si dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente iguales, entonces los terceros ángulos también son iguales.

ÁNGULOS EXTERIORES: Son los que se forman en cada vértice por un lado y la prolongación del otro, o bien, los adyacentes de los ángulos interiores de un triángulo.

Un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los interiores no adyacentes a él.



$$\angle 1 = \angle \beta + \angle \gamma$$

$$\angle 2 = \angle \alpha + \angle \beta$$

$$\angle 3 = \angle \alpha + \angle \gamma$$

7.9. Relaciones entre lados y ángulos de un triángulo.-

- En todo triángulo a lados iguales se oponen ángulos iguales y recíprocamente.
- En todo triángulo a mayor lado se opone mayor ángulo y recíprocamente.

Observaciones: - En todo triángulo equilátero todos sus ángulos son iguales y miden 60° .

- Si un triángulo isósceles tiene un ángulo igual a 60° , entonces es equilátero.

7.10. Condiciones necesarias y suficientes para que un triángulo sea isósceles.-

- Si tiene dos lados iguales (definición)
- Si tiene dos ángulos iguales
- Si coinciden dos rectas notables con respecto a un mismo vértice.

7.11. Relaciones en los triángulos rectángulos.-

- Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

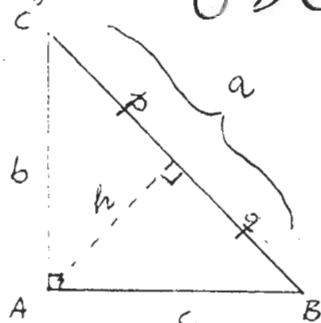
- Teorema de las alturas:

$$h^2 = p \cdot q$$

- Teorema de los catetos:

$$b^2 = a \cdot p$$

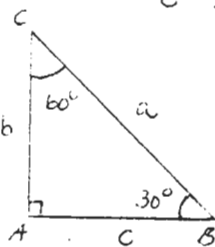
$$c^2 = a \cdot q$$



Observación: Del teorema de los catetos resulta:

$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{p}{q}$$

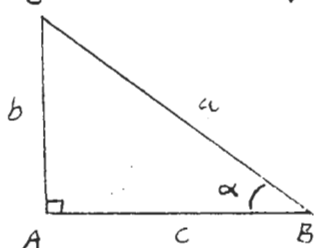
- En todo triángulo rectángulo, el lado que se opone a un ángulo de 30° tiene una longitud igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa.



$$a = 2b$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{1}{2}a$$

- C (Razones trigonométricas)



$$b = a \cdot \text{sen} \alpha \Leftrightarrow \text{sen} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{cat. op.}}{\text{hip.}}$$

$$c = a \cdot \text{cos} \alpha \Leftrightarrow \text{cos} \alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{cat. ady.}}{\text{hip.}}$$

$$b = c \cdot \text{tan} \alpha \Leftrightarrow \text{tan} \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{cat. op.}}{\text{cat. ady.}}$$

$$c = b \cdot \text{cot} \alpha \Leftrightarrow \text{cot} \alpha = \frac{c}{b} = \frac{\text{cat. ady.}}{\text{cat. op.}}$$

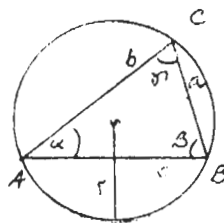
-54-

7.12. Ley de los senos.-

En cualquier triángulo se cumple:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} = 2r,$$

donde r es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.



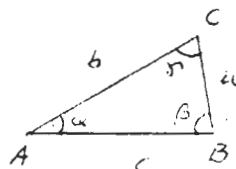
7.13. Ley de los cosenos.-

En cualquier triángulo se cumple:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

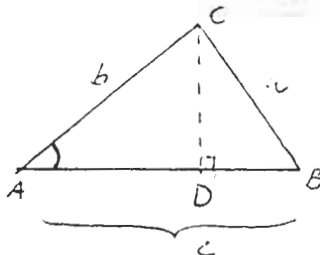
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$



7.14. Cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo.-

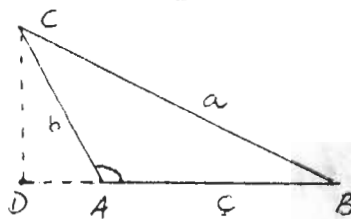
En cualquier triángulo, el cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble del producto de uno de estos dos lados por la proyección del otro sobre él.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot \overline{AD}$$

7.15. Cuadrado del lado opuesto a un ángulo obtuso.-

En un triángulo obtusángulo, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, más el doble del producto de uno de estos dos lados por la proyección del otro sobre él.



$$a^2 = b^2 + c^2 + 2c \cdot \overline{AD}$$

7.16. Igualdad de triángulos.-

• Dos triángulos son iguales si tienen respectivamente iguales:

- un lado y los ángulos adyacentes a ese lado (criterio a.l.a.), o
- dos lados y el ángulo comprendido (criterio l.a.l.), o
- sus tres lados (criterio l.l.l.).