

Matemática II

Ciencias Farmacéuticas

Tema II. Integral definida e Integral Doble

Conferencia 4. Noción de integral Definida. Propiedades. Fórmula de Newton-Lezbinz.

Sumario:

Introducción	1
1. Concepto de Integral Definida.....	2
2. Propiedades de la Integral Definida	3
3. Teorema fundamental del cálculo	4
4. Orientación de la Clase Práctica.....	5
5. Bibliografía	5

Introducción

El concepto de integral definida tiene gran importancia en la Matemática, para introducir este concepto nos auxiliaremos de un ejemplo. Supongamos que queremos determinar el área del trapecio curvilíneo formado por el gráfico de la función continua positiva $y = f(x)$, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, ver Figura (1).

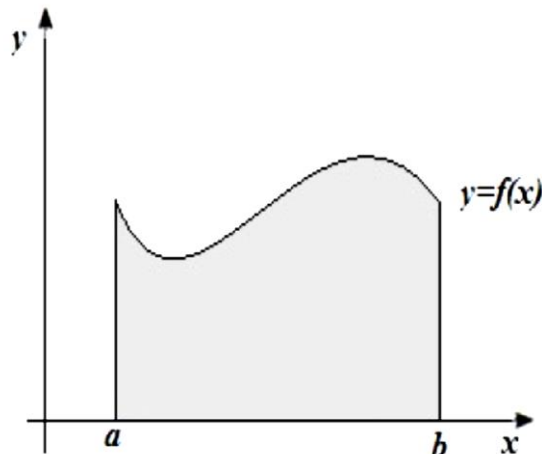


Fig. 1 Trapecio curvilíneo

Para solucionar el problema planteado dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos mediante la partición $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ y formamos rectángulos que aproximen el área de los trapecios curvilíneos más pequeños, ver Figura (2).

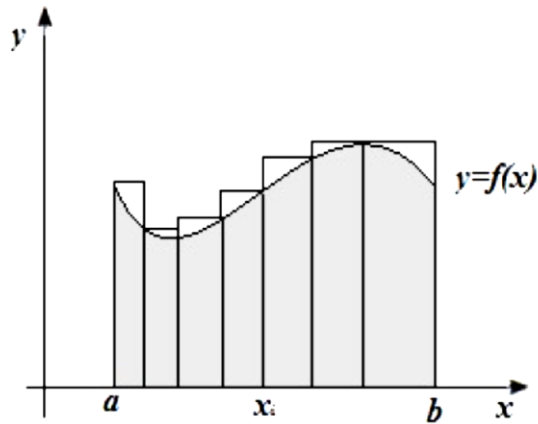


Fig. 2 Trapecio curvilíneo particionado

De esta manera podemos obtener un valor aproximado del área total, o sea:

$$A \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Como queremos determinar el área del trapecio curvilíneo lo más exactamente posible, tiene sentido pasar al límite cuando la longitud máxima de los subintervalos tienda a cero, o sea:

$$A \approx \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Siendo:

$$\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$$

La generalización de esta idea nos conduce al concepto de integral definida, el cual se recoge en la siguiente definición.

1. Concepto de Integral Definida

Definición (*Integral Definida o Integral de Reimann*)

Sea f una función continua y definida para $a \leq x \leq b$, dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos mediante la partición $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ y elegimos puntos intermedios $\xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n$ en cada uno de los subintervalos, de modo que ξ_i se encuentra en el i -ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Si definimos $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$, entonces la integral definida de $f(x)$ desde a hasta b se define como el límite:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

si existe y es finito, independientemente de la forma de elegir la partición, siendo a el **límite inferior** y b el **límite superior**.

Observaciones:

1. La integral definida $\int_a^b f(x)dx$ es un número que no depende de x .
2. Aun cuando en la definición de integral definida se asume que la función integrando es continua, también es posible calcular la integral definida de una función con un número finito de discontinuidades finitas.

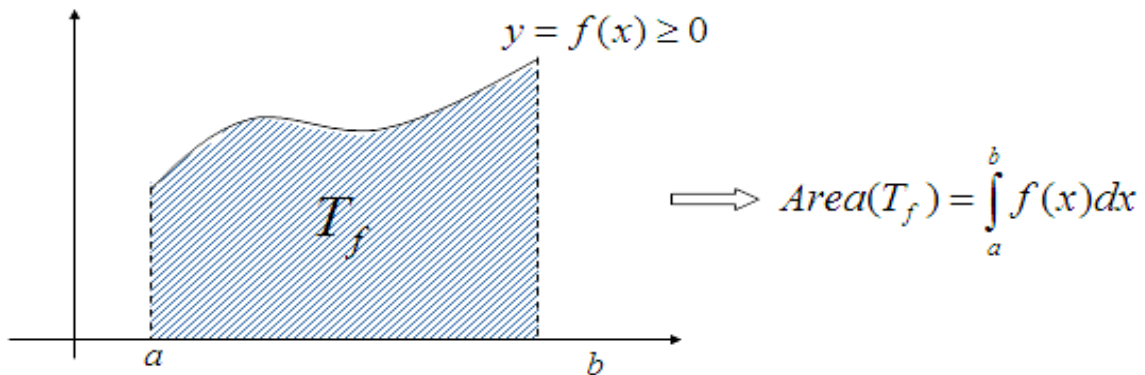
Interpretación geométrica

Basándonos en el ejemplo visto al inicio de la clase podemos realizar una primera aproximación a la interpretación geométrica de la integral definida.

Sea $y = f(x)$ definida y no negativa en el intervalo $[a, b]$.

Llamamos trapezio curvilíneo al conjunto

$$T_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$



Entonces la integral definida se pudiera interpretar como el área del trapezio curvilíneo T_f (región sombreada o área bajo la curva), suponiendo que ésta exista.

2. Propiedades de la Integral Definida

1. La integral definida tiene las mismas propiedades que la integral indefinida.
2. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ siendo $a < b$

$$3. \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$4. \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \quad \text{donde } c \in (a, b)$$

Ejemplos 1

Si se sabe que $\int_0^9 f(x)dx = 16$ y $\int_0^5 f(x)dx = 12$. Determine $\int_5^9 f(x)dx$.

Utilizando la propiedad 4 podemos afirmar que:

$$\int_0^5 f(x)dx + \int_5^9 f(x)dx = \int_0^9 f(x)dx$$

Despejando tendríamos que:

$$\int_5^9 f(x)dx = \int_0^9 f(x)dx - \int_0^5 f(x)dx = 16 - 12 = 4$$

3. Teorema fundamental del cálculo

Como ocurre con muchos de los conceptos que hemos estudiado este curso, utilizar la definición para su cálculo resulta muy engorroso por lo que acudimos a caracterizaciones que nos permitan obtener lo que queremos de una manera más sencilla. En el caso de la integral definida, utilizaremos los conocidos en la literatura como Teoremas Fundamentales del Cálculo, que relacionan la integral indefinida estudiada en clases anteriores con la integral definida.

Teorema

Supongamos que f es continua en $[a, b]$:

1. Si $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, entonces $F'(x) = f(x)$.
2. $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$, siendo F primitiva de f , o sea, $F'(x) = f(x)$.

De esta manera podemos concluir que:

Siendo $f(x)$ una función continua en $[a, b]$ y $F(x)$ una de sus primitivas en este intervalo, entonces la integral definida de f en $[a, b]$ es:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Ejemplos:

$$1. \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}$$

$$2. \int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) = -(-1) + 1 = 2$$

$$3. \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} \, dx$$

En este caso podemos hacer la sustitución $t = \ln x$, $dt = \frac{1}{x} dx$

Y para los límites de integración se cumple que:

Si $x = 1$ entonces $t = 0$ y si $x = e$ entonces $t = 1$.

Luego el cálculo de la integral quedaría como sigue:

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} \, dx = \int_0^1 t^2 \, dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

En la próxima clase estudiaremos en detalle cómo aplicar los métodos de sustitución e integración por partes cuando estamos en presencia de una integral definida. Por ahora el ejemplo 3 les sirve para ir teniendo alguna idea.

4. Orientación de la Clase Práctica

- **#5 (Cálculo de integrales Definidas)**
Pág.32, Eje. 1 (1 al 18) LIBRO DE TEXTO

5. Bibliografía

Matemática I para especialidades de Ciencias Naturales. Rita Roldán y Yolanda Hernández.