Clase 12. Teoría.

- Reglas de cálculo de derivadas.
- Operaciones aritméticas.
- Derivadas de la función compuesta e inversa.

Bibliografía:

Análisis Matemático. Tomo II. páginas 16-41.

Introducción:

Por definición, una función $f(x)$ es derivable en el punto x_0 si existe el límite del cociente incremental:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

donde $f'(x_0)$ se interpreta geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto x_0.

De aquí que se puede calcular dicha recta tangente a la curva en el punto (x_0, y_0) mediante la fórmula:

$$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0)$$

Ejercicio Premio.

En los puntos de intersección de las elipses:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \qquad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Halar el ángulo entre las rectas tangentes.

Las tres primeras respuestas correctas serán bonificadas.

Desarrollo:

Reglas de cálculo de derivadas:

A continuación demostraremos las reglas que hacen posible la derivación de las funciones que resultan de realizar operaciones aritméticas con dos funciones, conocidas las derivadas de cada una de ellas.

TEOREMA

Supongamos que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son derivables en un punto x_0, entonces, las funciones $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ (el cociente bajo la condición que $g(x_0) \neq 0$) son derivables en x_0 y se cumple:

1. $[f(x) \pm g(x)]'_{x=x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

2. $[f(x) \cdot g(x)]'_{x=x_0} = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

3. $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'_{x=x_0} = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

Las demostraciones se obtienen a partir de las operaciones con los límites.

Observaciones

1) Como caso particular de 2

$$[cf(x)]' = c[f(x)]' + [c]' f(x) = cf'(x)$$

2) Las reglas 1 y 2 pueden extenderse a un número cualquiera finito de funciones. El lector puede efectuar esta extensión y demostrarla utilizando el principio de inducción matemática.

Ejemplo de derivada de algunas funciones elementales:

a) ***Derivada de $y = x^n$.*** Utilizando la fórmula de la derivada del producto y el principio de inducción podemos demostrar que $y' = nx^{n-1}$. En efecto, para $n = 1$ $y = x$ y $\Delta y = \Delta x$, luego, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 1$ y se demuestra que $(x)' = 1 = x^{1-1}$.

Supongamos que es cierto para n y demostremos que se cumple para $n + 1$:

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = x^n \cdot (x)' + (x^n)' \cdot x = x^n + nx^{n-1} \cdot x = x^n(n+1)$$

Queda demostrado para todo $n \in N$.

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

El lector puede demostrar esta regla de derivación también directamente, calculando el límite del cociente incremental.

Combinando la derivada de $y = x^n$ con las derivadas de la suma, el producto y el cociente de funciones podemos calcular la derivada de cualquier polinomio o fracción racional.

Ejemplo

1) Hallemos la derivada de $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 - 1}$

$$y' = \left(\frac{x^2+1}{x^3-1}\right)' = \frac{(x^3-1)(x^2+1)' - (x^2+1)(x^3-1)'}{(x^3-1)^2} =$$

$$= \frac{(x^3-1)(2x) - (x^2+1)(3x^2)}{(x^3-1)^2}$$

$$y' = -\frac{(x^4+3x^2+2x)}{(x^3-1)^2}$$

b) *Derivada de $y = sen\ x$.* Para esta función

$$\Delta y = \text{sen}\,(x + \Delta x) - \text{sen}\, x = \text{sen}\, x \cos \Delta x + \cos x\, \text{sen}\, \Delta x - \text{sen}\, x$$

$$\Delta y = \text{sen}\, x\, (\cos \Delta x - 1) + \text{sen}\, \Delta x \cos x$$

de donde

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{sen}\, x\, \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} + \frac{\text{sen}\, \Delta x}{\Delta x} \cos x$$

Utilizando que cuando $\Delta x \to 0$ $\cos \Delta x - 1 \sim \frac{\Delta x^2}{2}$ y $\text{sen}\, \Delta x \sim \Delta x$ se tiene que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{sen}\, x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} + \cos x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}\, \Delta x}{\Delta x} = \cos x$$

luego,

$$(\text{sen}\, x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x$$

c) *Derivada de $y = cos\ x$.* Se obtiene de forma análoga a la de sen x, es decir,

$$(\cos x)' = -\,\text{sen}\, x$$

d) *Derivada de $y = tg\ x$.* Como $\text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$, podemos aplicar la regla de la derivada de un cociente; entonces, en los puntos donde $\cos x \neq 0$ se tiene

$$(\text{tg}\, x)' = \left(\frac{\text{sen}\, x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\, (\text{sen}\, x)' - \text{sen}\, x\, (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

es decir,

$$(\text{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

e) *Derivada de $y = ctg\, x$.* Análogamente, puede obtenerse la derivada de

$\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$:

$$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\csc^2 x$$

De igual manera se obtienen:

$$(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \sec x \,\tan x$$

$$(\csc x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -\csc x \,\cot x$$

f) *Derivada de la función $y = log_a x$.* Sea $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ fijo. Tomemos el cociente incremental para un Δx suficientemente pequeño

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right) = \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

$$= \frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

Pasando al límite cuando $\Delta x \to 0$ y teniendo en cuenta el límite fundamental algebraico y la continuidad de la función logarítmica

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\log_a \lim_{\Delta x \to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x}\log_a \lim_{t \to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$$

(consideramos $t = \dfrac{\Delta x}{x}$) $\qquad = \dfrac{1}{x}\log_a e$

Se obtiene pues

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e\ , \quad x > 0$$

En particular si $a = e$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

g) *Derivada de la función $y = a^x$.* Sea $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ y $x \in \mathbb{R}$ fijo. Formemos el cociente incremental

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}.$$

Como $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln a$,

entonces,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \ln a$$

es decir,

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

En particular, si $a = e$, entonces $(e^x)' = e^x$.

Ejemplos:

La manera más sencilla de utilizar los Asistentes Computacionales o los Dispositivos móviles es precisamente el cálculo directo de derivadas, así se pueden obtener resultados tan simples como:

1. Sea $f(x) = \frac{1-x^3}{1+x^2}$ Obtener la derivada con respecto a x

> $\frac{(1-x^3)}{1+x^2}$ $\qquad \frac{-x^3+1}{x^2+1}$

$\xrightarrow{\text{differentiate w.r.t. x}} -\frac{3x^2}{x^2+1} - \frac{2(-x^3+1)x}{(x^2+1)^2} \xrightarrow{\text{evaluate at point}}$ $x = 2$ se obtiene $-\frac{32}{25}$

Aproximacion con 5 dígitos decimales $\xrightarrow{\text{at 5 digits}} -1.2800$

1. $y = \frac{\sin x + 1}{\cos x}$

$$\frac{\sin(x) + 1}{\cos(x)}$$

$\xrightarrow{\text{differentiate w.r.t. x}}$

$$1 + \frac{(\sin(x) + 1)\sin(x)}{\cos(x)^2}$$

$\underset{=}{\text{factor}}$

$$\frac{\sin(x)^2+\cos(x)^2+\sin(x)}{\cos(x)^2} = \frac{1+\sin x}{(\cos x)^2}$$

2. $y = \dfrac{1}{\tan x - 2^x}$

$$\frac{1}{\tan(x)-2^x}$$

$\xrightarrow{\text{differentiate w.r.t. x}}$

$$-\frac{1+\tan(x)^2-2^x\ln(2)}{\left(\tan(x)-2^x\right)^2} = -\frac{(\sec x)^2-2^x\ln 2}{\left(\tan x-2^x\right)^2}$$

Derivada de la función compuesta:

Deduciremos la regla para hallar la derivada de la función compuesta $y = f[\varphi(t)]$ en un punto t_0 si se conocen las derivadas de las funciones $x = \varphi(t)$ y $y = f(x)$ en los puntos t_0 y $x_0 = \varphi(t_0)$ respectivamente.

TEOREMA

Sea $x = \varphi(t)$ derivable en un punto t_0 y la función $y = f(x)$ derivable en el punto correspondiente $x_0 = \varphi(t_0)$. Entonces, la función compuesta $y = f[\varphi(t)]$ es derivable en el punto t_0 y, además, su derivada se expresa mediante

$$\{f[\varphi(t)]\}'_{t=t_0} = f'(x_0)\cdot\varphi'(t_0) = f'[\varphi(t_0)]\cdot\varphi'(t_0)$$

Observación

En el enunciado del teorema, al afirmar la derivabilidad de la función compuesta $y = f[\varphi(t)]$ en el punto t_0, se está afirmando, al mismo tiempo, la existencia de dicha función en una vecindad del punto t_0, lo cual se obtiene de la continuidad de las funciones f y φ en los puntos x_0 y t_0 respectivamente.

DEMOSTRACIÓN

Consideremos un incremento Δt arbitrario de la variable t, $\Delta t \neq 0$, entonces, a este incremento corresponde el incremento $\Delta x = \varphi(t_0 + \Delta t) - \varphi(t_0)$ de la función $x = \varphi(t)$ (Δx podría anularse).

Al incremento Δx corresponde el incremento $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ correspondiente a la función $y = f(x)$.

La función $y = f(x)$ es derivable en el punto $x_0 = \varphi(t_0)$, luego, es diferenciable en ese punto y podemos escribir

$$\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x$$

donde, $\alpha(\Delta x) \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ (recordemos que $\alpha(0) = 0$).

Entonces,

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x_0)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \alpha(\Delta x)\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Demostremos que el término de la derecha de la igualdad anterior tiene límite cuando $\Delta t \to 0$ y que este límite (que es la derivada de la función compuesta) coincide con $f'[\varphi(t_0)]\ \ \varphi'(t_0)$.

Como $x = \varphi(t)$ es derivable en el punto t_0 se obtiene que $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \varphi'(t_0)$.

Queda por demostrar que $\alpha(\Delta x) \to 0$, cuando $\Delta t \to 0$. En efecto, $\varphi(t)$ es continua en t_0, luego, si $\Delta t \to 0$, también $\Delta x \to 0$, pero $\alpha(\Delta x)$ es un infinitesimal cuando $\Delta x \to 0$. Utilizando lo dicho anteriormente,

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x_0)\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0}\alpha(\Delta x)\frac{\Delta x}{\Delta t} = f'(x_0)\,\varphi'(t_0)$$

$$= f'[\varphi(t_0)] \cdot \varphi'(t_0)$$

lo que demuestra el teorema.

La fórmula de la derivada de la función compuesta se puede aplicar de forma sucesiva a la compuesta de más de dos funciones, por ejemplo,

$$\{F[f(\varphi(t))]\}'_{t=t_0} = F'[f(\varphi(t_0))] \cdot f'(\varphi(t_0)) \cdot \varphi'(t_0)$$

Ejemplos:

1) Sea $y = (\text{sen } x)^2$. Si hacemos $u = \text{sen } x$, entonces, podemos escribir $y = u^2$, $u = \text{sen } x$. Por la fórmula demostrada

$$y' = [(\text{sen } x)^2]' = 2u \cdot \cos x = 2\ \text{sen } x \cos x$$

2) Sea $y = \ln \cos (x^3 + 3x^2 + 1)$. Haciendo $u = x^3 + 3x^2 + 1$, $v = \cos u$, $y = \ln v$, resulta

$$y' = \frac{1}{v} \cdot (-\operatorname{sen} u) \cdot (3x^2 + 6x) = -(3x^2 + 6x) \operatorname{tg}(x^3 + 3x^2 + 1)$$

Es conveniente observar que en la práctica no es necesario introducir de forma explícita las nuevas variables, sino que se puede aplicar el método directamente.

3) Sea $y = \cos \ln 3x$, $y' = -\operatorname{sen} \ln 3x \dfrac{3}{3x} = \dfrac{-\operatorname{sen} \ln 3x}{x}$

4) Sea $y = x^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces $y = e^{\alpha \ln x}$, con lo que podemos hallar la derivada de la función potencial a partir de la derivada de la función logarítmica y exponencial. En efecto,

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

Derivada de las expresiones potecio- exponenciales:

Para derivar expresiones de la forma $[u(x)]^{v(x)}$ es conveniente escribir ésta en la forma $e^{v(x) \ln[u(x)]}$ y después derivar.

Ejemplos:

Calcular la primera derivada de:

1. $y = \sqrt{(a-x)(x-b)} - (a-b)\arctan\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}$

$$\sqrt{(a-x)\cdot(x-b)} - (a-b)\cdot\arctan\left(\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}\right)$$

$$\sqrt{(a-x)\,(x-b)} - (a-b)\arctan\left(\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{differentiate w.r.t. x}}$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{a-2x+b}{\sqrt{(a-x)\,(x-b)}} - \frac{1}{2}\,\frac{(a-b)\left(-\frac{1}{x-b} - \frac{a-x}{(x-b)^2}\right)}{\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}\left(1+\frac{a-x}{x-b}\right)}$$

2. $y = \sqrt[x]{x}$ $\quad \sqrt[x]{x} \quad x^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{\text{differentiate w.r.t. x}} x^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{\ln(x)}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)$

Derivada de la función inversa:

$$[f^{-1}(y)]'_{y_0 = f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad (1)$$

TEOREMA

Sea $y = f(x)$ definida, continua y estrictamente creciente (o decreciente) en una vecindad de un punto x_0, supongamos, además, que $f'(x_0) \neq 0$. Entonces, la función inversa $x = f^{-1}(y)$ tiene derivada en el punto $y_0 = f'(x_0)$ y se calcula mediante la fórmula (1).

DEMOSTRACIÓN

Fijemos una vecindad del punto x_0, donde, $y = f(x)$ sea continua y estrictamente monótona, entonces, en virtud del teorema sobre la existencia y continuidad de la función inversa, en la correspondiente vecindad de $y_0 = f(x_0)$ existe, es continua y estrictamente monótona $x = f^{-1}(y)$.

Consideremos un incremento $\Delta y \neq 0$ en el punto considerado, lo suficientemente pequeño para que el correspondiente incremento $\Delta x = f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)$ satisfaga que $x_0 + \Delta x$ esté en la vecindad prefijada de x_0. En virtud de que f^{-1} es estrictamente monótona $\Delta x \neq 0$. Podemos, entonces, escribir

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Supongamos que $\Delta y \to 0$, entonces, utilizando la continuidad de $x = f^{-1}(y)$, también $\Delta x \to 0$. Teniendo en cuenta la derivabilidad de $y = f(x)$ en el punto x_0 y, además, $f'(x_0) \neq 0$, existe el límite de $\dfrac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$ cuando $\Delta y \to 0$, luego, también existe

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$$

de donde se obtiene (1).

Aplicaciones:

1) $y = \text{arcsen } x$, $x = \text{sen } y$, $\frac{-\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, $-1 < x < 1$. Note que aunque la función inversa de $x = \text{sen } y$ existe para $\frac{-\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, la deri-

vada de esta función se anula en los puntos $y = \pm \frac{\pi}{2}$, por lo que no se puede aplicar en esos puntos el teorema 5.2.

Si $y \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$(\text{arcsen } x)' = \frac{1}{(\text{sen } y)'} = \frac{1}{\cos y}$$

Como $y \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, se puede escribir $\cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y} =$

$= \sqrt{1 - x^2}$ luego,

$$(\text{arcsen } x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

2) Análogamente se puede hallar

$$(\text{arccos } x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad |x| < 1$$

3) $y = \text{arctg } x$, $x = \text{tg } y$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, $x \in \mathbf{R}$

$$(\text{arctg } x)' = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$