

CAPÍTULO 4

Matemática Numérica, 2da Edición

Manuel Álvarez, Alfredo Guerra, Rogelio Lau

APROXIMACIÓN DE FUNCIONES

Objetivos

Al finalizar el estudio y la ejercitación de este capítulo, el lector debe ser capaz de:

- Describir el problema general de la aproximación de funciones y, como casos particulares, los problemas de interpolación y de ajuste de curvas.
- Distinguir entre un problema que debe ser resuelto por interpolación y otro que corresponde al ajuste de curvas.
- Establecer la relación entre el grado de un polinomio interpolador y la cantidad de nodos de interpolación de manera que dicho polinomio exista y sea único.
- Explicar el concepto de error de interpolación y acotarlo haciendo uso de la fórmula correspondiente.
- Hallar valores interpolados o el polinomio interpolador utilizando cualquiera de los métodos: Lagrange y Diferencias Divididas de Newton.
- Utilizar la interpolación polinomial para resolver problemas concretos.
- Explicar el concepto de función spline.
- Explicar en que consiste el carácter local de la interpolación polinomial y el carácter global de la interpolación mediante splines.
- Explicar la relación entre las diferencias divididas y las derivadas y emplear esta relación para determinar el carácter polinomial de un conjunto de datos.
- Explicar las características de los splines cúbicos natural, anclado y periódico.
- Plantear los sistemas de ecuaciones lineales necesarios para calcular splines cúbicos de interpolación de los tipos estudiados y para hallar curvas paramétricas abiertas y cerradas que pasen por puntos específicos del plano coordenado.
- Deducir el sistema normal de ecuaciones para ajustar un modelo lineal a un conjunto de datos.
- Ajustar modelos lineales a conjuntos de datos para resolver problemas aplicados.
- Ajustar modelos no lineales en casos en que el modelo sea linealizable o se pueda resolver numéricamente de manera simple.
- Describir mediante pseudo código cualquiera de los algoritmos estudiados en este capítulo.

4.1 Introducción

El problema de la aproximación funcional

En este capítulo se estudiarán algunas técnicas para resolver el siguiente tipo de problema: hallar la expresión analítica de una función $g(x)$ que sirva para aproximar a otra función $f(x)$ para x en algún intervalo $[a, b]$.

Problemas como este aparecen en la teoría y en la práctica con gran frecuencia; a veces porque no se conoce una expresión analítica para la función $f(x)$, sino valores aislados $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ de la misma y se necesita disponer de una expresión analítica que permita, aunque sea de manera aproximada, poder evaluar la función en otros valores de x ; en otras ocasiones el algoritmo algebraico para calcular $f(x)$, aunque se conoce, resulta tan complicado que se prefiere hallar una función $g(x)$ de una clase más simple y utilizarla en lugar de $f(x)$, aun sabiendo que se está incurriendo en un error. En los ejemplos que siguen se ilustran varias situaciones típicas.

Ejemplo 1

La función Γ (gamma) se utiliza en el cálculo de algunas integrales impropias que se presentan, por ejemplo, al resolver ecuaciones diferenciales mediante la transformada de Laplace. Esta función se define mediante la expresión:

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{a-1} dx \quad \text{para } a > 0 \quad (1)$$

a	$\Gamma(a)$	a	$\Gamma(a)$	a	$\Gamma(a)$
1,00	1,00000	1,35	0,89115	1,70	0,90865
1,05	0,97350	1,40	0,88726	1,75	0,91906
1,10	0,95135	1,45	0,88565	1,80	0,93138
1,15	0,93304	1,50	0,88623	1,85	0,94561
1,20	0,91817	1,55	0,88887	1,90	0,96177
1,25	0,90640	1,60	0,89352	1,95	0,97988
1,30	0,89747	1,65	0,90012	2,00	1,00000

Tabla 1

Salvo para valores enteros de a , la integral (1) es muy difícil de evaluar. En muchos manuales se ofrecen valores de la función $\Gamma(a)$ para $a \in [1, 2]$ como se muestra en la tabla 1. Para valores de a fuera de este intervalo se aplica la fórmula:

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$$

Si se desea obtener $\Gamma(a)$ para algún a entre 1 y 2 que no aparezca en la tabla, es preferible, en lugar de utilizar la integral impropia (1) que define a la función, determinar una función simple g (por ejemplo, un polinomio entero) que en un entorno de a se aproxime a $\Gamma(a)$ y, entonces, hallar $g(a)$.

Ejemplo 2

Con el objetivo de encontrar una relación entre el peso y la talla de un determinado sector poblacional, se selecciona al azar una muestra de 100 individuos del grupo y se obtiene para cada persona i , su peso (p_i) y su estatura (t_i). Al representar estas mediciones en un sistema de ejes p - t ,

se obtiene un diagrama de puntos como el que se muestra en la figura 1. Se desea hallar una fórmula que permita establecer una relación entre el peso p y la talla t de los individuos del grupo.

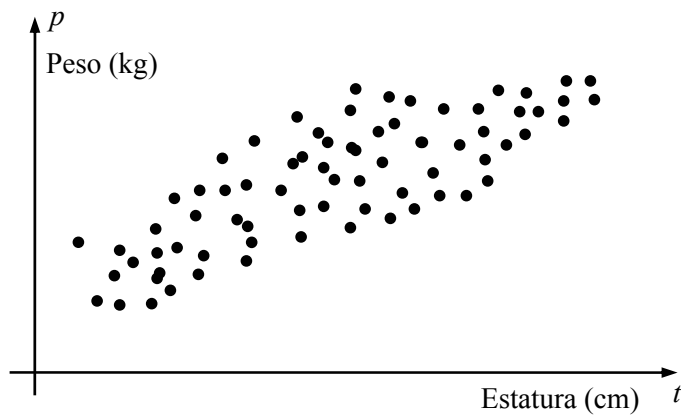


Figura 1

Ejemplo 3

Para producir en un torno de mando numérico una pieza con el perfil longitudinal que se muestra en la figura 2, es necesario obtener una función simple (de modo que pueda ser evaluada en un tiempo muy breve) que describa el contorno de la pieza. Esta función servirá para fijar la posición de la cuchilla del torno en cada instante. Algunas dimensiones, marcadas en la figura en milímetros, deberán ser respetadas y el perfil de la pieza debe ser una curva suave.

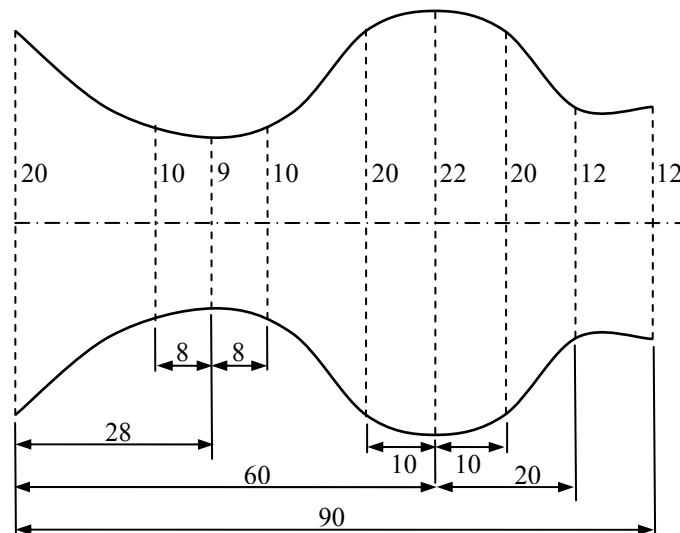


Figura 2

Ejemplo 4

En un laboratorio se está analizando la resistencia de las barras de acero corrugadas de 12 mm para la construcción. Para ello se someten 10 muestras de la misma longitud a grandes esfuerzos de tensión y se mide la deformación sufrida. Los resultados se muestran en la tabla 2 y en la figura 3 se han representado en un plano T - s .

T (tensión) kilonewton	5,1	7,7	10,8	13,2	15,6	18,1	22,2	23,9	26,3	27,5
s (deformación) milímetro	0,10	0,17	0,24	0,30	0,36	0,40	0,53	0,70	0,85	1,03

Tabla 2

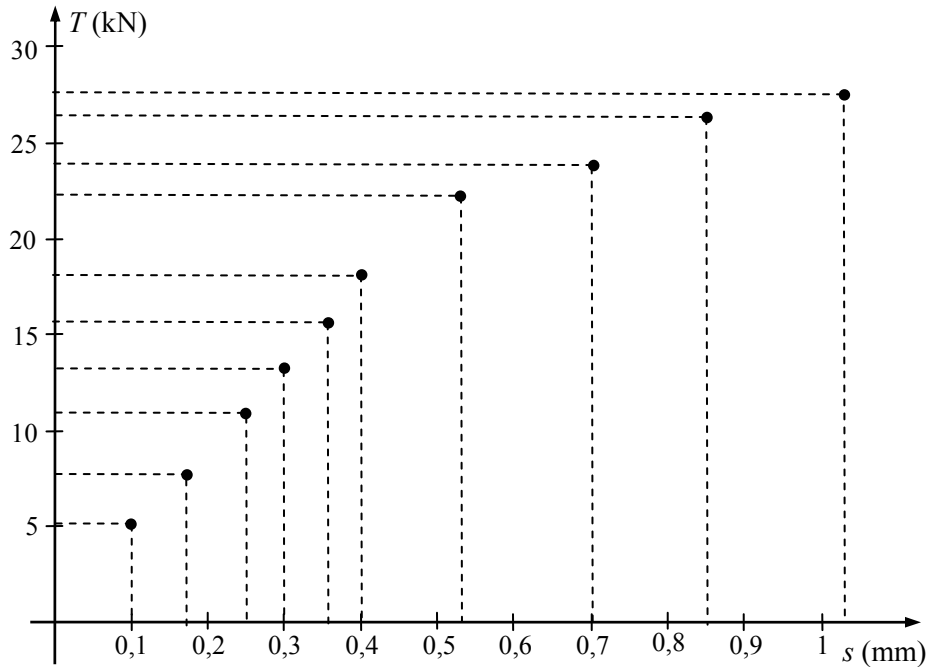


Figura 3

Se quiere hallar un modelo lineal

$$T = a_0 + a_1 s$$

y otro cuadrático:

$$T = b_0 + b_1 s + b_2 s^2$$

para representar el comportamiento de este material para tensiones en el rango de 0 a 30 kilonewton.

■

En los cuatro ejemplos mostrados se ha intentado cubrir la mayor variedad de situaciones. Así, en el ejemplo 1, existe una expresión analítica para determinar $\Gamma(a)$ para todo a positivo, mientras en

los demás ejemplos no existe una fórmula que relacione a las variables. En el ejemplo 2 la relación entre peso y talla será de un tipo estadístico, ya que el peso de un individuo no es una función únicamente de su estatura; de lo que se trata realmente es de hallar una relación matemática entre la estatura de una persona y el valor esperado o valor medio del peso de todas las personas que poseen esa talla. En el ejemplo 4 existe también una componente aleatoria significativa, ya que en la medición de T y de s estarán presentes errores inevitables y, además, porque es imposible lograr que todas las muestras tomadas sean idénticas. En el ejemplo 3, puede suponerse que los valores dados en el esquema son exactos, y en esto hay una gran semejanza con el ejemplo 1; en el ejemplo 3, sin embargo, la necesidad de que la expresión matemática que describa al perfil sea simple y su representación gráfica sea una curva suave, impone requisitos difíciles de satisfacer. Los ejemplos 1 y 3 son situaciones típicas de problemas de interpolación, mientras que el 2 y el 4 representan casos en que la solución se logra mediante técnicas de ajuste de funciones. Estos son los dos tipos de enfoque que se estudiarán en el resto del capítulo.

Conceptos básicos

Si se conocen los valores que toma la función $f(x)$ en los $n + 1$ puntos diferentes $x_0, x_1, \dots, x_n$, el problema de interpolación consiste en hallar una función $g(x)$ cuyos valores puedan ser calculados para cualquier x en un intervalo que contiene a $x_0, x_1, \dots, x_n$, de manera que:

$$\begin{aligned} g(x_0) &= f(x_0) \\ g(x_1) &= f(x_1) \\ &\vdots \\ g(x_n) &= f(x_n) \end{aligned}$$

Los números $x_0, x_1, \dots, x_n$ suelen llamarse *puntos o nodos de interpolación*. Si x no es un nodo de interpolación, al número real $g(x)$ se le llama *valor interpolado*. Con frecuencia se utiliza la frase *valor extrapolado* para referirse a $g(x)$ cuando x es mayor que el mayor nodo de interpolación o menor que el menor de ellos. La función $g(x)$ se denomina función interpoladora y debe ser lo suficientemente simple como para que resulte fácil y rápido evaluarla en los puntos deseados; por esta razón, lo más usual es utilizar polinomios de grado pequeño con este fin.

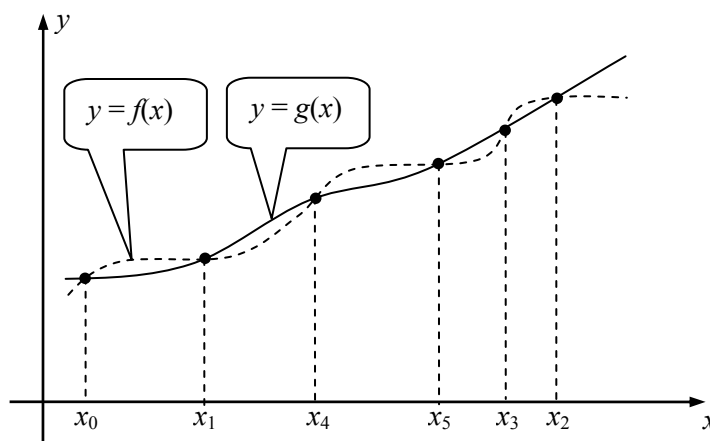


Figura 1

La figura 1 ilustra geoméricamente los conceptos anteriores para el caso de una función $f(x)$ con seis nodos de interpolación que aparece representada en línea de puntos para indicar que sus valores son desconocidos salvo para los puntos x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 y x_5 , que es la situación más frecuente. Nótese que la función interpoladora $g(x)$ coincide con la función interpolada $f(x)$ en los nodos de interpolación, lo cual significa que sus gráficas se cortan en los puntos $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Note que los nodos de interpolación tienen que ser diferentes pero no es obligatorio que estén ordenados.

A la diferencia entre la función interpolada y la interpoladora se le llama *error de interpolación* y se denota $R(x)$, es decir:

$$R(x) = \text{error}(g(x)) = f(x) - g(x)$$

El error de interpolación depende de x ; es cero si x es un nodo de interpolación y, por lo general, aumenta a medida que x está más distante de los nodos. En particular, el error de interpolación suele ser mucho mayor (en valor absoluto) en los casos de extrapolación que de interpolación.

4.2 Interpolación polinomial

Cuando la función interpoladora es un polinomio, la interpolación se llama polinomial. Si se supone conocido el conjunto $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de nodos de interpolación, para los cuales se conocen las imágenes de la función f :

$$y_i = f(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, n$$

existen tres problemas fundamentales relacionados con la interpolación polinómica:

- a) Existencia: ¿Hay algún polinomio $p(x)$ tal que $p(x_i) = y_i$ para $i = 0, 1, \dots, n$?
- b) Unicidad: Si tal polinomio existe, ¿será único?
- c) Construcción: Si existe el polinomio interpolador y es único, ¿cómo hallarlo?

El teorema que sigue resuelve definitivamente los dos primeros problemas. El tercero tiene varias soluciones, pues, aunque se trata no solo de hallar el polinomio interpolador, sino de hacerlo de un modo eficiente, para esto existe una gran cantidad de enfoques de los cuales en este capítulo se verán algunos de los más importantes.

Existencia y unicidad del polinomio interpolador

Teorema 1

Sean $n + 1$ números reales diferentes $x_0, x_1, \dots, x_n$ y f una función que toma valores $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, ..., $y_n = f(x_n)$. Entonces existe uno y solo un polinomio p de grado menor o igual que n tal que:

$$\begin{aligned} p(x_0) &= y_0 \\ p(x_1) &= y_1 \\ &\vdots \\ p(x_n) &= y_n \end{aligned} \tag{1}$$

Demostración:

Cualquier polinomio de grado menor o igual que n se puede representar como:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad (2)$$

Hay que probar que existe uno y solo un juego de coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n$ que den lugar a un polinomio que satisface las condiciones (1). Esto es:

$$\begin{aligned} p(x_0) &= a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n = y_0 \\ p(x_1) &= a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_nx_1^n = y_1 \\ &\vdots \\ p(x_n) &= a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_nx_n^n = y_n \end{aligned} \quad (3)$$

Este sistema de ecuaciones se puede expresar en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

El determinante de la matriz de este sistema se llama determinante de Vandermonde y será designado por V_{n+1} . Es decir:

$$V_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

Aplicando el principio de inducción completa, se prueba fácilmente que, si los números x_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) son distintos, entonces V_{n+1} no es nulo. En efecto:

$$V_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_0 \neq 0$$

Si se supone que V_n no es cero, se llega a que V_{n+1} tampoco lo es. Para ello, se realizan sobre el determinante V_{n+1} las siguientes operaciones (en ese orden), ninguna de las cuales altera el valor del determinante:

Restar a la columna $n+1$, la columna n multiplicada por x_0
 Restar a la columna n , la columna $n-1$ multiplicada por x_0
 $\vdots$
 Restar a la columna 1, la columna 2 multiplicada por x_0

Con esto se logra anular todos los elementos de la fila 1 excepto el primero. Se obtiene:

$$V_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0 x_1 & \cdots & x_1^n - x_0 x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0 x_2 & \cdots & x_2^n - x_0 x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - x_0 & x_n^2 - x_0 x_n & \cdots & x_n^n - x_0 x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Desarrollando por menores a V_{n+1} respecto a la primera fila:

$$V_{n+1} = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0 x_1 & \cdots & x_1^n - x_0 x_1^{n-1} \\ x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0 x_2 & \cdots & x_2^n - x_0 x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_0 & x_n^2 - x_0 x_n & \cdots & x_n^n - x_0 x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Extrayendo factores comunes en los elementos de las columnas 2, 3, ..., n :

$$V_{n+1} = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_1(x_1 - x_0) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1 - x_0) \\ x_2 - x_0 & x_2(x_2 - x_0) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2 - x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_0 & x_n(x_n - x_0) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n - x_0) \end{vmatrix}$$

Ahora se puede extraer de la primera fila el factor $(x_1 - x_0)$, de la segunda fila $(x_2 - x_0)$, etcétera, para obtener:

$$V_{n+1} = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \cdots (x_n - x_0) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Como todos los binomios que aparecen multiplicando al determinante son no nulos (los nodos de interpolación son diferentes) y el determinante de la derecha es V_n , que se ha supuesto no nulo, resulta que:

$$V_{n+1} \neq 0$$

El hecho de que $V_n \neq 0 \Rightarrow V_{n+1} \neq 0$ junto a la certeza de que $V_2 \neq 0$, prueban que para todo $n \geq 2$ es $V_n \neq 0$ siempre que los nodos sean diferentes. De aquí resulta que el sistema (3) admite solución única y esto prueba el teorema. ■

Es importante notar que, para garantizar la existencia y la unicidad del polinomio interpolador, el teorema exige una relación precisa entre el número de nodos y el grado del polinomio: si hay

$n + 1$ nodos entonces el grado del polinomio será n o menor, pues algunos de los coeficientes pudieran ser cero. Obsérvese que un polinomio de grado n posee $n + 1$ coeficientes: $a_0, a_1, \dots, a_n$. De no cumplirse esta relación, pueden fallar la existencia o la unicidad. Esto se demuestra en los ejemplos que siguen.

Ejemplo 1

Pruebe que para tres nodos de interpolación no puede asegurarse la existencia de un polinomio interpolador con grado menor o igual que 1.

Solución:

Basta hallar un ejemplo para probar la proposición. Sean:

$$\begin{array}{ll} x_0 = 1 & y_0 = f(x_0) = 1 \\ x_1 = 2 & y_1 = f(x_1) = 3 \\ x_2 = 3 & y_2 = f(x_2) = 1 \end{array}$$

los nodos de interpolación y los respectivos valores de la función interpolada. Sea

$$p(x) = a_0 + a_1x$$

un polinomio de grado menor o igual que uno. Como la gráfica de todo polinomio de este tipo es una línea recta y los tres puntos (x_0, y_0) , (x_1, y_1) y (x_2, y_2) no están alineados, es obvio que ningún polinomio de grado menor o igual que uno puede interpolar estos valores.

Ejemplo 2

Probar que para dos nodos de interpolación no puede asegurarse la unicidad del polinomio interpolador de grado menor o igual que dos.

Solución:

Es suficiente con dar un ejemplo para demostrar la proposición. Sean

$$\begin{array}{ll} x_0 = 1 & y_0 = f(x_0) = 3 \\ x_1 = 2 & y_1 = f(x_1) = 4 \end{array}$$

los dos nodos con sus correspondientes imágenes. Sea el polinomio interpolador

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

Hay que satisfacer las condiciones:

$$\begin{array}{l} p(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 = y_0 \\ p(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 = y_1 \end{array}$$

esto es:

$$\begin{array}{l} a_0 + a_1 + a_2 = 3 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 4 \end{array}$$

que es un sistema de rango 2 con 3 incógnitas, que posee, por tanto, infinitas soluciones, cada una de las cuales representa a un polinomio de grado menor o igual a dos. Geométricamente, estos polinomios corresponden a las infinitas parábolas de eje vertical que pasan por los puntos (1, 3) y (2, 4).

■

A partir del teorema de existencia y unicidad y de los dos ejemplos mostrados, si se denota por P_m la familia de todos los polinomios con grado menor o igual que m , puede concluirse que:

Dados $n + 1$ nodos de interpolación diferentes: $x_0, x_1, \dots, x_n$ de una función f , entonces:

Si $m < n$ No puede asegurarse que en P_m exista algún polinomio que interpole la función.

Si $m > n$ En P_m existen infinitos polinomios que interpolan la función

Si $m = n$ Existe en P_m uno y solo un polinomio que interpola la función.

En todo lo que sigue, siempre que se tengan $n + 1$ nodos de interpolación, se sobreentenderá como polinomio interpolador aquel de grado menor o igual que n .

Error del polinomio interpolador

Cuando la función $g(x)$ interpoladora es un polinomio, el error de interpolación

$$R(x) = f(x) - g(x)$$

puede expresarse mediante una fórmula muy interesante. Sea $f(x)$ la función interpolada, $x_0, x_1, \dots, x_n$ los nodos de interpolación y $p(x)$ el polinomio interpolador. El error de interpolación es una función de x definida por:

$$R(x) = f(x) - p(x)$$

y como el polinomio interpolar coincide con $f(x)$ en los nodos de interpolación, es evidente que:

$$R(x_i) = 0 \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Como la función $k(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$

también se anula en estos mismos valores, independientemente del coeficiente k , resulta interesante estudiar la diferencia entre ambas funciones. Considérese entonces la función:

$$F(x) = R(x) - k(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \quad (4)$$

Es obvio que $F(x_i) = 0$ para $i = 0, 1, 2, \dots, n$

Supóngase que se quiere investigar el error de interpolación para un valor x^* que no es un nodo de interpolación. Evaluando para $x = x^*$ la función (4):

$$F(x^*) = R(x^*) - k(x^* - x_0)(x^* - x_1) \cdots (x^* - x_n) \quad (5)$$

Como ninguno de los factores $(x^* - x_i)$ es cero, el producto $(x^* - x_0)(x^* - x_1) \cdots (x^* - x_n)$ tampoco lo puede ser, así que es posible encontrar un valor de k que para el cual:

$$F(x^*) = 0$$

Por supuesto, este valor de k depende de x^* . Dando a k este valor, la función $F(x)$ posee $n + 2$ ceros: $x_0, x_1, \dots, x_n$ y x^* .

Si se supone que f es derivable $n + 1$ veces en un intervalo I que incluya a todos los nodos de interpolación y al valor x^* , la función F también lo será ya que:

$$F(x) = f(x) - p(x) - k(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \quad (6)$$

y, aparte de $f(x)$, el resto de las funciones que intervienen en su definición son polinomios, los cuales son infinitamente derivables.

Como se recordará del curso de Cálculo de una variable, el teorema de Rolle garantiza que si una función derivable en un intervalo cerrado toma en ambos extremos del intervalo el mismo valor, entonces su derivada se anula en algún punto de ese intervalo. Como $F(x)$ es derivable y toma el mismo valor (cero) en por lo menos $n + 2$ puntos de I , entonces su derivada se anulará al menos una vez entre cada dos de estos puntos; esto es:

$$F'(x) \text{ posee al menos } n + 1 \text{ ceros en } I$$

Con razonamientos similares se llega sucesivamente a las siguientes conclusiones:

$$F''(x) \text{ posee al menos } n \text{ ceros en } I$$

$$F'''(x) \text{ posee al menos } n - 1 \text{ ceros en } I$$

$$\vdots$$

$$F^{(n+1)}(x) \text{ posee al menos 1 cero en } I$$

Si a este cero se le asigna la letra c , se ha probado que existe al menos un número c en I tal que:

$$F^{(n+1)}(c) = 0$$

Por otra parte, derivando $n + 1$ veces en ambos miembros de la ecuación (6):

$$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - p^{(n+1)}(x) - kD^{n+1}[(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)]$$

Ahora bien, como $p(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que n , su derivada de orden $n + 1$ es cero para todo x . La función $(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$ es un polinomio de grado $n + 1$ cuyo

término de mayor grado es x^{n+1} , así que su derivada de orden $n+1$ es la constante $(n+1)!$. De todo esto resulta:

$$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - k(n+1)!$$

Evalutando para $x = c$:

$$F^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) - k(n+1)! = 0$$

despejando k :

$$k = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

Resumiendo: si x^* no es un nodo de interpolación, puede asegurarse la existencia en I de un valor c tal que, de acuerdo con la ecuación (5):

$$F(x^*) = R(x^*) - \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x^* - x_0)(x^* - x_1) \cdots (x^* - x_n) = 0$$

esto es:

$$R(x^*) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x^* - x_0)(x^* - x_1) \cdots (x^* - x_n)$$

La deducción anterior es válida si x^* no es un nodo de interpolación. Sin embargo, la expresión obtenida también resulta cierta cuando x^* es alguno de los nodos, ya que entonces la fórmula se reduciría a:

$$R(x_i) = 0 \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \dots, n$$

lo cual es un hecho conocido. Puede entonces permitirse que x^* sea cualquier número real. Por la importancia de esta conclusión será establecida como un teorema:

Teorema 2

Si $f(x)$ es derivable $n+1$ veces en un intervalo cerrado I que incluye a los nodos de interpolación $x_0, x_1, \dots, x_n$ del polinomio interpolador $p(x)$ y al número x , entonces existe en I al menos un valor c tal que el error de interpolación en x es:

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \quad (7)$$

■

Es conveniente destacar acerca de esta importante fórmula algunos aspectos que pudieran pasar inadvertidos:

- Acerca del número c solo puede asegurarse su existencia en el intervalo I pero no su valor preciso.
- Si x es un nodo de interpolación, alguno de los binomios que contiene la expresión (7) se anula, sin importar que valor tome c y se obtiene $R(x) = 0$.
- El valor de c depende de la función $f(x)$, de la ubicación de los nodos de interpolación y del valor x en el cual se interpole.

- El factor $(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$ se anula en los nodos de interpolación y tiende hacia infinito cuando x tiende hacia infinito. Esto explica por qué, cuando el punto de interpolación está cerca de un nodo, el error de interpolación suele ser pequeño y por qué en el caso de la extrapolación, el error se hace, por regla general, muy grande.
- Si se puede hallar una cota de la función $|f^{(n+1)}(x)|$ para $x \in I$, la fórmula (7) brinda una cota para el error absoluto de interpolación, pues:

$$\text{Si } |f^{(n+1)}(x)| \leq M \text{ para } x \in I, \text{ entonces: } |R(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

Ejemplo 3

Dada la función $f(x) = \sin x$, obtenga su polinomio de interpolación para los nodos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{4}$ y $x_2 = \frac{\pi}{2}$ y dé una cota del error de interpolación para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Con estos resultados, estime el valor de $\sin(\frac{\pi}{6})$.

Solución:

$$y_0 = f(x_0) = \sin 0 = 0$$

$$y_1 = f(x_1) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y_2 = f(x_2) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

Polinomio de interpolación: $p(x) = ax^2 + bx + c$

Luego: $p(x_0) = p(0) = c = 0$

$$p(x_1) = p\left(\frac{\pi}{4}\right) = a\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + b\left(\frac{\pi}{4}\right) + c = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$p(x_2) = p\left(\frac{\pi}{2}\right) = a\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + b\left(\frac{\pi}{2}\right) + c = 1$$

de donde $c = 0$ y:

$$a\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + b\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + b\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Resolviendo el sistema: $a = -0,335749$ y $b = 1,164013$

Resulta: $p(x) = -0,335749x^2 + 1,164013x$

Como la función $f(x) = \sin x$ es derivable indefinidamente y

$$f^{(3)}(x) = -\cos x$$

se puede acotar esta derivada: $|f^{(3)}(x)| \leq 1$

y con esto acotar también el error de interpolación

$$|R(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) = \frac{1}{3!} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$|R(x)| \leq \frac{1}{6} x(x - \frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{2})$$

en particular, para $x = \frac{\pi}{6}$: $p(\frac{\pi}{6}) = -0,335749(\frac{\pi}{6})^2 + 1,164013(\frac{\pi}{6}) = 0,5174$

$$|R(\frac{\pi}{6})| \leq \frac{1}{6} \left[\frac{\pi}{6} (\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}) \right] = 0,0239$$

De aquí: $\text{sen}(\frac{\pi}{6}) = 0,5174 \pm 0,0239$

Como se sabe, el valor exacto de $\text{sen}(\frac{\pi}{6})$ es 0,5 y, por tanto, el verdadero error de interpolación es 0,0174, de manera que la cota 0,0239 resulta algo conservadora.

La figura 1 muestra las graficas de $f(x) = \text{sen } x$ y del polinomio $p(x) = -0,335749x^2 + 1,164013x$ en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Obsérvese la similitud de ambas gráficas así como su coincidencia en los nodos de interpolación. Nótese también la gran discrepancia de ambas funciones para valores de x fuera del intervalo de interpolación.

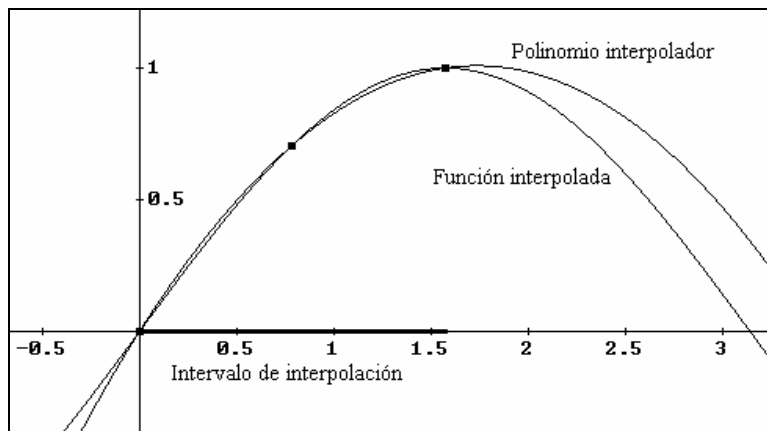


Figura 1

4.3 El método de Lagrange

El procedimiento seguido en el ejemplo anterior (ejemplo 3 de la sección 4.2) para determinar el polinomio de interpolación requiere la resolución de un sistema lineal de ecuaciones de orden $n + 1$. Esta vía es poco eficiente para hallar el polinomio de interpolación pero lo es aun menos si lo que se desea es solamente hallar el valor interpolado para una x específica y no interesa obtener el polinomio $p(x)$.

El método de Lagrange brinda un algoritmo eficiente para hallar el polinomio interpolador pero, además, permite encontrar el valor interpolado para una x específica sin necesidad de hallar la expresión analítica del polinomio interpolador.

Sean $x_0, x_1, \dots, x_n$, $n + 1$ nodos de interpolación diferentes y $f(x)$ la función a interpolar. Sean

$$y_i = f(x_i) \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

los valores de f en los nodos. El método de Lagrange consiste en encontrar $n + 1$ polinomios básicos de grado n :

$$L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)$$

que satisfagan las siguientes condiciones:

$$\begin{array}{ccccc} L_0(x_0) = 1 & L_1(x_0) = 0 & L_2(x_0) = 0 & \cdots & L_n(x_0) = 0 \\ L_0(x_1) = 0 & L_1(x_1) = 1 & L_2(x_1) = 0 & \cdots & L_n(x_1) = 0 \\ L_0(x_2) = 0 & L_1(x_2) = 0 & L_2(x_2) = 1 & \cdots & L_n(x_2) = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ L_0(x_n) = 0 & L_1(x_n) = 0 & L_2(x_n) = 0 & \cdots & L_n(x_n) = 1 \end{array}$$

Como se verá enseguida, es muy fácil construir estos polinomios básicos; una vez obtenidos, el polinomio:

$$p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x) \quad (1)$$

cumple las condiciones:

$$\begin{aligned} p(x_0) &= y_0 L_0(x_0) + y_1 L_1(x_0) + \cdots + y_n L_n(x_0) = y_0 \cdot 1 + y_1 \cdot 0 + \cdots + y_n \cdot 0 = y_0 \\ p(x_1) &= y_0 L_0(x_1) + y_1 L_1(x_1) + \cdots + y_n L_n(x_1) = y_0 \cdot 0 + y_1 \cdot 1 + \cdots + y_n \cdot 0 = y_1 \\ &\vdots \\ p(x_n) &= y_0 L_0(x_n) + y_1 L_1(x_n) + \cdots + y_n L_n(x_n) = y_0 \cdot 0 + y_1 \cdot 0 + \cdots + y_n \cdot 1 = y_n \end{aligned}$$

Además, como $p(x)$ es una combinación lineal de polinomios de grado n su grado será menor o igual que n y es, por tanto, el polinomio de interpolación buscado.

Para hallar el polinomio básico $L_i(x)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, nótese que el mismo posee n ceros:

$$x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$$

o sea, cada nodo de interpolación excepto x_i es un cero de $L_i(x)$, por tanto:

$$L_i(x) = K(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n) \quad (2)$$

donde K es un coeficiente aún por determinar. Como se debe cumplir que $L_i(x_i) = 1$, el valor de K se hallará de modo que esta condición se satisfaga. De aquí resulta:

$$L_i(x_i) = K(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n) = 1$$

Despejando K :

$$K = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}$$

y sustituyendo esta expresión para K en la ecuación (2):

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Ejemplo 1

De la función $f(x)$ se conoce que: $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ y $f(4) = 1$.

- Halle el polinomio interpolador $p(x)$ correspondiente a estos nodos.
- Halle directamente $p(2,5)$ sin utilizar $p(x)$.

Solución:

- Como se tienen tres nodos de interpolación, el grado del polinomio interpolador será menor o igual que 2. Para hallar $p(x)$ primero es necesario calcular los tres polinomios de segundo grado $L_0(x)$, $L_1(x)$ y $L_2(x)$.

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 2)(x - 4)}{(1 - 2)(1 - 4)} = \frac{1}{3}(x - 2)(x - 4)$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 1)(x - 4)}{(2 - 1)(2 - 4)} = -\frac{1}{2}(x - 1)(x - 4)$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{(4 - 1)(4 - 2)} = \frac{1}{6}(x - 1)(x - 2)$$

Es fácil comprobar que:

$$\begin{array}{lll} L_0(1) = 1 & L_1(1) = 0 & L_2(1) = 0 \\ L_0(2) = 0 & L_1(2) = 1 & L_2(2) = 0 \\ L_0(4) = 0 & L_1(4) = 0 & L_2(4) = 1 \end{array}$$

El polinomio interpolador es:

$$p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

donde $y_0 = 2$, $y_1 = 3$, $y_2 = 1$. De esto resulta:

$$p(x) = 2 \cdot \frac{1}{3}(x-2)(x-4) + 3 \cdot (-\frac{1}{2})(x-1)(x-4) + 1 \cdot \frac{1}{6}(x-1)(x-2)$$

$$p(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 3x - \frac{1}{3}$$

Véase que, efectivamente:

$$p(x_0) = p(1) = -\frac{2}{3} + 3 - \frac{1}{3} = 2 = y_0$$

$$p(x_1) = p(2) = -\frac{2}{3} \cdot 4 + 3 \cdot 2 - \frac{1}{3} = 3 = y_1$$

$$p(x_2) = p(4) = -\frac{2}{3} \cdot 16 + 3 \cdot 4 - \frac{1}{3} = 1 = y_2$$

- b) Para hallar $p(2,5)$ bastaría con evaluar el polinomio del inciso a). Sin embargo puede calcularse $p(2,5)$ sin tener que encontrar previamente $p(x)$. Esta forma de proceder tiene la ventaja de que no es necesario realizar operaciones algebraicas, sino que todo el cálculo es puramente con números. Todo lo que se requiere es tomar $x = 2,5$ desde un principio.

$$L_0(2,5) = \frac{(2,5 - x_1)(2,5 - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(2,5 - 2)(2,5 - 4)}{(1 - 2)(1 - 4)} = -0,25$$

$$L_1(2,5) = \frac{(2,5 - x_0)(2,5 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(2,5 - 1)(2,5 - 4)}{(2 - 1)(2 - 4)} = -1,125$$

$$L_2(2,5) = \frac{(2,5 - x_0)(2,5 - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(2,5 - 1)(2,5 - 2)}{(4 - 1)(4 - 2)} = 0,125$$

$$p(2,5) = y_0 L_0(2,5) + y_1 L_1(2,5) + y_2 L_2(2,5) = 2(-0,25) + 3(1,125) + 1(0,125) = 3$$

Algoritmo en pseudo código

El algoritmo que sigue permite calcular $p(x)$ donde p es el polinomio interpolador y x es un valor numérico. El algoritmo funciona también si x es una variable pero en este caso será necesario realizar operaciones simbólicas (literales) de suma y multiplicación. Se suponen conocidos los nodos de interpolación: $x_0, x_1, \dots, x_n$ y los valores correspondientes de la función a interpolar: $y_0, y_1, \dots, y_n$. El resultado será un número $p(x)$ si x es un número o el polinomio $p(x)$ si x es un literal.

```

Resultado := 0
for i = 0 to n
    L := 1
    for j = 0 to n
        if j ≠ i then
            L := L ·  $\frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ 
        end
    end
    Resultado := Resultado + y_i · L
end
Terminar

```

Ejemplo 2

En la tabla 1 se muestran datos que corresponden a la función

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

evaluada para 13 valores equidistantes de x . En la figura 1 se muestra la gráfica de la función junto con los 13 puntos de la tabla. Suponga que la función $f(x)$ no se conoce, sino solamente los puntos de la tabla. Utilice interpolación polinomial para calcular aproximadamente $f(0,35)$ utilizando como nodos:

- a) $\{-0,6; -0,4; -0,2; 0; 0,2; 0,4; 0,6\}$
- b) $\{0,2; 0,3; 0,4; 0,5\}$

Compare los resultados obtenidos con el valor $f(0,35)$. Para explicar los resultados obtenidos, utilice las graficas de los polinomios interpoladores correspondientes a los nodos en a) y en b).

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
-0.6	0.100000	-0.1	0.800000	0.4	0.200000
-0.5	0.137931	0	1.000000	0.5	0.137931
-0.4	0.200000	0.1	0.800000	0.6	0.100000
-0.3	0.307692	0.2	0.500000		
-0.2	0.500000	0.3	0.307692		

Tabla 1

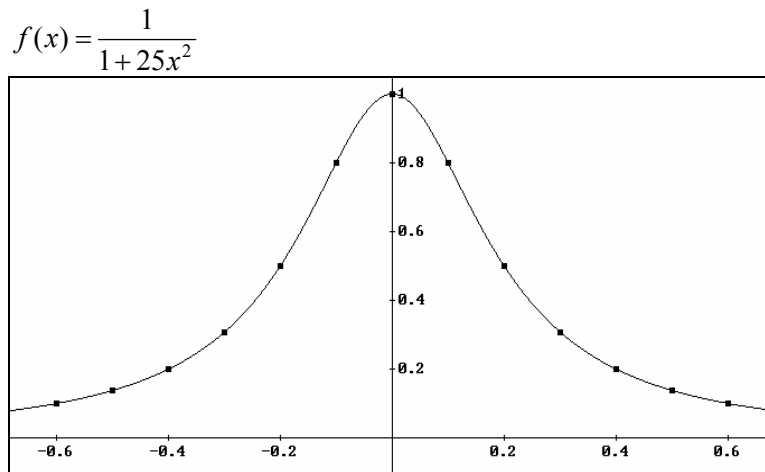


Figura 1

Solución:

- a) Utilizando los 7 nodos de interpolación $\{-0,6; -0,4; -0,2; 0; 0,2; 0,4; 0,6\}$, lo cual significa

interpolación de sexto grado, se obtiene como resultado: $p_1(0,35) = 0.159607$. El verdadero valor de la función para $x = 0,35$ es: $f(0,35) = 0.246154$. Se obtiene un error de interpolación tan grande que el valor interpolado no posee ni siquiera una cifra exacta.

- b) Utilizando los 4 nodos de interpolación $\{0,2; 0,3; 0,4; 0,5\}$, lo que quiere decir, interpolación de tercer grado, se obtiene $p_2(0,35) = 0.245307$, resultado cuyo error de interpolación es menor que 0,001.

La diferencia entre la forma de proceder en a) y en b) es que en el primer caso se tomaron muchos nodos y muy dispersos, algunos de ellos muy alejados del valor $x = 0,35$ donde se deseaba aproximar la función. En el inciso b), en cambio, se tomaron menos nodos, pero más concentrados en la proximidad de $x = 0,35$. En este caso, a pesar de que el polinomio interpolador es de menor grado, se obtiene un resultado mucho más exacto que en a).

Utilizando el método de Lagrange fueron obtenidos los polinomios de interpolación correspondientes a los incisos a) y b):

$$p_1(x) = -156,25x^6 + 93,75x^4 - 16x^2 + 1$$

$$p_2(x) = -6,498673x^3 + 10,079575x^2 - 5,728116x + 1,294030$$

En la figura 2 se muestran los 13 puntos de la tabla 1 y las graficas de los polinomios p_1 y p_2 cada una en el intervalo donde se encuentran sus nodos de interpolación.

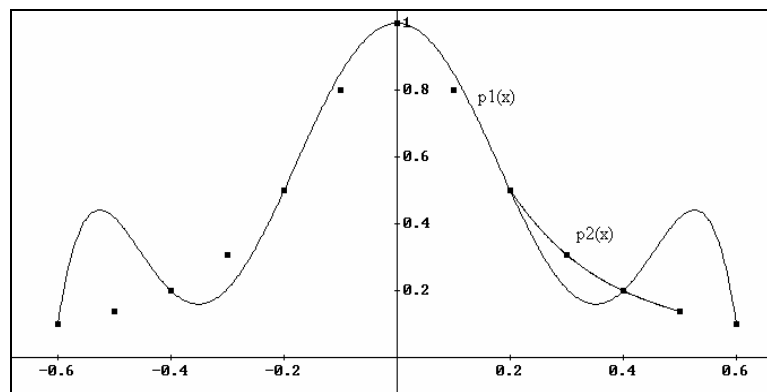


Figura 2

Aunque la función $f(x)$ fue seleccionada para este ejemplo porque en ella este efecto se aprecia con mucha claridad, la conclusión que se deriva tiene carácter general. La interpolación polinomial no debe usarse como una técnica global para representar a una función en un intervalo grande utilizando muchos nodos, todo lo contrario, se trata de un procedimiento para aproximar *localmente* una función mediante un polinomio. Por tanto, la estrategia debe ser seleccionar pocos nodos de interpolación concentrados en la región donde se desea aproximar la función. Si el intervalo en que se desea aproximar la función es muy extenso, en lugar de utilizar un polinomio interpolador de grado alto, siempre es preferible aproximar la función por varios polinomios cada uno en un pequeño tramo de la función. Esta estrategia, llamada interpolación por tramos será objeto de estudio en la sección 4.5.

Ejemplo 3

La tabla 2 muestra un conjunto de valores de la función exponencial $f(x) = e^x$ con incrementos 0,05. Halle aproximadamente $e^{1,07}$ utilizando interpolación de tercer grado. Halle una cota del error de interpolación y compárelo con el verdadero error de interpolación.

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,00	2,718282	1,10	3,004166	1,20	3,320117
1,05	2,857651	1,15	3,158193	1,25	3,490342

Tabla 2

Solución:

Para obtener interpolación de grado 3 se requieren 4 nodos. Como el punto en que se interpolará es $x = 1,07$ se tomarán los cuatro nodos más próximos: $\{1,00; 1,05; 1,10; 1,15\}$. El resultado se obtuvo con un programa confeccionado según el pseudo código del método de Lagrange. Se obtuvo:

$$p(1,07) = 2.915379$$

Para hallar una cota del error, se emplea la fórmula (7) de la sección 4.2:

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

Como $n=3$, se tiene que

$$R(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

Tomando en cuenta que $f^{(4)}(x) = e^x$ y que $x = 1,07$, resulta:

$$R(1,07) = \frac{e^c}{24} (1,07-1,00)(1,07-1,05)(1,07-1,10)(1,07-1,15)$$

Acerca del número c , solo se sabe que se encuentra en el intervalo $[1,00; 1,15]$. Como e^x es una función creciente, se tiene que:

$$e^c \leq e^{1,15} = 3,158193 < 3,16$$

Por tanto, $|R(1,07)| < \frac{3,16}{24} |(1,07-1,00)(1,07-1,05)(1,07-1,10)(1,07-1,15)| = 0,00000044$

Lo cual significa que el resultado obtenido posee seis cifras decimales exactas. A este error debido a la interpolación, habría que añadirle el error debido al redondeo de los datos (que han venido dados con seis cifras exactas); debido a esto, el resultado puede haber perdido una cifra decimal de exactitud. Usando una calculadora científica, el verdadero valor de la función es:

$$f(1,07) = 2.9153795$$

Es decir, que el verdadero error del resultado es 0,0000005, que es la suma del error de redondeo más el de interpolación.

Ejercicios

1. Se conocen los siguientes pares de valores de una función $y = f(x)$:

x	0	1	3	4	5
y	1	-3	25	149	381

- Aproxime y para $x = 2$ mediante interpolación lineal.
 - Aproxime y para $x = 2$ mediante interpolación cuadrática.
2. Se conocen valores de la función $f(x)$: $f(0) = 3$, $f(0,5) = 2$, $f(2) = 2$, $f(3) = 4$
- Halle aproximadamente $f(1)$ mediante interpolación cúbica (sin hallar el polinomio interpolador).
 - Halle el polinomio cúbico de interpolación correspondiente a los nodos dados.
3. A partir de los valores de la función $\tan x$ en los ángulos notables (en radianes): $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{3}$ determine, aproximadamente, la tangente de 1 radian y dé un estimado del error de interpolación cometido.
4. Halle el polinomio interpolador de la función $y = \sqrt{x}$ tomando como nodos de interpolación: 0, 1, 4 y 9. Con el polinomio hallado encuentre una aproximación para $\sqrt{2}$. Repita ahora la operación pero utilizando solamente los nodos 1, 4 y 9. Compare la exactitud de las aproximaciones obtenidas. ¿A qué conclusión usted llega?
5. Halle un polinomio interpolador de segundo grado que aproxime a la función $y = \cosh x$ en el intervalo $[0, 1]$ y dé una cota para el error de interpolación.
6. Halle un polinomio interpolador de tercer grado que aproxime a la función $y = \ln x$ en el intervalo $[1; 1,5]$ y dé una cota para el error de interpolación.
7. Dada la función $f(x) = x - \cos x$ (x en radianes) se construye la tabla

x	0	0,5	1
y	-1	-0,37758	0,45970

Tome los valores de y como nodos de interpolación y halle aproximadamente el valor de x para $y = 0$ (a esta forma de proceder se le llama *interpolación inversa* y aquí se está empleando para resolver aproximadamente la ecuación $x - \cos x = 0$). ¿Cómo podría mejorar la solución hallada mediante este mismo procedimiento?

8. Se sabe que la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales es un polinomio de tercer grado en n . Hállelo utilizando interpolación.

9. El algoritmo que sigue se supone que permita interpolar en un valor x conocidos los nodos de interpolación: $x_0, x_1, \dots, x_n$ y los valores correspondientes de la función a interpolar: $y_0, y_1, \dots, y_n$. Sin embargo, el algoritmo contiene un grave error. Detéctelo y corrija.

```

Resultado := 0
for i = 0 to n
  L := 1
  for j = 0 to n
    L := L *  $\frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ 
  end
  Resultado := Resultado +  $y_i \cdot L$ 
end
Terminar

```

10. Aunque por lo general la aceleración de los cuerpos en caída libre se toma como una constante $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, se sabe que su valor depende de varios factores, entre ellos la latitud geográfica y la altura sobre el nivel del mar. En la tabla que sigue se ofrecen los valores de g a nivel del mar para varias latitudes geográficas. Halle aproximadamente el valor de g en la ciudad de La Habana, que está a orillas del mar a 23° de latitud Norte.

Latitud	0°	10°	20°	30°	40°	50°
$g \text{ (m/s}^2\text{)}$	9,7803	9,7819	9,7863	9,7932	9,8017	9,8107

11. La viscosidad de un fluido se mide en poises: $1 \text{ poise} = 1 \frac{\text{gr}}{\text{cm} \cdot \text{s}}$. La viscosidad varía muy marcadamente con la temperatura. En la tabla que sigue se da la viscosidad (multiplicada por 10^5) del agua para algunas temperaturas. Halle aproximadamente la viscosidad del agua a 27 grados centígrados.

Temperatura ($^\circ\text{C}$)	10	15	20	25	30	40
Viscosidad por 10^5 (poises)	1307	1140	1004	895	803	655

12. Cuando un alambre eléctrico de cobre (forrado) conduce una corriente eléctrica excesiva durante un tiempo prolongado, se corre el riesgo de que se dañe y puede, incluso, provocar un accidente. La siguiente tabla da los valores de corriente (en ampere) permisibles durante una operación prolongada para conductores de cobre de diferente sección transversal (en milímetros cuadrados). Halle aproximadamente, la corriente permisible para un alambre de cobre de 2 mm^2 de sección transversal.

Área de la sección transversal (mm^2)	1	1,5	2,5	4	6
Corriente permisible (ampere)	11	14	20	25	31

4.4 El método de Newton

La idea fundamental del método de Newton es realizar la interpolación en un punto de forma sucesiva: partiendo de dos nodos ir agregando los demás, uno por uno, en el orden que se desee, de tal manera que en cada paso solo se requiera agregar un nuevo término a los cálculos precedentes. El método permite, sin realizar ninguna operación adicional, ir obteniendo en cada paso del proceso una estimación del error de interpolación, de manera que el proceso iterativo se pueda detener si se alcanza un error suficientemente pequeño.

Sea $f(x)$ la función a interpolar, $p_{n-1}(x)$ el polinomio interpolador (de grado menor o igual que $n - 1$) correspondiente a los nodos $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ y $p_n(x)$ al polinomio interpolador (de grado menor o igual que n) que corresponde a los nodos $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$. Se supone, igual que hasta ahora, que todos los nodos de interpolación son diferentes, aunque no tienen que estar ordenados de ninguna forma. Con el propósito de simplificar la notación, se llamará $y_i = f(x_i)$ para $i = 0, 1, 2, \dots$.

Como el grado de $p_n(x)$ es menor o igual que n y el de $p_{n-1}(x)$ es menor o igual que $n - 1$, se tiene que:

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + C_n(x) \quad (1)$$

donde $C_n(x)$ es algún polinomio de grado menor o igual que n . Por otra parte, como ambos polinomios interpolan a $f(x)$ se tiene que:

$$\begin{array}{ll} p_{n-1}(x_0) = y_0 & p_n(x_0) = y_0 \\ p_{n-1}(x_1) = y_1 & p_n(x_1) = y_1 \\ \vdots & \vdots \\ p_{n-1}(x_{n-1}) = y_{n-1} & p_n(x_{n-1}) = y_{n-1} \\ & p_n(x_n) = y_n \end{array}$$

Como, según (1), $C_n(x) = p_n(x) - p_{n-1}(x)$,

resulta que: $C_n(x_0) = C_n(x_1) = C_n(x_2) = \dots = C_n(x_{n-1}) = 0$

El hecho de que $C_n(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que n asegura que no puede tener más que estos n ceros. Por esta razón será:

$$C_n(x) = a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

con lo cual la expresión (1) toma la forma:

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \quad (2)$$

El coeficiente a_n queda determinado por la condición:

$$p_n(x_n) = y_n$$

Con el objetivo de llegar a una formulación general es conveniente comenzar a partir de $n = 1$. En ese caso la expresión (2) es:

$$p_1(x) = p_0(x) + a_1(x - x_0) \quad (3)$$

donde $p_0(x)$ es un polinomio de grado cero (una constante) determinado por un solo nodo; esto es:

$$p_0(x) = y_0$$

y a_1 se halla a partir de:

$$p_1(x_1) = y_1$$

Evalutando para $x = x_1$ en la fórmula (3):

$$y_1 = y_0 + a_1(x_1 - x_0)$$

de donde:

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

El cociente anterior se denomina primera diferencia dividida de la función f para los puntos x_0 y x_1 y se denota $f[x_0, x_1]$, esto es:

$$f[x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Con esta notación, la ecuación (3) se transforma en:

$$p_1(x) = p_0(x) + f[x_0, x_1](x - x_0) \quad (4)$$

Para obtener el polinomio $p_2(x)$ se llevará a cabo un procedimiento similar:

$$p_2(x) = p_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \quad (5)$$

y como

$$p_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

resulta:

$$p_2(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Evalutando para $x = x_2$:

$$y_2 = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

de donde, restando y sumando y_1 , se obtiene:

$$a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2 - y_1 + y_1 - y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)$$

Agrupando términos:

$$a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2 - y_1 + (y_1 - y_0) \left[1 - \frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0} \right]$$

$$\text{Efectuando: } a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2 - y_1 - (y_1 - y_0) \left[\frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0} \right]$$

$$\text{Dividiendo por } (x_2 - x_1): a_2(x_2 - x_0) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]$$

y, finalmente:

$$a_2 = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

A esta diferencia dividida de dos primeras diferencias divididas de f , se le llama segunda diferencia dividida de f para los puntos x_0, x_1, x_2 y se denotará por $f[x_0, x_1, x_2]$; es decir:

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

De acuerdo con esto, la ecuación (5) se expresa ahora por:

$$p_2(x) = p_1(x) + f[x_0, x_1, x_2] (x - x_0)(x - x_1)$$

Repitiendo este proceso se llega, en general, a:

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_n] (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \quad (6)$$

donde, las diferencias divididas de cualquier orden se definen recursivamente por:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \quad k = 1, 2, 3, \dots, n \quad (7)$$

La expresión $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ se lee “diferencia dividida de orden k de f respecto a los nodos $x_0, x_1, \dots, x_k$ ”. Aplicando reiteradamente la fórmula (6), se obtiene para el polinomio interpolador una sugestiva expresión:

$$p_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1] (x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2] (x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ \cdots + f[x_0, x_1, \dots, x_n] (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \quad (8)$$

que guarda una interesante analogía con el desarrollo de una función en polinomios de Taylor.

Cuando se trabaja manualmente resulta cómodo organizar los datos como muestra la tabla 1 para calcular las diferencias divididas necesarias.

x	$f(x)$	1ª dif.	2ª dif.	3ª dif.
x_0	$f(x_0)$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_1	$f(x_1)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$
x_2	$f(x_2)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_2, x_3, x_4]$	$f[x_2, x_3, x_4, x_5]$
x_3	$f(x_3)$	$f[x_3, x_4]$	$f[x_3, x_4, x_5]$	$f[x_3, x_4, x_5, x_6]$
x_4	$f(x_4)$	$f[x_4, x_5]$	$f[x_4, x_5, x_6]$	$\vdots$
x_5	$f(x_5)$	$f[x_5, x_6]$	$\vdots$	
x_6	$f(x_6)$	$\vdots$		
$\vdots$	$\vdots$			

Tabla 1

Nótese que las diferencias necesarias para la aplicación de las fórmula (6) u (8) del método de Newton, aparecen en la tabla 1 en una misma fila, como la que aparece señalada en negritas.

Estimación del error de interpolación

El error de interpolación cometido cuando se utiliza el método de Newton, es el mismo que cuando se usa cualquier otro método, ya que el polinomio interpolador es único para un conjunto de nodos y una función dados. Por tanto, se puede usar la fórmula (7) deducida en la sección 4.2:

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

Sin embargo, es más eficiente utilizar una expresión equivalente que puede calcularse directamente utilizando la tabla de diferencias divididas y no requiere el cálculo de derivadas, aunque se supone, igual que antes, que $f(x)$ posee derivadas hasta el orden $n+1$ en un intervalo que incluye a todos los valores de x involucrados en la deducción que sigue.

Sea $p_n(x)$ el polinomio interpolador correspondiente a los nodos $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Se desea calcular o por lo menos estimar, el error de interpolación de $p_n(x)$ en el punto $\hat{x}$:

$$R_n(\hat{x}) = f(\hat{x}) - p_n(\hat{x})$$

Considérese ahora el polinomio interpolador de grado menor o igual que $n+1$ que corresponde a los $n+2$ nodos $\{x_0, x_1, \dots, x_n, \hat{x}\}$. De acuerdo con la fórmula (6):

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, \hat{x}] (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \quad (9)$$

Como $\hat{x}$ es uno de los nodos de interpolación del polinomio $p_{n+1}(x)$, se cumple que:

$$p_{n+1}(\hat{x}) = f(\hat{x}) \quad (10)$$

Por tanto, haciendo $x = \hat{x}$ en (9) y tomando en cuenta (10):

$$f(\hat{x}) = p_n(\hat{x}) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, \hat{x}] (\hat{x}-x_0)(\hat{x}-x_1)\cdots(\hat{x}-x_n)$$

Por tanto:
$$R_n(\hat{x}) = f(\hat{x}) - p_n(\hat{x}) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, \hat{x}] (\hat{x}-x_0)(\hat{x}-x_1)\cdots(\hat{x}-x_n)$$

Como en esta expresión, $\hat{x}$ representa un número arbitrario, no existe inconveniente por cambiarlo por x . Esto es:

$$R_n(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \quad (11)$$

La fórmula (11) brinda el valor exacto del error de interpolación del polinomio $p_n(x)$ pero su valor no es calculable pues calcular la diferencia dividida $f[x_0, x_1, \dots, x_n, x]$ requeriría conocer $f(x)$ lo cual carece de sentido pues, precisamente se quiere calcular $p_n(x)$ porque no se dispone de $f(x)$. Si

en esta diferencia dividida se toma x_{n+1} en lugar de $\hat{x}$ se obtiene una aproximación del error de interpolación. Por tanto, se define:

$$\tilde{R}_n(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \quad (12)$$

y puede esperarse que, si las diferencias divididas de orden $n + 1$ no son funciones que experimenten grandes cambios, se cumpla la aproximación:

$$\tilde{R}_n(x) \approx R_n(x)$$

Si la fórmula (6) se compara con la (12) entonces aquella se puede escribir como:

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + \tilde{R}_n(x) \quad (13)$$

Es decir, el error estimado para $p_n(x)$, sumado a $p_n(x)$ da la aproximación $p_{n+1}(x)$, lo cual hace sumamente cómodo y eficiente el modo de estimar el error de interpolación cuando se utiliza el método de Newton.

Debe tenerse cuidado al ordenar los nodos para formar la tabla de diferencias divididas si se desea que las sucesivas aproximaciones que se van obteniendo tengan la mejor calidad. Así, si se desea que la aproximación $p_1(x)$ sea una buena aproximación, los nodos x_0 y x_1 deben ser escogidos de modo que estén lo más cerca posible y que entre ellos se encuentre el valor x donde se ha de interpolar. El nodo x_2 se tomará de tal modo que el conjunto $\{x_0, x_1, x_2\}$ esté lo más cerca posible del valor x y similarmente con los demás nodos que se incluyan en la tabla. De no procederse así, puede suceder que algunas de las aproximaciones obtenidas en los pasos sucesivos del algoritmo correspondan a extrapolaciones en lugar de interpolaciones y se obtengan errores de interpolación muy exagerados.

Ejemplo 1

La tabla 2 reproduce a otra mostrada en la sección 4.1 y que contiene algunos valores de la función gamma. Utilizando esta tabla obtenga $\Gamma(1,17)$ con un error de interpolación menor que 0,00005 (cuatro cifras decimales exactas).

a	$\Gamma(a)$	a	$\Gamma(a)$	a	$\Gamma(a)$
1,00	1,00000	1,35	0,89115	1,70	0,90865
1,05	0,97350	1,40	0,88726	1,75	0,91906
1,10	0,95135	1,45	0,88565	1,80	0,93138
1,15	0,93304	1,50	0,88623	1,85	0,94561
1,20	0,91817	1,55	0,88887	1,90	0,96177
1,25	0,90640	1,60	0,89352	1,95	0,97988
1,30	0,89747	1,65	0,90012	2,00	1,00000

Tabla 2

Solución:

Como la interpolación nunca se hará con polinomios de grado alto, no es necesario incluir muchos nodos para formar la tabla de diferencias, se tomarán en este caso 6 nodos próximos a 1,17 y ordenados convenientemente: {1,15; 1,20; 1,10; 1,25; 1,05; 1,30}. La tabla 3 muestra las diferencias obtenidas en este caso. Realmente, no es necesario construir toda la tabla de una vez, es preferible ir calculando las diferencias en la medida en que van siendo necesarias. Aquí, por un problema de espacio, se muestran todas las diferencias, hasta la de quinto orden.

x	$f(x)$	1ª dif	2ª dif	3ª dif	4ª dif	5ª dif
1,15	0,93304	– 0,29740	0,68800	– 0,45333	0,40000	0,53333
1,20	0,91817	– 0,33180	0,64267	– 0,49333	0,48000	
1,10	0,95135	– 0,29967	0,71667	– 0,44533		
1,25	0,90640	– 0,33550	0,62760			
1,05	0,97350	– 0,30412				
1,30	0,89747					

Tabla 3

En la tabla aparecen en negrita las diferencias que se utilizarán en cada paso del algoritmo.

Aproximación con polinomio de grado 1:

$$p_1(x) = p_0(x) + f[x_0, x_1](x - x_0) = 0,93304 + (-0,29790)(1,17 - 1,15) = 0,92708$$

$$\tilde{R}_1(x) = f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) = (0,68800)(1,17 - 1,15)(1,17 - 1,20) = -0,00041$$

Como este error es muy grande, se calculará la siguiente aproximación:

Aproximación con polinomio de grado 2:

$$p_2(x) = p_1(x) + \tilde{R}_1(x) = 0,92708 - 0,00041 = 0,92667$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_2(x) &= f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = \\ &= (-0,45333)(1,17 - 1,15)(1,17 - 1,20)(1,17 - 1,10) = 0,00002 \end{aligned}$$

Como el error es suficientemente pequeño, se tomará $p_2(x)$ como la aproximación buscada. No obstante, puesto que ya se tiene calculada la estimación del error, puede utilizarse para tener un resultado aun mejor, solamente sumándolo a $p_2(x)$. Se toma pues:

$$\Gamma(1,17) = 0,92669$$

con cuatro cifras decimales exactas. El valor de $\Gamma(1,17)$ con 5 cifras decimales exactas que aparece en una tabla es 0,92670.

Relación entre diferencias y derivadas

Si se compara la fórmula (7) de la sección 4.2:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

con la fórmula (11): $R_n(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$

resulta claro que
$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x]$$

Si se considera que x es el nodo número $n+1$ ($x = x_{n+1}$) y se toma $m = n+1$, la ecuación anterior queda como:

$$\frac{f^{(m)}(c)}{m!} = f[x_0, x_1, \dots, x_m] \quad (14)$$

lo cual significa que existe algún número c en el intervalo I que incluya a todos los nodos $\{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ donde la derivada de orden m es exactamente $m!$ veces la diferencia dividida que corresponde a esos nodos. Una consecuencia importante de esta relación entre diferencias divididas y derivadas, es el siguiente teorema:

Teorema 1

Las diferencias divididas de orden m de un polinomio de grado m son constantes (es decir, no dependen de los nodos seleccionados) y las de orden mayor que m son nulas.

Demostración:

En efecto, si p_m es un polinomio de grado m y $\{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ son $m+1$ nodos cualesquiera, entonces, de acuerdo con la igualdad (14), existe un punto c tal que:

$$\frac{p_m^{(m)}(c)}{m!} = p_m[x_0, x_1, \dots, x_m]$$

pero como la derivada de orden m de un polinomio de grado m es una constante K (no depende de x) entonces, no importa el valor de c :

$$p_m[x_0, x_1, \dots, x_m] = \frac{K}{m!}$$

independientemente de los nodos utilizados. Al ser iguales todas las diferencias divididas de orden m , las diferencias de orden $m+1$ son todas cero y lo mismo sucede entonces con todas las de orden superior. ■

El resultado anterior se utiliza frecuentemente para detectar si un conjunto de pares (x, y) corresponden a una función polinómica; en efecto, si este es el caso, entonces alguna columna de la tabla de diferencias se hace constante y las siguientes se anulan. El orden de las diferencias

constantes indica el grado del polinomio de que se trata. Con un poco de imaginación, la idea se puede extender a funciones que no son polinómicas pero se *aproximan* a un polinomio de grado m ya que en ese caso la columna de las diferencias de grado m se hace *aproximadamente* constante.

Ejemplo 2

Investigue si los datos que muestra la tabla 4 se aproximarán adecuadamente con algún polinomio.

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
2,0	3	4,0	107	5,5	336
2,5	14	4,5	165	6,0	451
3,0	34	5,0	240	6,5	591
3,5	64				

Tabla 4

Solución:

La tabla 5 muestra las diferencias divididas hasta el orden 5. Note que las diferencias de orden 1 y 2 muestran una clara tendencia creciente a medida que x crece. La columna correspondiente a las diferencias de tercer orden, en cambio oscila en un intervalo pequeño. Puede entonces afirmarse que la función se comporta aproximadamente como un polinomio de tercer grado y, por lo tanto sus valores serán bien aproximados utilizando interpolación polinómica de tercer grado.

x	$f(x)$	1ª dif	2ª dif	3ª dif	4ª dif	5ª dif
2,0	3	22	18	1,333	1,333	-0,800
2,5	14	40	20	4,000	-0,667	0,267
3,0	34	60	26	2,667	0,000	0,267
3,5	64	86	30	2,667	0,667	-0,888
4,0	107	116	34	4,000	-1,333	1,067
4,5	165	150	40	1,333	1,333	
5,0	240	190	42	4,000		
5,5	336	232	48			
6,0	451	280				
6,5	591					

Tabla 5

Algoritmo en pseudo código

El algoritmo que sigue permite calcular $p(x)$ donde p es el polinomio interpolador y x es un valor numérico. Se suponen conocidos los nodos de interpolación: $x_0, x_1, \dots, x_n$, los valores correspondientes de la función a interpolar: $y_0, y_1, \dots, y_n$, el número x donde se desea interpolar y la tolerancia ε del error de interpolación la cual debe ser mucho mayor que el error por redondeo,

o por otras causas, que contengan los datos. El resultado será el número $p(x)$ y el error de interpolación estimado.

```

for  $i = 0$  to  $n$  {En este lazo, los valores de la función se transfieren al arreglo  $d_i$ 
     $d_i := f(x_i)$ 
end

for  $i = 1$  to  $n$  {A la salida de este lazo, cada variable  $d_i$  contiene la diferencia dividida
    de orden  $i$  que corresponde a la primera fila de la tabla de diferencias}
     $j := n$ 
    repeat
         $d_j := \frac{d_j - d_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}$ 
         $j := j - 1$ 
    until  $j < i$ 
end
 $p := d_0$ 
 $producto := (x - x_0)$ 
 $error := d_1 \cdot producto$ 
 $i := 1$ 
do while  $error > \varepsilon$  and  $i < n$  {El algoritmo termina cuando el error estimado es menor
    que la tolerancia o cuando el grado de interpolación se
    hace muy alto}
     $p := p + error$ 
     $producto := producto \cdot (x - x_i)$ 
     $i := i + 1$ 
     $error := d_i \cdot producto$ 
end
El resultado de la interpolación es  $p$  con error estimado de  $error$ 
Terminar

```

Ejercicios

1. Dada la siguiente tabla de valores de la función $f(x)$, obtenga $f(0,38)$ y $f(0,5)$ con tres cifras decimales exactas. Recuerde en cada caso ordenar la tabla adecuadamente.

x	0,30	0,35	0,40	0,48	0,55	0,60
$f(x)$	1,23114	1,27456	1,31951	1,39474	1,46409	1,51572

2. A partir de la siguiente tabla de la función de Bessel de orden cero, obtenga una con incremento 1 en x en el intervalo $[1, 5]$ con dos cifras decimales exactas. Tenga presente en cada caso, la forma más conveniente de ordenar la tabla.

x	0,0	0,8	1,5	2,2	3,0	3,6	4,4	5,0
$f(x)$	1.0000	0,8463	0,5118	0,1104	-0,2601	-0,3918	-0,3423	-0,1776

3. A partir de los valores de la función $\cos x$ en los ángulos notables (0° , 30° , 45° , 60° , 90°) construya una tabla de cosenos con incrementos de 10° con dos cifras decimales exactas. Tenga presente en cada caso, la forma más conveniente de ordenar la tabla.
4. Un programa para la inversión de matrices ha demorado los siguientes tiempos al aplicarse a matrices de diferentes órdenes:

Orden de la matriz	5	7	9	10	12	14	15	20
Tiempo (s)	14	44	97	133	232	368	452	1067

Se sabe que el tiempo de ejecución del algoritmo empleado varía polinomialmente con el orden de la matriz. Mediante una tabla de diferencias divididas halle de que grado es este polinomio.

5. Las imágenes de la función $f(x) = (1,5)^x$ son muy fáciles de hallar si x es entero y positivo. Utilice este hecho y un proceso de interpolación para hallar aproximadamente $f(2,7)$ con dos cifras decimales exactas.
6. La probabilidad de que una variable aleatoria con distribución normal, media cero y varianza 1, sea, en valor absoluto, menor que x , viene dada por la integral:

$$\Phi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

Esta integral no puede ser calculada por métodos analíticos. En el capítulo 5 se estudiarán los métodos numéricos para calcularla. Por esa vía se calculan y tabulan los valores de probabilidad para valores de x con incremento de 0,1, tal como muestra el segmento de tabla que sigue. Halle $\Phi(0,323)$ con tres cifras decimales exactas.

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,30	0,2358	0,33	0,2586	0,36	0,2812
0,31	0,2434	0,34	0,2661	0,37	0,2886
0,32	0,2510	0,35	0,2737	0,38	0,2961

7. Para hallar la longitud de la elipse

$$\begin{aligned} x &= 3 \cos t \\ y &= 4 \sin t \end{aligned} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

mediante la fórmula:

$$L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

se llega a la expresión:

$$L = 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{7}{16}\right) \sin^2 t} dt$$

donde aparece una integral elíptica de segunda especie:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 t} \, dt$$

$$0 < k < 1$$

las cuales vienen tabuladas para diferentes valores del parámetro $\alpha = \arcsen k$. A continuación se reproduce un fragmento de dicha tabla. Utilice interpolación para calcular la longitud de la elipse con tres cifras decimales exactas.

$\alpha = \arcsen k$	39°	40°	41°	42°	43°	44°
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 t} \, dt$	1,4013	1,3931	1,3849	1,3765	1,3680	1,3594

8. El calor específico de un material es la cantidad de calor (en calorías) que se necesita para elevar un grado centígrado la temperatura de un gramo del material. El calor específico de un material depende de la temperatura. En la tabla que sigue se da el calor específico c_p del agua a diferentes temperaturas. Calcule, con cuatro cifras decimales exactas el calor específico del agua a 14 °C.

Temperatura (°C)	0°	5°	10°	15°	20°	30°
c_p (cal/g·grado)	1,0104	1,0063	1,0033	1,0013	1,0000	0,9986

9. En el algoritmo en pseudo código del método de Newton, se utilizó el segmento que sigue para calcular las diferencias divididas que este método requiere.

```

for  $i = 1$  to  $n$     {A la salida de este lazo, cada variable  $d_i$  contiene la diferencia dividida
                        de orden  $i$  que corresponde a la primera fila de la tabla de diferencias}
     $j := n$ 
    repeat
         $d_j := \frac{d_j - d_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}$ 
         $j := j - 1$ 
    until  $j < i$ 
end

```

Explique cómo funciona este segmento del algoritmo.

10. La tensión superficial de un líquido varía en general con la temperatura y viene tabulada en los manuales. La tabla que sigue muestra la tensión superficial del alcohol etílico (en dinas por centímetro) para diferentes temperaturas. Halle la tensión superficial del alcohol etílico a 34 °C y dé un estimado del error debido a la interpolación.

Temperatura (°C)	0°	30°	60°	90°	120°	150°
Tensión superficial (dina/cm)	24,4	21,9	19,2	16,4	13,4	10,1

11. El sonido se refleja en las superficies de diferente manera según el material de que están formadas. El coeficiente de absorción del sonido se define como el cociente de la energía absorbida entre la energía que incide sobre la superficie reflectante. El coeficiente de absorción varía con la frecuencia del sonido. En la tabla que sigue se ofrece el coeficiente de absorción de una pared de ladrillos para diferentes frecuencias. Determine el coeficiente de absorción de este material para un sonido de 440 ciclo/s (que corresponde a la nota La del centro del teclado del piano). Dé un estimado del error de interpolación.

Frecuencia (ciclo/s)	125	250	500	1000	2000	4000
Coeficiente de absorción	0,024	0,025	0,032	0,041	0,049	0,07

4.5 Interpolación mediante splines

El problema de la interpolación global

Ya en la sección 4.3 (vea el ejemplo 2 de esa sección) se llegó a la conclusión de que la interpolación polinomial no es una técnica adecuada para representar globalmente una función en un intervalo largo, todo lo contrario, se trata de un procedimiento para buscar un polinomio de grado reducido, que represente localmente a una función de forma adecuada dentro de un pequeño intervalo. Sin embargo, a veces se presenta la necesidad de aproximar globalmente una función, de la cual se conocen valores aislados, mediante una función sencilla. Ya esto fue visto en el ejemplo 3 de la sección 4.1 donde se deseaba aproximar el perfil de una pieza mediante una curva suave. En la construcción de gráficos por computadora, este problema se presenta con gran frecuencia.

Una solución muy elemental al problema de la interpolación global es descomponerla en varios problemas de interpolación local. Por ejemplo, si se desea hallar una función interpoladora de $f(x)$ para los nueve nodos ordenados $\{x_0, x_1, \dots, x_8\}$ el problema se puede descomponer en cuatro problemas sencillos: hallar cuatro polinomios interpoladores, cada uno de grado menor o igual que dos, para los conjuntos de nodos $\{x_0, x_1, x_2\}$, $\{x_2, x_3, x_4\}$, $\{x_4, x_5, x_6\}$, $\{x_6, x_7, x_8\}$. En este caso, la gráfica de la función interpoladora, como muestra la figura 1, estará formada por cuatro arcos

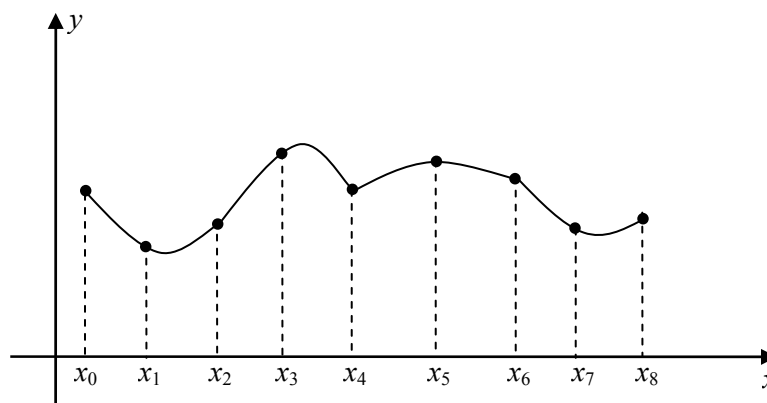


Figura 1

de parábolas de eje vertical; como dos arcos consecutivos comparten un nodo, los cuatro arcos formarán una curva continua que puede usarse para representar la función $f(x)$. Cada polinomio local se determina por cualquiera de los métodos vistos en las secciones anteriores, de modo que no se requiere ninguna teoría adicional para realizar este enfoque. Sin embargo, ya el lector habrá observado que la función que resulta no es suave, es decir, en los nodos que separan un polinomio local de otro, se produce un cambio de derivada, que se presenta en la gráfica como un punto anguloso. En algunos casos esto carece de importancia pero muchas veces se requiere obtener una curva que, además de continua, sea suave (derivada continua) e incluso que posea continuidad en la curvatura (segunda derivada continua). Si es así, este enfoque resulta insatisfactorio.

Funciones spline

En términos muy generales, una función spline es una función polinomial por tramos que es continua y posee derivadas continuas hasta un cierto orden. Además de las condiciones de continuidad y suavidad, el spline deberá satisfacer algunas otras condiciones adecuadas al problema que se desea resolver: pasar por un conjunto de puntos de la gráfica de $f(x)$ (spline interpolador), aproximarse a un conjunto de puntos experimentales (spline de mejor ajuste), cumplir ciertos requerimientos estéticos y además en cuanto al valor en algunos puntos de control (problemas de diseño gráfico), etc. Para lograr todas estas condiciones, el spline contiene un conjunto de parámetros cuyos valores se escogen de forma que se satisfagan todas las condiciones deseadas. Para precisar ideas, supóngase un conjunto de $n + 1$ números ordenados en forma creciente $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ y que se utilicen polinomios de grado k , entonces el spline $s(x)$ es una función de la forma:

$$s(x) = \begin{cases} p_1(x) & \text{si } x_0 \leq x < x_1 \\ p_2(x) & \text{si } x_1 \leq x < x_2 \\ \vdots & \\ p_n(x) & \text{si } x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

donde $p_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) representa un polinomio de grado k . Como un polinomio de grado k posee $k + 1$ coeficientes, el spline en su conjunto posee $n(k + 1)$ coeficientes y podrá satisfacer esa misma cantidad de condiciones siempre que las mismas no encierren contradicciones que las hagan incompatibles. El hecho de que $s(x)$ debe ser continua en todos los nodos interiores $\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$ representan ya $n - 1$ condiciones. Para lograr que el spline posea además varias derivadas continuas es necesario tomar un grado k lo suficientemente elevado de manera que la cantidad de parámetros permita satisfacer todas las condiciones requeridas.

Dado el interés limitado de este texto, aquí solo se considerará el spline como función de interpolación y formado por polinomios de grado menor o igual que 3, es decir, el spline cúbico interpolador. En la bibliografía recomendada al final de este capítulo se incluyen referencias a otras fuentes donde aparecen tratados los splines con otros objetivos.

El spline cúbico de interpolación

Considérese que para cada uno de los $n + 1$ nodos ordenados en forma creciente $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ se conoce el valor de una función $f(x)$. Sea

$$y_i = f(x_i) \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

y se necesita que el spline satisfaga las condiciones de interpolación global:

$$s(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

Como se trata de un spline cúbico, su expresión analítica será:

$$s(x) = \begin{cases} a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 & \text{si } x_0 \leq x < x_1 \\ a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2 & \text{si } x_1 \leq x < x_2 \\ \vdots & \\ a_nx^3 + b_nx^2 + c_nx + d_n & \text{si } x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases} \quad (2)$$

Aquí se está suponiendo que los nodos de interpolación coinciden con los puntos que limitan los tramos del spline; en un enfoque más general, esto no tendría que ser así. Sin embargo este es el caso más simple y más frecuente y a él se limitará este análisis. En la bibliografía recomendada puede hallar referencias para un tratamiento más amplio del problema de interpolación.

Como cada uno de los n polinomios de tercer grado que conforman el spline posee cuatro coeficientes, el spline posee $4n$ coeficientes los cuales permiten satisfacer, como se verá a continuación, las siguientes condiciones:

- Condiciones de interpolación: $s(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$
- Condiciones de continuidad: $s(x)$ es continua en $x_i \quad i = 1, 2, \dots, n-1$
- Condiciones de suavidad: $s'(x)$ es continua en $x_i \quad i = 1, 2, \dots, n-1$
 $s''(x)$ es continua en $x_i \quad i = 1, 2, \dots, n-1$

Estas condiciones suman en total $4n - 2$ lo que significa que aun se cuenta con la posibilidad de imponer otras dos condiciones al spline, lo cual se suele hacer de diversas maneras para lograr diferentes propósitos. Estas dos condiciones se impondrán más adelante.

Para encontrar las fórmulas que determinan a $s(x)$ se seguirá el procedimiento de ir imponiendo sucesivamente las condiciones de interpolación, continuidad y suavidad, aunque no en ese orden. Se utilizará la siguiente notación:

$$M_i = s''(x_i) \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

es decir, $M_0, M_1, \dots, M_n$, representará el valor de la segunda derivada del spline en los nodos de interpolación y $h_0, h_1, \dots, h_{n-1}$, las longitudes de los tramos en que están definidos los n polinomios del spline.

La deducción que sigue, se enmarca en el tramo número i donde

$$x_i \leq x \leq x_{i+1} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Como en este tramo $s(x)$ es un polinomio cúbico, su segunda derivada es una función lineal que toma valores

$$s''(x_i) = M_i \quad \text{y} \quad s''(x_{i+1}) = M_{i+1} \quad (3)$$

es decir:

$$s''(x) = \frac{(x_{i+1} - x)M_i + (x - x_i)M_{i+1}}{h_i} \quad (4)$$

Compruebe el lector que esta es una función lineal y que satisface las condiciones (3). Nótese también que, como en cada tramo sucede algo similar, la función en el intervalo $[x_0, x_n]$ es una poligonal continua, como muestra la figura 2. Esto significa que ya ha quedado satisfecha la condición de continuidad de la segunda derivada del spline.

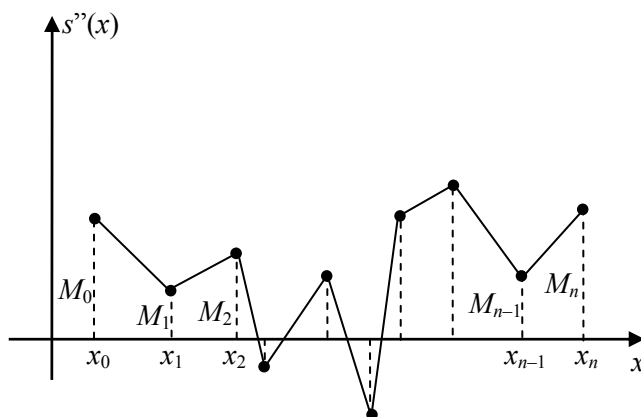


Figura 2

Si se integra indefinidamente cada miembro de la ecuación (4), puede obtenerse, salvo una constante arbitraria K_1 la función $s'(x_i)$ en el intervalo $x_i \leq x \leq x_{i+1}$

$$s'(x) = \frac{1}{h_i} \int [(x_{i+1} - x)M_i + (x - x_i)M_{i+1}] dx$$

$$s'(x) = -\frac{1}{2h_i} (x_{i+1} - x)^2 M_i + \frac{1}{2h_i} (x - x_i)^2 M_{i+1} + K_1$$

Integrando de nuevo se obtiene, siempre en el intervalo $x_i \leq x \leq x_{i+1}$:

$$s(x) = -\frac{1}{2h_i} \int (x_{i+1} - x)^2 M_i dx + \frac{1}{2h_i} \int (x - x_i)^2 M_{i+1} dx + \int K_1 dx$$

$$s(x) = \frac{1}{6h_i} (x_{i+1} - x)^3 M_i + \frac{1}{6h_i} (x - x_i)^3 M_{i+1} + K_1 x + K_2 \quad (5)$$

Si en la ecuación (5) se imponen las condiciones

$$s(x_i) = y_i \quad \text{y} \quad s(x_{i+1}) = y_{i+1}$$

serán satisfechas las condiciones de interpolación y de continuidad de $s(x)$; de esta forma se hallan las constantes K_1 y K_2 . En efecto:

$$s(x_i) = \frac{1}{6h_i}(x_{i+1} - x_i)^3 M_i + \frac{1}{6h_i}(x_i - x_i)^3 M_{i+1} + K_1 x_i + K_2$$

de donde:
$$y_i = \frac{1}{6} h_i^2 M_i + K_1 x_i + K_2 \quad (6)$$

$$s(x_{i+1}) = \frac{1}{6h_i}(x_{i+1} - x_{i+1})^3 M_i + \frac{1}{6h_i}(x_{i+1} - x_i)^3 M_{i+1} + K_1 x_{i+1} + K_2$$

es decir:
$$y_{i+1} = \frac{1}{6} h_i^2 M_{i+1} + K_1 x_{i+1} + K_2 \quad (7)$$

Las ecuaciones (6) y (7) forman un sistema lineal en K_1 y K_2 que se resuelve fácilmente. Se obtiene:

$$K_1 = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i(M_{i+1} - M_i)}{6}$$

$$K_2 = \frac{y_i x_{i+1} - y_{i+1} x_i}{h_i} - \frac{h_i(M_{i+1} x_{i+1} - M_i x_i)}{6}$$

Sustituyendo estos valores de K_1 y K_2 en la expresión (5) y agrupando términos, se llega a:

$$s(x) = \frac{(x_{i+1} - x)^3 M_i + (x - x_i)^3 M_{i+1}}{6h_i} + \frac{(x_{i+1} - x)y_i + (x - x_i)y_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i[(x_{i+1} - x)M_i + (x - x_i)M_{i+1}]}{6}$$

para $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ (8)

A los efectos de la evaluación de $s(x)$ es preferible, para disminuir el número de operaciones, definir las variables u y v como:

$$u = x - x_i \quad \text{y} \quad v = x_{i+1} - x$$

y entonces, en forma más compacta:

$$s(x) = \frac{v^3 M_i + u^3 M_{i+1}}{6h_i} + \frac{vy_i + uy_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i(vM_i + uM_{i+1})}{6} \quad (9)$$

Para satisfacer las condiciones de continuidad de $s'(x)$ se requiere que, en cada uno de los nodos interiores x_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) la derivada lateral por la izquierda y la derivada lateral por la derecha coincidan. Como la fórmula (8) da la ecuación de $s(x)$ en el intervalo $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, derivando esta función y evaluando en x_i se obtiene la derivada lateral en x_i por la derecha, esto es:

$$s'(x) = \frac{-(x_{i+1} - x)^2 M_i + (x - x_i)^2 M_{i+1}}{2h_i} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i(M_{i+1} - M_i)}{6} \quad \text{para } x_i \leq x \leq x_{i+1} \quad (10)$$

$$s'(x_i^+) = \frac{-(x_{i+1} - x_i)^2 M_i}{2h_i} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i(M_{i+1} - M_i)}{6}$$

$$\text{y, como } h_i = x_{i+1} - x_i: \quad s'(x_i^+) = \frac{-h_i M_i}{2} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i(M_{i+1} - M_i)}{6} \quad (11)$$

Si en la ecuación (10) se cambia i por $i - 1$ se obtiene la expresión de $s'(x)$ en el intervalo $x_{i-1} \leq x \leq x_i$. Así que:

$$s'(x) = \frac{-(x_i - x)^2 M_{i-1} + (x - x_{i-1})^2 M_i}{2h_{i-1}} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1}(M_i - M_{i-1})}{6} \quad \text{para } x_{i-1} \leq x \leq x_i$$

Al evaluar esta función en x_i se obtiene la derivada lateral en x_i por la izquierda, esto es:

$$s'(x_i^-) = \frac{(x_i - x_{i-1})^2 M_i}{2h_{i-1}} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1}(M_i - M_{i-1})}{6}$$

$$\text{y, como } h_{i-1} = x_i - x_{i-1}: \quad s'(x_i^-) = \frac{h_{i-1} M_i}{2} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1}(M_i - M_{i-1})}{6} \quad (12)$$

Igualando (11) y (12) se obtiene una importante relación entre M_{i-1} , M_i y M_{i+1} :

$$\frac{-h_i M_i}{2} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i(M_{i+1} - M_i)}{6} = \frac{h_{i-1} M_i}{2} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1}(M_i - M_{i-1})}{6}$$

Agrupando términos y trasponiendo:

$$\frac{h_{i-1}}{6} M_{i-1} + \frac{h_{i-1} + h_i}{3} M_i + \frac{h_i}{6} M_{i+1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (13)$$

La expresión (13) constituye un sistema lineal tridiagonal con la diagonal predominante que contiene $n - 1$ ecuaciones y $n + 1$ incógnitas: $M_0, M_1, \dots, M_n$. Agregando las dos condiciones que aun faltan, se convierte en un sistema lineal de $n + 1$ ecuaciones que se puede resolver muy eficientemente. Una vez resuelto este sistema, las ecuaciones (8), o mejor en su forma (9), permiten evaluar el spline $s(x)$ para cualquier x del intervalo $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$).

El spline natural

Este es el spline interpolador más empleado. Se obtiene añadiendo las dos condiciones:

$$s''(x_0) = M_0 = 0 \quad \text{y} \quad s''(x_n) = M_n = 0 \quad (14)$$

Cuando se toman estas condiciones adicionales, puede demostrarse que el spline que resulta es la función que, pasando por los $n + 1$ puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, hace mínima la integral:

$$\int_{x_0}^{x_n} [g''(x)]^2 dx$$

lo cual, como $g''(x)$ está relacionada con la curvatura de la gráfica de $g(x)$, significa, geoméricamente, que minimiza la curvatura global de la función interpoladora. Desde un punto de vista físico, como la energía potencial de una varilla delgada, flexible y elástica, depende de la curvatura en cada punto, resulta que, si una varilla con tales propiedades, es obligada a pasar por los $n + 1$ puntos del plano: (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , ..., (x_n, y_n) , ella toma la forma que minimiza su energía potencial elástica, que es, precisamente, la del spline cúbico natural que interpola a dichos puntos. De este hecho físico proviene la palabra “spline” que originalmente se usaba para designar una especie de curvígrafo empleado en dibujo, formado por una varilla que se hacía pasar por varios puntos de un plano.

Teniendo en cuenta las condiciones adicionales (14), el sistema de ecuaciones (13) toma para el spline natural, la forma:

$$\begin{aligned} \frac{h_0 + h_1}{3} M_1 + \frac{h_1}{6} M_2 &= \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0} \\ \frac{h_1}{6} M_1 + \frac{h_1 + h_2}{3} M_2 + \frac{h_2}{6} M_3 &= \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \\ \frac{h_2}{6} M_2 + \frac{h_2 + h_3}{3} M_3 + \frac{h_3}{6} M_4 &= \frac{y_4 - y_3}{h_3} - \frac{y_3 - y_2}{h_2} \\ &\vdots \\ \frac{h_{n-2}}{6} M_{n-2} + \frac{h_{n-2} + h_{n-1}}{3} M_{n-1} &= \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \end{aligned}$$

Que, escrito en forma matricial resulta:

$$\mathbf{H}\mathbf{M} = \mathbf{Y} \quad (15)$$

donde:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{h_0 + h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & & & \\ \frac{h_1}{6} & \frac{h_1 + h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & & \\ & \frac{h_2}{6} & \frac{h_2 + h_3}{3} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \frac{h_{n-2}}{6} \\ & & & \frac{h_{n-2}}{6} & \frac{h_{n-2} + h_{n-1}}{3} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0} \\ \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \\ \frac{y_4 - y_3}{h_3} - \frac{y_3 - y_2}{h_2} \\ \vdots \\ \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \end{bmatrix}$$

Aquí se ha seguido el criterio, usual en las matrices tridiagonales, de no escribir los elementos nulos. El sistema que se obtiene es tridiagonal y con diagonal predominante, por tanto puede ser resuelto con gran eficiencia por el método de Gauss especializado en sistemas tridiagonales,

estudiado en la sección 3.3. También puede ser utilizado uno de los métodos iterativos estudiados en el capítulo 3 pues la convergencia es rápida; observe que el factor de convergencia del método de Jacobi es $\alpha = 0,5$ y el factor β , que determina la rapidez de convergencia del método de Seidel, es aun menor.

Algoritmo en pseudo código para el spline cúbico natural

El siguiente algoritmo determina el valor interpolado $s(x)$ de un spline cúbico natural, para lo cual previamente se calculan los parámetros $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$. Con una ligera modificación, el algoritmo puede ser utilizado para calcular un conjunto suficientemente grande de puntos del spline como para poder trazar su gráfica. Se supone conocidos los nodos de interpolación $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, ordenados en forma creciente, los valores correspondientes de la función a interpolar $\{y_0, y_1, y_2, \dots, y_n\}$ y el número x donde se desea interpolar, el cual debe estar comprendido en el intervalo $[x_0, x_n]$. El algoritmo da como salida el número $s(x)$.

```

for  $i = 0$  to  $n - 1$ 
     $h_i := x_{i+1} - x_i$ 
end
Formar las tres diagonales de la matriz H
Formar la matriz columna Y
Resolver el sistema tridiagonal HM = Y utilizando los métodos de Gauss o de Seidel
 $i := n$ 
do while  $x_i > x$     {En este lazo se determina el tramo del spline a que pertenece  $x$ }
     $i := i - 1$ 
end
 $u := x - x_i$ 
 $v := x_{i+1} - x$ 

$$s(x) := \frac{v^3 M_i + u^3 M_{i+1}}{6h_i} + \frac{vy_i + uy_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i(vM_i + uM_{i+1})}{6}$$

Terminar

```

Ejemplo 1

(El enunciado de este ejemplo se analizó en la sección 4.1. Aquí se repite el enunciado y la figura correspondiente para comodidad del lector). Para producir en un torno de mando numérico una pieza con el perfil longitudinal que se muestra en la figura 3, es necesario obtener una función simple (de modo que pueda ser evaluada en un tiempo muy breve) que describa el contorno de la pieza. Esta función servirá para fijar la posición de la cuchilla del torno en cada instante. Algunas dimensiones, marcadas en la figura en milímetros, deberán ser respetadas y el perfil de la pieza debe ser una curva suave.

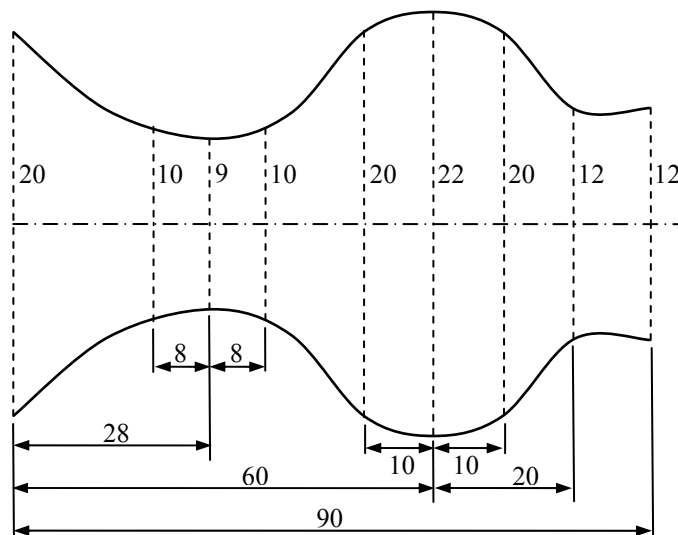


Figura 3

Solución:

Como se desea hallar una función simple que describa el contorno, es claro que no se debe intentar hallar un polinomio que satisfaga las 9 condiciones de interpolación, ya que sería un polinomio de grado 8 y esto implicaría complicaciones en su evaluación y, lo que es mucho peor, el peligro de que ese polinomio presente oscilaciones indeseadas. Para hallar un spline cúbico natural, se determinaron los siguientes nodos (a partir de la figura 3):

$x_0 = 0$	$y_0 = 20$
$x_1 = 20$	$y_1 = 10$
$x_2 = 28$	$y_2 = 9$
$x_3 = 36$	$y_3 = 10$
$x_4 = 50$	$y_4 = 20$
$x_5 = 60$	$y_5 = 22$
$x_6 = 70$	$y_6 = 20$
$x_7 = 80$	$y_7 = 12$
$x_8 = 90$	$y_8 = 12$

Con un algoritmo similar al del pseudo código que se acaba de ver, se hallaron los coeficientes M_i ($i = 1, 2, 3, \dots, 7$). Recuérdese que, por ser un spline natural, M_0 y M_8 son nulos. Los resultados fueron:

$$\begin{aligned}
 M_0 &= 0 \\
 M_1 &= 0,03875 \\
 M_2 &= 0,00999 \\
 M_3 &= 0,10879 \\
 M_4 &= -0,09507 \\
 M_5 &= -0,00453 \\
 M_6 &= 0,12679 \\
 M_7 &= 0,15170 \\
 M_8 &= 0
 \end{aligned}$$

Con estos resultados basta para evaluar el spline en cualquier punto del intervalo $0 \leq x \leq 90$ o para trazarlo, si se desea. De hecho, las curvas que se muestran en la figura 3, son los splines cúbicos que corresponden a los resultados anteriores.

El spline cúbico anclado

En el spline interpolador anclado (“clamped spline”) las dos condiciones adicionales que se toman son:

$$s'(x_0^+) = m_0 \quad \text{y} \quad s'(x_n^-) = m_n$$

es decir, si fijan las pendientes en los extremos del spline a valores deseados m_0 y m_n , lo cual es importante en muchas aplicaciones. Las expresiones para las derivadas laterales fueron antes halladas en las ecuaciones (11) y (12):

$$s'(x_i^+) = \frac{-h_i M_i}{2} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i(M_{i+1} - M_i)}{6} \quad \text{y} \quad s'(x_i^-) = \frac{h_{i-1} M_i}{2} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1}(M_i - M_{i-1})}{6}$$

De aquí resulta:

$$s'(x_0^+) = \frac{-h_0 M_0}{2} + \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{h_0(M_1 - M_0)}{6} = m_0 \quad (16)$$

$$s'(x_n^-) = \frac{h_{n-1} M_n}{2} + \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{h_{n-1}(M_n - M_{n-1})}{6} = m_n \quad (17)$$

Después de simplificar y ordenar, se obtiene:

$$\frac{h_0}{3} M_0 + \frac{h_0}{6} M_1 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - m_0 \quad \text{y} \quad \frac{h_{n-1}}{6} M_{n-1} + \frac{h_{n-1}}{3} M_n = m_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}$$

Cuando estas dos ecuaciones se unen a las $n - 1$ ecuaciones (13):

$$\frac{h_{i-1}}{6} M_{i-1} + \frac{h_{i-1} + h_i}{3} M_i + \frac{h_i}{6} M_{i+1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n-1$$

se forma el sistema

$$\begin{aligned}
\frac{h_0}{3} M_0 + \frac{h_0}{6} M_1 &= \frac{y_1 - y_0}{h_0} - m_0 \\
\frac{h_0}{6} M_0 + \frac{h_0 + h_1}{3} M_1 + \frac{h_1}{6} M_2 &= \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0} \\
\frac{h_1}{6} M_1 + \frac{h_1 + h_2}{3} M_2 + \frac{h_2}{6} M_3 &= \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \\
\frac{h_2}{6} M_2 + \frac{h_2 + h_3}{3} M_3 + \frac{h_3}{6} M_4 &= \frac{y_4 - y_3}{h_3} - \frac{y_3 - y_2}{h_2} \\
&\vdots \\
\frac{h_{n-2}}{6} M_{n-2} + \frac{h_{n-2} + h_{n-1}}{3} M_{n-1} + \frac{h_{n-1}}{6} M_n &= \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \\
\frac{h_{n-1}}{6} M_{n-1} + \frac{h_{n-1}}{3} M_n &= m_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}
\end{aligned}$$

el cual, si se escribe en forma matricial, queda:

$$\mathbf{H}\mathbf{M} = \mathbf{Y}$$

donde ahora:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{h_0}{3} & \frac{h_0}{6} & & & & \\ \frac{h_0}{6} & \frac{h_0 + h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & & & \\ & \frac{h_1}{6} & \frac{h_1 + h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \frac{h_{n-2}}{6} & \frac{h_{n-2} + h_{n-1}}{3} & \frac{h_{n-1}}{6} \\ & & & & \frac{h_{n-1}}{6} & \frac{h_{n-1}}{3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{y_1 - y_0}{h_0} - m_0 \\ \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0} \\ \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \\ \vdots \\ \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \\ m_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} \end{bmatrix}$$

de manera que ahora el sistema es de orden $n + 1$, pero sigue siendo tridiagonal y con la diagonal principal fuertemente predominante ($\alpha = 0,5$).

Algoritmo en pseudo código para el spline cúbico anclado

El siguiente algoritmo determina el valor interpolado $s(x)$ de un spline cúbico anclado, para lo cual previamente se calculan los parámetros $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$. Con una ligera modificación, el algoritmo puede ser utilizado para calcular un conjunto suficientemente grande de puntos del spline como para poder trazar su gráfica. Se supone conocidos los nodos de interpolación $\{x_0, x_1,$

$x_2, \dots, x_n\}$, ordenados en forma creciente, los valores correspondientes de la función a interpolar $\{y_0, y_1, y_2, \dots, y_n\}$ la pendiente deseada a la derecha del nodo x_0 (m_0) y a la izquierda del nodo x_n (m_n) y el número x donde se desea interpolar, el cual debe estar comprendido en el intervalo $[x_0, x_n]$. El algoritmo da como salida el número $s(x)$. El algoritmo que sigue es idéntico al anterior, pues solo difiere en las matrices **H**, **M** e **Y** que se utilizan.

```

for  $i = 0$  to  $n - 1$ 
     $h_i := x_{i+1} - x_i$ 
end
Formar las tres diagonales de la matriz H
Formar la matriz columna Y
Resolver el sistema tridiagonal HM = Y utilizando los métodos de Gauss o de Seidel
 $i := n$ 
do while  $x_i > x$     {En este lazo se determina el tramo del spline a que pertenece  $x$ }
     $i := i - 1$ 
end
 $u := x - x_i$ 
 $v := x_{i+1} - x$ 

$$s(x) := \frac{v^3 M_i + u^3 M_{i+1}}{6h_i} + \frac{vy_i + uy_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i(vM_i + uM_{i+1})}{6}$$

Terminar

```

El spline cúbico periódico

Si al spline interpolador se le imponen las condiciones:

$$y_0 = y_n \quad s'(x_0^+) = s'(x_n^-) \quad \text{y} \quad s''(x_0^+) = s''(x_n^-)$$

se logra una función cuya gráfica es tal que, si ella se repite una y otra vez, en los puntos de unión la función es continua y son continuas las derivadas de orden 1 y 2. La figura 4 muestra esta idea. El spline original (en línea más gruesa) se ha repetido a la izquierda y a la derecha. Como las ordenadas, las pendientes y las concavidades en ambos extremos coinciden, resulta una función periódica, continua y suave hasta la segunda derivada.

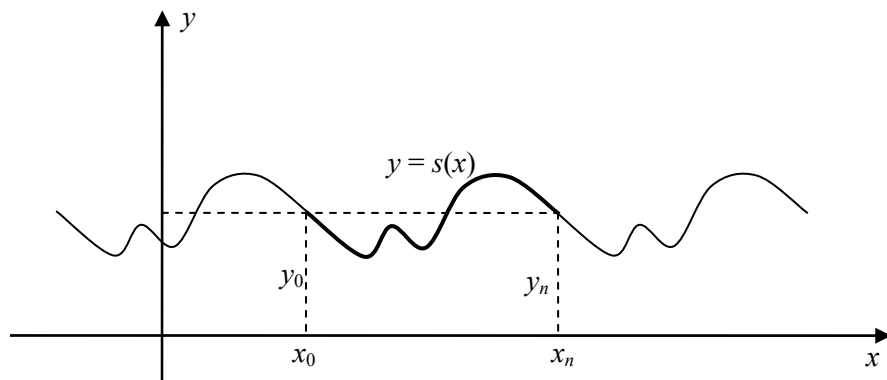


Figura 4

A este spline se le llama periódico aunque, en rigor, solo representa un período de la función periódica que se forma por la repetición de $s(x)$. Como los números $\{y_0, y_1, y_2, \dots, y_n\}$ son arbitrarios, tomar $y_0 = y_n$ no implica una condición adicional que haya que satisfacer, así que, de nuevo, se trata de agregar dos condiciones adicionales a las $n - 1$ que establecen las ecuaciones (13). El sistema (13) sin condición adicional alguna sería:

$$\begin{aligned} \frac{h_0}{6} M_0 + \frac{h_0 + h_1}{3} M_1 + \frac{h_1}{6} M_2 &= \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0} \\ \frac{h_1}{6} M_1 + \frac{h_1 + h_2}{3} M_2 + \frac{h_2}{6} M_3 &= \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \\ \frac{h_2}{6} M_2 + \frac{h_2 + h_3}{3} M_3 + \frac{h_3}{6} M_4 &= \frac{y_4 - y_3}{h_3} - \frac{y_3 - y_2}{h_2} \\ &\vdots \\ \frac{h_{n-2}}{6} M_{n-2} + \frac{h_{n-2} + h_{n-1}}{3} M_{n-1} + \frac{h_{n-1}}{6} M_n &= \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \end{aligned} \quad (18)$$

Al hacer $y_0 = y_n$ y $s''(x_0^+) = s''(x_n^-)$, lo cual significa $M_0 = M_n$, la última ecuación se transforma en:

$$\frac{h_{n-2}}{6} M_{n-2} + \frac{h_{n-2} + h_{n-1}}{3} M_{n-1} + \frac{h_{n-1}}{6} M_0 = \frac{y_0 - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \quad (19)$$

Por otra parte, al igualar las derivadas en x_0 y x_n , obtenidas en las ecuaciones (16) y (17), resulta

$$s'(x_0^+) = \frac{-h_0 M_0}{2} + \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{h_0(M_1 - M_0)}{6} = \frac{h_{n-1} M_n}{2} + \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{h_{n-1}(M_n - M_{n-1})}{6} = s'(x_n^-)$$

Si en esta ecuación se sustituye y_n por y_0 y M_n por M_0 queda:

$$\frac{-h_0 M_0}{2} + \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{h_0(M_1 - M_0)}{6} = \frac{h_{n-1} M_0}{2} + \frac{y_0 - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{h_{n-1}(M_0 - M_{n-1})}{6}$$

Agrupando y ordenando convenientemente:

$$\frac{h_0 + h_{n-1}}{3} M_0 + \frac{h_0}{6} M_1 + \frac{h_{n-1}}{6} M_{n-1} = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{y_0 - y_{n-1}}{h_{n-1}} \quad (20)$$

Al cambiar la última ecuación del sistema (18) por la ecuación (19) y agregarle la condición (20) se obtiene el siguiente sistema lineal de n ecuaciones con las n incógnitas $\{M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}\}$:

$$\begin{aligned}
\frac{h_0 + h_{n-1}}{3} M_0 + \frac{h_0}{6} M_1 + \frac{h_{n-1}}{6} M_{n-1} &= \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{y_0 - y_{n-1}}{h_{n-1}} \\
\frac{h_0}{6} M_0 + \frac{h_0 + h_1}{3} M_1 + \frac{h_1}{6} M_2 &= \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0} \\
\frac{h_1}{6} M_1 + \frac{h_1 + h_2}{3} M_2 + \frac{h_2}{6} M_3 &= \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \\
&\vdots \\
\frac{h_{n-1}}{6} M_0 + \frac{h_{n-2}}{6} M_{n-2} + \frac{h_{n-2} + h_{n-1}}{3} M_{n-1} &= \frac{y_0 - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}}
\end{aligned}$$

La estructura de este sistema lineal se aprecia con más claridad si se escribe en la forma matricial:

$$\mathbf{H}\mathbf{M} = \mathbf{Y}$$

donde ahora:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{h_{n-1} + h_0}{3} & \frac{h_0}{6} & 0 & 0 & \dots & \frac{h_{n-1}}{6} \\ \frac{h_0}{6} & \frac{h_0 + h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{h_1}{6} & \frac{h_1 + h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{h_{n-3}}{6} & \frac{h_{n-3} + h_{n-2}}{3} & \frac{h_{n-2}}{6} \\ \frac{h_{n-1}}{6} & 0 & \dots & 0 & \frac{h_{n-2}}{6} & \frac{h_{n-2} + h_{n-1}}{3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{y_0 - y_{n-1}}{h_{n-1}} \\ \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0} \\ \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \\ \vdots \\ \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} - \frac{y_{n-2} - y_{n-3}}{h_{n-3}} \\ \frac{y_0 - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \end{bmatrix}$$

Como se observa, ahora $\mathbf{H}$ no es tridiagonal, pero sigue siendo de diagonal predominante con factor de convergencia $\alpha = 0,5$, por lo cual los métodos iterativos permiten su solución con eficiencia.

Algoritmo en pseudo código para el spline cúbico periódico

El siguiente algoritmo determina el valor interpolado $s(x)$ de un spline cúbico periódico, para lo cual previamente se calculan los parámetros $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ (no se calcula M_n , ya que, $M_n = M_0$). Con una ligera modificación, el algoritmo puede ser utilizado para calcular un conjunto suficientemente grande de puntos del spline como para poder trazar su gráfica. Se supone conocidos los nodos de interpolación $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, ordenados en forma creciente, los valores correspondientes de la función a interpolar $\{y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\}$ (se supone que $y_n = y_0$) y el número x donde se desea interpolar, el cual debe estar comprendido en el intervalo $[x_0, x_n]$. El algoritmo da como salida el número $s(x)$.

```
for  $i = 0$  to  $n - 1$ 
     $h_i := x_{i+1} - x_i$ 
end
Formar la matriz H
Formar la matriz columna Y
Resolver el sistema tridiagonal HM = Y utilizando el método de Seidel
 $M_n := M_0$ 
 $i := n$ 
do while  $x_i > x$  {En este lazo se determina el tramo del spline a que pertenece  $x$ }
     $i := i - 1$ 
end
end
 $u := x - x_i$ 
 $v := x_{i+1} - x$ 

$$s(x) := \frac{v^3 M_i + u^3 M_{i+1}}{6h_i} + \frac{vy_i + uy_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i(vM_i + uM_{i+1})}{6}$$

Terminar
```

Ejemplo 2

Halle las ecuaciones paramétricas de una curva cerrada, continua, con tangente en cada punto y curvatura continua que pase por los cuatro puntos: $P_0(1, 1)$, $P_1(3, 1)$, $P_2(2, 2)$, $P_3(4, 2)$, $P_0(1, 1)$ en ese mismo orden.

Solución:

Para que la curva paramétrica $x = x(t)$; $y = y(t)$ pase por los puntos $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, $P_0(x_0, y_0)$ basta con tomar cinco números $t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ y hacer que las funciones $x(t)$; $y(t)$ satisfagan las condiciones de interpolación:

$$\begin{array}{ll} x(t_0) = x_0 & y(t_0) = y_0 \\ x(t_1) = x_1 & y(t_1) = y_1 \\ x(t_2) = x_2 & y(t_2) = y_2 \\ x(t_3) = x_3 & y(t_3) = y_3 \\ x(t_4) = x_0 & y(t_4) = y_0 \end{array}$$

Las condiciones de continuidad y suavidad se obtienen si $x(t)$ e $y(t)$ son funciones continuas y con primera y segunda derivadas continuas. Como se ha tomado $x(t_0) = x(t_4)$ e $y(t_0) = y(t_4)$ la curva obtenida será cerrada. Si se utilizan para $x(t)$ e $y(t)$ splines cúbicos periódicos, se logrará la

continuidad y suavidad de la curva, inclusive en el punto P_0 donde la curva se cierra, ya que coinciden los valores iniciales y finales de $x'(t), x''(t), y'(t), y''(t)$.

Existen diferentes criterios para seleccionar los números t_0, t_1, t_2, t_3, t_4 , que determinan diferentes características geométricas de la curva obtenida. Aquí se utilizará la variante más simple (pero no siempre la mejor) de tomar valores equidistantes. Sean entonces: $t_0 = 1, t_1 = 2, t_2 = 3, t_3 = 4, t_4 = 5$. Con esto queda:

Nodos de $x(t)$: $(1, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 4), (5, 1)$

Nodos de $y(t)$: $(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 2), (5, 1)$

Al tomar para t_0, t_1, t_2, t_3, t_4 , valores equidistantes las ecuaciones se simplificarán ya que, en cada spline, será: $h_0 = h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = 1$.

Spline $x(t)$:

En este caso es: $x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 4$ y el sistema $\mathbf{HM} = \mathbf{X}$ resulta:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_0 + x_3 \\ x_2 - 2x_1 + x_0 \\ x_3 - 2x_2 + x_1 \\ x_0 - 2x_3 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Como se trata de un sistema muy pequeño, cualquier método de solución puede servir. Se obtiene:

$$M_0 = 5, M_1 = -3, M_2 = 3, M_3 = 5$$

y como $M_4 = M_0$, se tiene, $M_4 = 5$.

A partir de la ecuación (8), el tramo del spline $x(t)$ correspondiente a $t_i < t < t_{i+1}$ será:

$$x(t) = \frac{(t_{i+1} - t)^3 M_i + (t - t_i)^3 M_{i+1}}{6h_i} + \frac{(t_{i+1} - t)x_i + (t - t_i)x_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i[(t_{i+1} - t)M_i + (t - t_i)M_{i+1}]}{6}$$

para $i = 0, 1, 2, 3$. Al darle estos valores a i y tomando para las t , sus valores correspondientes, resulta:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{(2-t)^3 M_0 + (t-1)^3 M_1}{6} + (2-t)x_0 + (t-1)x_1 - \frac{(2-t)M_0 + (t-1)M_1}{6} & \text{para } 1 \leq t \leq 2 \\ \frac{(3-t)^3 M_1 + (t-2)^3 M_2}{6} + (3-t)x_1 + (t-2)x_2 - \frac{(3-t)M_1 + (t-2)M_2}{6} & \text{para } 2 \leq t \leq 3 \\ \frac{(4-t)^3 M_2 + (t-3)^3 M_3}{6} + (4-t)x_2 + (t-3)x_3 - \frac{(4-t)M_2 + (t-3)M_3}{6} & \text{para } 3 \leq t \leq 4 \\ \frac{(5-t)^3 M_3 + (t-4)^3 M_4}{6} + (5-t)x_3 + (t-4)x_4 - \frac{(5-t)M_3 + (t-4)M_4}{6} & \text{para } 4 \leq t \leq 5 \end{cases}$$

Después de asignarle a las M y las x sus correspondientes valores y simplificando, se obtiene:

$$x(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(16t^3 - 75t^2 + 105t - 50) & \text{para } 1 \leq t \leq 2 \\ \frac{1}{4}(14t^3 - 105t^2 + 255t - 190) & \text{para } 2 \leq t \leq 3 \\ -\frac{1}{4}(16t^3 - 165t^2 + 555t - 620) & \text{para } 3 \leq t \leq 4 \\ \frac{1}{4}(18t^3 - 243t^2 + 1077t - 1556) & \text{para } 4 \leq t \leq 5 \end{cases}$$

En la figura 5 se muestra la gráfica del spline periódico $x(t)$ y sus nodos.

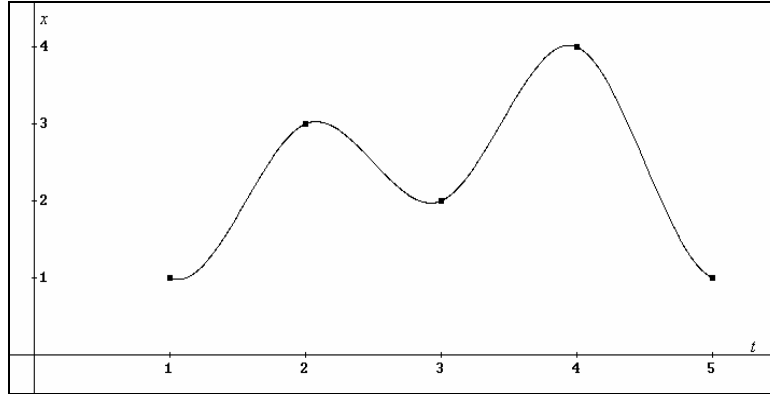


Figura 5

Spline $y(t)$:

En este caso es: $y_0 = 1, y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = 2$ y el sistema $\mathbf{HM} = \mathbf{Y}$ resulta:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 - 2y_0 + y_3 \\ y_2 - 2y_1 + y_0 \\ y_3 - 2y_2 + y_1 \\ y_0 - 2y_3 + y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Al resolver el sistema se obtiene:

$$M_0 = 1,5, M_1 = 1,5, M_2 = -1,5, M_3 = -1,5$$

y como $M_4 = M_0$, se tiene, $M_4 = 1,5$.

Utilizando la ecuación (8), el tramo del spline $y(t)$ correspondiente a $t_i < t < t_{i+1}$ será:

$$y(t) = \frac{(t_{i+1} - t)^3 M_i + (t - t_i)^3 M_{i+1}}{6h_i} + \frac{(t_{i+1} - t)y_i + (t - t_i)y_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i[(t_{i+1} - t)M_i + (t - t_i)M_{i+1}]}{6}$$

para $i = 0, 1, 2, 3$. Al darle estos valores a i y tomando para las t , sus valores correspondientes, resulta:

$$y(t) = \begin{cases} \frac{(2-t)^3 M_0 + (t-1)^3 M_1}{6} + (2-t)y_0 + (t-1)y_1 - \frac{(2-t)M_0 + (t-1)M_1}{6} & \text{para } 1 \leq t \leq 2 \\ \frac{(3-t)^3 M_1 + (t-2)^3 M_2}{6} + (3-t)y_1 + (t-2)y_2 - \frac{(3-t)M_1 + (t-2)M_2}{6} & \text{para } 2 \leq t \leq 3 \\ \frac{(4-t)^3 M_2 + (t-3)^3 M_3}{6} + (4-t)y_2 + (t-3)y_3 - \frac{(4-t)M_2 + (t-3)M_3}{6} & \text{para } 3 \leq t \leq 4 \\ \frac{(5-t)^3 M_3 + (t-4)^3 M_4}{6} + (5-t)y_3 + (t-4)y_4 - \frac{(5-t)M_3 + (t-4)M_4}{6} & \text{para } 4 \leq t \leq 5 \end{cases}$$

Asignando a las M y las y sus correspondientes valores y simplificando, se obtiene:

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}(3t^2 - 9t + 10) & \text{para } 1 \leq t \leq 2 \\ -\frac{1}{4}(2t^3 - 15t^2 + 33t - 26) & \text{para } 2 \leq t \leq 3 \\ -\frac{1}{4}(3t^2 - 21t + 28) & \text{para } 3 \leq t \leq 4 \\ \frac{1}{4}(2t^3 - 27t^2 + 117t - 156) & \text{para } 4 \leq t \leq 5 \end{cases}$$

La figura 6 muestra la gráfica del spline periódico $y(t)$ y los nodos correspondientes. En la figura 7 se encuentra la curva con ecuaciones paramétricas $x = x(t)$; $y = y(t)$ y los cuatro puntos $P_0(1, 1)$, $P_1(3, 1)$, $P_2(2, 2)$, $P_3(4, 2)$. Observe que, en efecto, es una curva que reúne todos los requisitos exigidos.

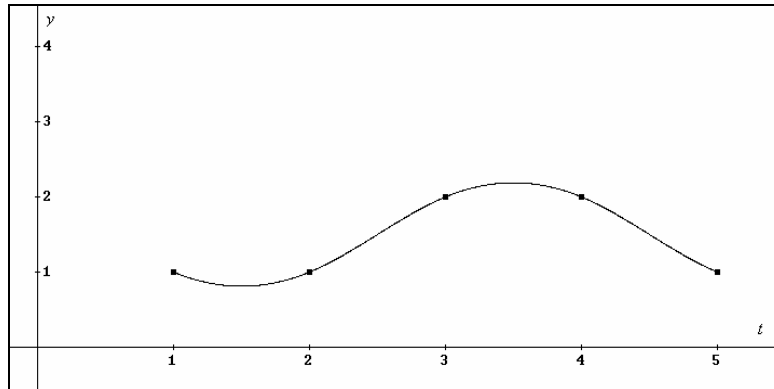


Figura 6

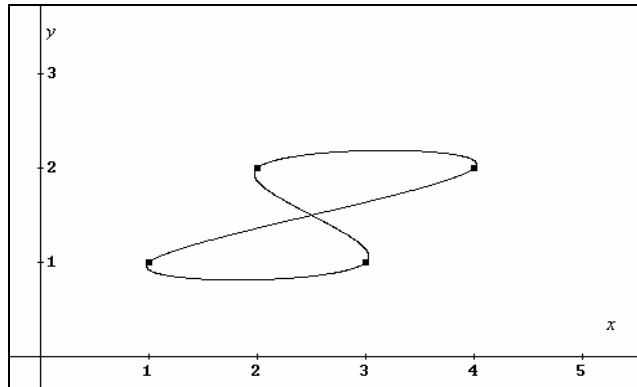


Figura 7

Ejercicios

- Dados los siguientes puntos, halle la expresión analítica de una función formada por polinomios de interpolación de grado k determinados por $k + 1$ nodos consecutivos, para $k = 1, 2$ y 3 . Construya las gráficas de las funciones obtenidas.

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
y_i	2,2	4,3	4,8	4,1	3,9	5,3	7,9

- Determine el spline cúbico natural correspondiente a los nodos del ejercicio anterior. Trace su gráfica y compárela con las de dicho ejercicio.
- En la figura 8 se muestra un corte transversal de un canal para regadío, incluyendo las cotas (en metros) de varios puntos (equidistantes un metro) respecto a una cierta referencia. Emplee un spline cúbico natural para representar analíticamente este corte.

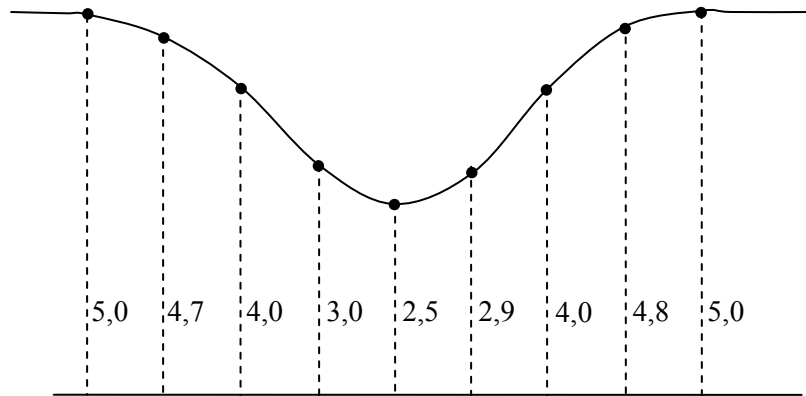


Figura 8

- A continuación se muestran las coordenadas Lambert de varios puntos de la costa norte de la provincia de Pinar del Río. Determine un spline cúbico natural para representar el segmento de costa que corresponde a estos puntos.

i		1	2	3	4	5	6	7	8
Coordenadas del punto i	Longitud	10,0	10,2	11,0	12,2	13,5	14,0	14,5	14,6
	Latitud	7,3	6,7	6,5	7,0	6,0	6,4	7,0	7,7

- En la figura 9 se muestra el perfil de una botella de cerveza y algunas de sus dimensiones en milímetros. Halle un spline cúbico natural que represente a la curva comprendida entre los puntos A y B .

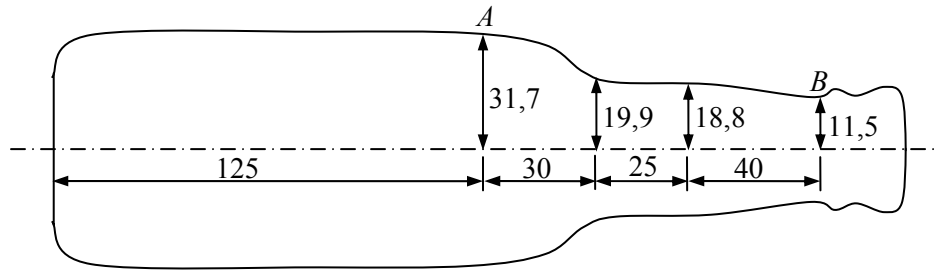


Figura 9

6. Para trazar el perfil de un tramo recto de 1000 metros de longitud de un terraplén (figura 10), se han determinado las cotas (en metros) que el mismo debe tener en puntos separados 100 m entre sí. Utilice un spline cúbico natural para obtener cotas cada 50 m.

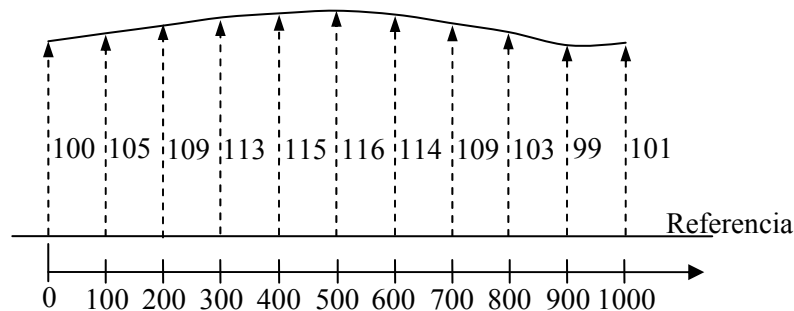


Figura 10

7. En un proceso térmico se ha logrado normar en intervalos de 10 minutos la temperatura que debe existir en el interior de un horno eléctrico. Estos datos se muestran en la tabla. Para diseñar un sistema de control computarizado se requiere conocer la norma cada cinco minutos. Utilice un spline cúbico natural para hallar dichas temperaturas.

Tiempo (min.)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
Temperatura (°C)	30	40	60	80	95	100	110	100	80

8. En la tabla que se acompaña aparece la presión atmosférica (en hectopascales) en 35 nodos sobre una cuadrícula que cubre una región de 20 km por 30 km. Utilizando interpolación lineal halle las coordenadas de los puntos (marcados con círculos en blanco en el mapa de la figura 11) donde la presión es de 1005 hectopascales y después, mediante un spline cúbico natural, trace en el mapa una curva suave que pase por los puntos marcados (isobara de 1005 hectopascales).

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7
1	990	994	998	993	992	994	995
2	995	1000	1000	995	997	997	998
3	1000	1007	1007	999	1001	1000	1000
4	1010	1012	1013	1013	1009	1012	1003
5	1015	1016	1015	1014	1012	1014	1013

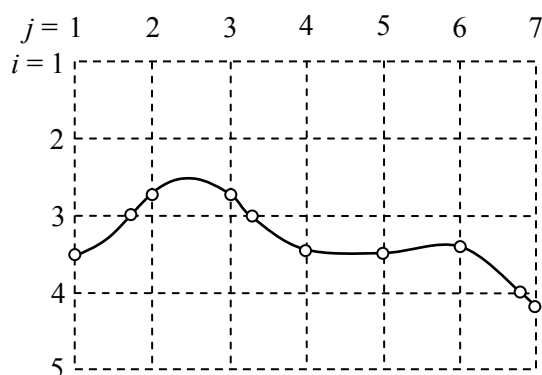


Figura 11

9. Plantee el sistema de ecuaciones necesario para determinar el spline cúbico anclado que pasa por los puntos del plano: $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(5, 4)$, $(6, 3)$ y que satisfice las condiciones $s'(2^+) = 1$ y $s'(6^-) = -1$.
10. Plantee el sistema de ecuaciones necesario para determinar un spline cúbico periódico que pase por los puntos $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(5, 4)$, $(6, 3)$ y que permita formar una función periódica con periodo 5.
11. Plantee los sistemas de ecuaciones necesarios para determinar los dos splines cúbicos naturales que forman las ecuaciones paramétricas de una curva como la que se muestra en la figura 12, que pasa por los puntos A , B , C , D , E .

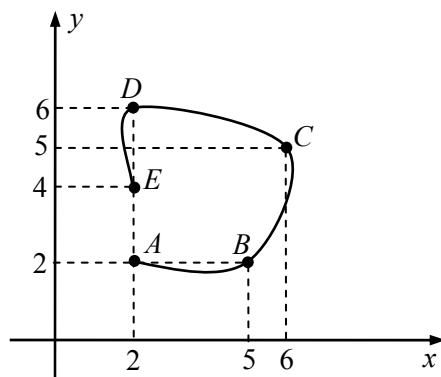


Figura 12

12. Plantee los sistemas de ecuaciones necesarios para determinar los dos splines cúbicos periódicos que forman las ecuaciones paramétricas de una curva cerrada como la que se muestra en la figura 12, que pasa por los puntos $(1, 1)$, $(7, 1)$ y $(4, 7)$, posee tangente en cada punto y curvatura que varía en forma continua.

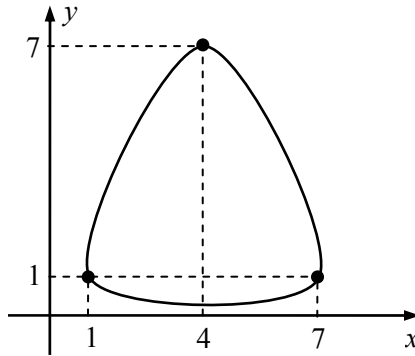


Figura 13

4.6 Ajuste de curvas

En los ejemplos introductorios al comienzo de este capítulo se vieron dos situaciones en las que el enfoque de la interpolación no resuelve el problema. En el ejemplo 2 se deseaba encontrar una relación funcional entre el peso y la talla de los individuos de un sector poblacional a partir de un conjunto de datos correspondientes a 100 de estas personas. Cuando estos datos se representan en un sistema t (estatura) contra p (peso) muestran un comportamiento como el de la figura 1 (que es una copia de la figura 1 de la sección 4.1). Es obvio que sería absurdo aplicar a este problema

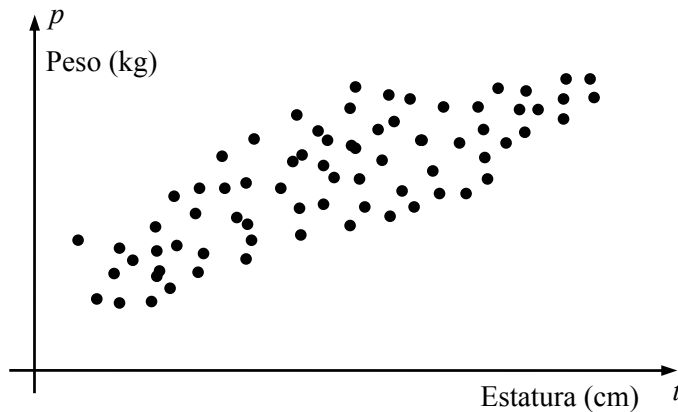


Figura 1

el enfoque de la interpolación, aun cuando fuera posible encontrar alguna función interpoladora capaz de pasar por los 100 puntos de la figura.

En el ejemplo 4 de esa misma sección se analizó otro caso en el que el uso de la interpolación tampoco es recomendable. En dicho ejemplo, se tienen los resultados de la deformación de diez muestras de barras de acero de 12 mm sometidas a esfuerzos de tracción conocidos. En este caso, las mediciones realizadas contienen los inevitables errores de observación y de los instrumentos y es imposible garantizar la identidad de las diez barras usadas para el experimento. Por tanto, no sería conveniente encontrar una función interpoladora de mucha complejidad, cuya mayor complicación se debería posiblemente a haber sido obligada a satisfacer un conjunto de datos que contienen errores.

En ambos ejemplos, lo que realmente conviene es encontrar una función f sencilla que satisfaga “lo mejor posible” las exigencias de cada caso. Este es el enfoque del ajuste de curvas, que se precisará a continuación.

El problema del ajuste de curvas

Sea $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ un conjunto de valores de la variable x entre los cuales puede existir cualquier orden e incluso, puede haber repeticiones. Sea f una función definida en A , que toma valores $f_j = f(x_j)$ ($j = 1, 2, \dots, m$), los cuales usualmente se desconocen. Sea y_j el valor observado de f_j . A la diferencia entre el valor real y el observado se le denomina error de observación.

Por otra parte, sea G una familia de funciones aproximantes. Esta familia consta en general de infinitas funciones que se diferencian entre sí por los valores que toman ciertos parámetros cuyo número es una característica importante de la familia. Decidir cual es la familia de funciones aproximantes que se utilizará en un problema de ajuste de curvas es una cuestión importante y a veces muy difícil y que suele encontrar solución a partir de un conocimiento profundo del problema que se está resolviendo. Por el momento, no es necesario entrar en otros detalles acerca de G .

El problema del ajuste de curvas consiste, en encontrar aquella función g de la familia G que se aproxime “lo mejor posible” a los datos (x_j, y_j) ($j = 1, 2, \dots, m$). En términos más formales, se trata de encontrar la función $g \in G$ que haga mínima la desviación cuadrática:

$$D = \sum_{j=1}^m [g(x_j) - y_j]^2$$

La desviación cuadrática es una manera muy conveniente de medir la separación que existe entre el modelo $g(x)$ y los valores observados $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$. Por una parte, las desviaciones de los datos respecto al modelo aparecen elevadas al cuadrado, esto las hace positivas e impide que desviaciones positivas y negativas se compensen mutuamente. Por otra parte, al elevar las desviaciones al cuadrado las desviaciones mayores resultan incrementadas respecto a las más pequeñas, produciéndose un efecto de penalización que está muy acorde con el sentido que las personas otorgan a los errores, pues siempre se considera preferible muchas desviaciones pequeñas que pocas desviaciones grandes. Además, la suma de cuadrados es una función muy fácil de tratar matemáticamente.

Antes de estudiar la forma general en que el problema se resuelve, se incluye un ejemplo muy sencillo para aclarar los conceptos anteriores.

Ejemplo 1

Halle las ecuaciones que permiten determinar la recta no vertical que mejor se ajusta a un conjunto de datos (x_j, y_j) ($j = 1, 2, \dots, m$).

Solución:

Todas las rectas no verticales responden al modelo general:

$$g(x) = C_1x + C_2$$

donde C_1 y C_2 son parámetros reales. En este caso la familia G será:

$$G = \{g: g(x) = C_1x + C_2\}$$

La recta de mejor ajuste será aquella que minimice a:

$$D = \sum_{j=1}^m [C_1x_j + C_2 - y_j]^2$$

Como D es una función cuadrática de C_1 y C_2 ella posee un punto de mínimo que puede obtenerse igualando a cero las derivadas parciales respecto a C_1 y C_2 , es decir:

$$\frac{\partial D}{\partial C_1} = \sum_{j=1}^m 2[C_1x_j + C_2 - y_j]x_j = 0$$

$$\text{y} \quad \frac{\partial D}{\partial C_2} = \sum_{j=1}^m 2[C_1x_j + C_2 - y_j] = 0$$

Separando cada suma en tres sumandos y extrayendo C_1 y C_2 factores comunes, se obtiene:

$$\begin{aligned} C_1 \sum_{j=1}^m x_j^2 + C_2 \sum_{j=1}^m x_j &= \sum_{j=1}^m x_j y_j \\ C_1 \sum_{j=1}^m x_j + mC_2 &= \sum_{j=1}^m y_j \end{aligned}$$

Estas dos ecuaciones forman un sistema lineal con las incógnitas C_1 y C_2 ; la solución de este sistema determina la recta

$$g(x) = C_1x + C_2$$

de mejor ajuste a los datos (x_j, y_j) ($j = 1, 2, \dots, m$).

Modelos lineales

Cuando la familia G de funciones aproximantes está formada por funciones del tipo:

$$g(x) = C_1g_1(x) + C_2g_2(x) + \cdots + C_ng_n(x)$$

se dice que se está ajustando un modelo lineal. Realmente, sería más riguroso decir que el modelo es lineal respecto a los parámetros $C_1, C_2, \dots, C_n$ pues, en general, no es lineal respecto a la variable x .

Nótese que, cuando se utiliza un modelo lineal, la familia G es un espacio vectorial generado por el conjunto de funciones $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$. Si este conjunto es linealmente independiente, es decir, si ninguna de las funciones $g_i(x)$ se puede expresar como combinación lineal de las demás, entonces el conjunto $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ forma una base del espacio vectorial G . En todo lo que sigue, se supondrá que este es el caso.

Cuando se utiliza un modelo lineal, el problema de ajuste de curvas tiene una solución muy simple y elegante; en el caso de modelos no lineales el problema es, en general, mucho más complejo y será tratado más adelante. A continuación se ofrece una lista de ejemplos importantes de modelos lineales y de modelos no lineales.

Modelos lineales:

$$g(x) = C_1x + C_2$$

$$g_1(x) = x, \quad g_2(x) = 1$$

$$g(x) = C_1x^2 + C_2x + C_3$$

$$g_1(x) = x^2, \quad g_2(x) = x, \quad g_3(x) = 1$$

$$g(x) = C_1x + C_2 + C_3 \cos \frac{\pi}{6}x + C_4 \sin \frac{\pi}{6}x$$

$$g_1(x) = x, \quad g_2(x) = 1, \quad g_3(x) = \cos \frac{\pi}{6}x$$

$$g_4(x) = \sin \frac{\pi}{6}x$$

Modelos no lineales:

$$g(x) = C_1x^{C_2}$$

$$g(x) = C_1(C_2)^x$$

$$g(x) = C_1 + C_2e^{C_3x}$$

Para el caso del un modelo lineal

$$g(x) = C_1g_1(x) + C_2g_2(x) + \cdots + C_ng_n(x)$$

la desviación cuadrática toma la forma:

$$D = \sum_{j=1}^m [C_1g_1(x_j) + C_2g_2(x_j) + \cdots + C_ng_n(x_j) - y_j]^2$$

Como D es una función cuadrática de las variables $C_1, C_2, \dots, C_n$ ella posee un punto de mínimo que se obtiene igualando a cero las derivadas de D respecto a $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Derivando parcialmente con respecto a C_i ($i = 1, 2, \dots, n$) e igualando a cero:

$$\frac{\partial D}{\partial C_i} = \sum_{j=1}^m 2[C_1 g_1(x_j) + C_2 g_2(x_j) + \dots + C_n g_n(x_j) - y_j] g_i(x_j) = 0$$

que se puede escribir, separando en varias sumas y extrayendo factores comunes, como:

$$C_1 \sum_{j=1}^m g_1(x_j) g_i(x_j) + C_2 \sum_{j=1}^m g_2(x_j) g_i(x_j) + \dots + C_n \sum_{j=1}^m g_n(x_j) g_i(x_j) = \sum_{j=1}^m y_j g_i(x_j)$$

Dando a i los valores $1, 2, \dots, n$, se obtiene el sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \left[\sum_{j=1}^m g_1^2(x_j) \right] C_1 + \left[\sum_{j=1}^m g_1(x_j) g_2(x_j) \right] C_2 + \dots + \left[\sum_{j=1}^m g_1(x_j) g_n(x_j) \right] C_n &= \sum_{j=1}^m g_1(x_j) y_j \\ \left[\sum_{j=1}^m g_2(x_j) g_1(x_j) \right] C_1 + \left[\sum_{j=1}^m g_2^2(x_j) \right] C_2 + \dots + \left[\sum_{j=1}^m g_2(x_j) g_n(x_j) \right] C_n &= \sum_{j=1}^m g_2(x_j) y_j \\ &\vdots \\ \left[\sum_{j=1}^m g_n(x_j) g_1(x_j) \right] C_1 + \left[\sum_{j=1}^m g_n(x_j) g_2(x_j) \right] C_2 + \dots + \left[\sum_{j=1}^m g_n^2(x_j) \right] C_n &= \sum_{j=1}^m g_n(x_j) y_j \end{aligned} \quad (1)$$

que se denomina *sistema normal*. La notación se simplifica un poco si se tiene en cuenta que en el espacio vectorial de las funciones definidas en el conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ con $m > n$ se puede definir el producto escalar como:

$$f \cdot g = \sum_{j=1}^m f(x_j) g(x_j)$$

Con este convenio, todas las sumas que aparecen en el sistema normal se pueden expresar como productos escalares de funciones:

$$\begin{aligned} (g_1 \cdot g_1) C_1 + (g_1 \cdot g_2) C_2 + \dots + (g_1 \cdot g_n) C_n &= g_1 \cdot y \\ (g_2 \cdot g_1) C_1 + (g_2 \cdot g_2) C_2 + \dots + (g_2 \cdot g_n) C_n &= g_2 \cdot y \\ &\vdots \\ (g_n \cdot g_1) C_1 + (g_n \cdot g_2) C_2 + \dots + (g_n \cdot g_n) C_n &= g_n \cdot y \end{aligned} \quad (2)$$

El determinante del sistema (1) se llama determinante de Gram del conjunto $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ y se demuestra que no es cero si el conjunto $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ es linealmente independiente. Como este es el caso que se está suponiendo, puede asegurarse que el sistema posee solución única.

El sistema normal se puede representar también en una forma más compacta y más eficiente en cuanto al tiempo de ejecución, utilizando la matriz $\mathbf{G}$ de orden n por m , la cual se define como:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_1(x_1) & g_1(x_2) & g_1(x_3) & \cdots & g_1(x_m) \\ g_2(x_1) & g_2(x_2) & g_2(x_3) & \cdots & g_2(x_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_n(x_1) & g_n(x_2) & g_n(x_3) & \cdots & g_n(x_m) \end{bmatrix}$$

Note que el producto de $\mathbf{G}$ por su traspuesta $\mathbf{G}^t$ es:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}\mathbf{G}^t &= \begin{bmatrix} g_1(x_1) & g_1(x_2) & g_1(x_3) & \cdots & g_1(x_m) \\ g_2(x_1) & g_2(x_2) & g_2(x_3) & \cdots & g_2(x_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_n(x_1) & g_n(x_2) & g_n(x_3) & \cdots & g_n(x_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1(x_1) & g_2(x_1) & \cdots & g_n(x_1) \\ g_1(x_2) & g_2(x_2) & \cdots & g_n(x_2) \\ g_1(x_3) & g_2(x_3) & \cdots & g_n(x_3) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_1(x_m) & g_2(x_m) & \cdots & g_n(x_m) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m g_1^2(x_j) & \sum_{j=1}^m g_1(x_j)g_2(x_j) & \cdots & \sum_{j=1}^m g_1(x_j)g_n(x_j) \\ \sum_{j=1}^m g_2(x_j)g_1(x_j) & \sum_{j=1}^m g_2^2(x_j) & \cdots & \sum_{j=1}^m g_2(x_j)g_n(x_j) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^m g_n(x_j)g_1(x_j) & \sum_{j=1}^m g_n(x_j)g_2(x_j) & \cdots & \sum_{j=1}^m g_n^2(x_j) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

que es la matriz cuadrada de orden n de los coeficientes del sistema normal (1). Si se definen las matrices columna:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

el sistema normal se puede escribir como:

$$(\mathbf{G}\mathbf{G}^t) \mathbf{C} = \mathbf{G}\mathbf{Y} \quad (3)$$

Desde el punto de vista del algoritmo computacional, lo más eficiente es calcular previamente y almacenar en memoria la matriz $\mathbf{G}$ para obtener los coeficientes de la matriz $\mathbf{G}\mathbf{G}^t$ y los términos independientes $\mathbf{G}\mathbf{Y}$.

Algoritmo en pseudo código para ajustar modelos lineales

El siguiente algoritmo permite ajustar el modelo lineal $g(x) = C_1g_1(x) + C_2g_2(x) + \cdots + C_ng_n(x)$ a los datos (x_j, y_j) ($j = 1, 2, \dots, m$) donde se supone que el conjunto $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ es linealmente independiente y que $m > n$. El algoritmo calcula los coeficientes del modelo que minimizan la desviación cuadrática:

$$D = \sum_{j=1}^m [g(x_j) - y_j]^2$$

Calcular la matriz $\mathbf{G} = [g_i(x_j)]$ ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$)

Formar la matriz $\mathbf{GG}^t$ del sistema normal

Formar la matriz columna $\mathbf{Y} = [y_j]$

Formar la matriz de términos independientes $\mathbf{GY}$

Resolver el sistema lineal de n por n $(\mathbf{GG}^t) \mathbf{C} = \mathbf{GY}$ mediante el método de Gauss

La matriz columna $\mathbf{C}$ contiene los coeficientes del modelo ajustado

Terminar

Para muchos modelos lineales importantes la matriz $\mathbf{GG}^t$ suele ser mal condicionada, por tanto, debe utilizarse doble precisión en los cálculos y trabajar con estrategia parcial de pivote o, mejor aun, estrategia total. Para evitar el mal condicionamiento puede también utilizarse la idea de hallar para el espacio G una base $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ de funciones ortogonales. Esto introduce un paso adicional en el algoritmo, pero, a cambio de ello la matriz del sistema (2) es diagonal y su solución es inmediata sin necesidad de utilizar el método de Gauss. En la literatura recomendada al final del capítulo puede encontrar referencias acerca de las familias de funciones ortogonales.

Ejemplo 2

(El siguiente enunciado es el del ejemplo 4 del comienzo del capítulo). En un laboratorio se está analizando la resistencia de las barras de acero corrugadas de 12 mm para la construcción. Para ello se someten 10 muestras de la misma longitud a grandes esfuerzos de tensión y se mide la deformación sufrida. Los resultados se muestran en la tabla 1 y en la figura 2 se han representado en un plano T - s .

T (tensión) kilonewton	5,1	7,7	10,8	13,2	15,6	18,1	22,2	23,9	26,3	27,5
s (deformación) milímetro	0,10	0,17	0,24	0,30	0,36	0,40	0,53	0,70	0,85	1,03

Tabla 2

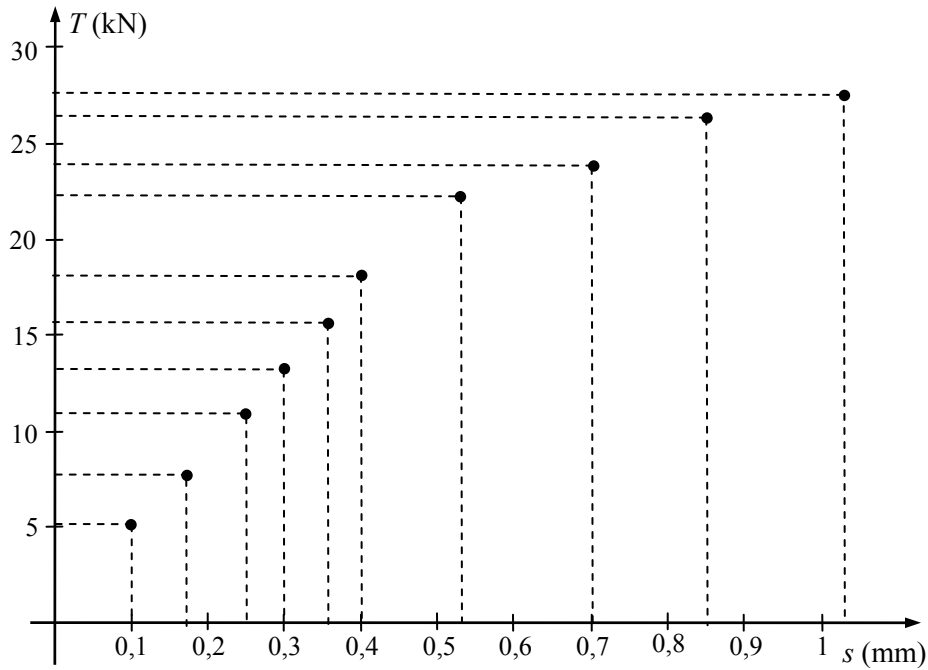


Figura 3

a) Ajuste un modelo del tipo $T = a_0 + a_1s$ y b) otro del tipo $T = b_0 + b_1s + b_2s^2$ para representar el comportamiento de este material para tensiones en el rango de 0 a 30 kilonewton.

Solución:

a) Para ajustar a los datos el modelo lineal $T = a_0 + a_1s$ se escogerán como funciones base:

$$g_0(s) = 1 \quad \text{y} \quad g_1(s) = s$$

de modo que $T(s) = a_0 g_0(s) + a_1 g_1(s) = a_0 + a_1s$

Los coeficientes a_0 y a_1 se hallan resolviendo el sistema normal:

$$\begin{aligned} (g_0 \cdot g_0)a_0 + (g_0 \cdot g_1)a_1 &= g_0 \cdot T \\ (g_1 \cdot g_0)a_0 + (g_1 \cdot g_1)a_1 &= g_1 \cdot T \end{aligned}$$

$$\text{donde: } g_0 \cdot g_0 = \sum_{j=1}^{10} g_0^2(s_j) = \sum_{j=1}^{10} 1^2 = 10$$

$$g_0 \cdot g_1 = g_0 \cdot s = \sum_{j=1}^{10} g_0(s_j)g_1(s_j) = \sum_{j=1}^{10} 1s_j = \sum_{j=1}^{10} s_j = 4,68$$

$$g_1 \cdot g_1 = \sum_{j=1}^{10} g_1^2(s_j) = \sum_{j=1}^{10} s_j^2 = 3,0304$$

$$g_0 \cdot T = \sum_{j=1}^{10} g_0(s_j)T_j = \sum_{j=1}^{10} 1T_j = \sum_{j=1}^{10} T_j = 170,4$$

$$g_1 \cdot T = \sum_{j=1}^{10} g_1(s_j) T_j = \sum_{j=1}^{10} s_j T_j = 100,403$$

Entonces, el sistema normal resulta:

$$\begin{aligned} 10 a_0 + 4,68 a_1 &= 170,4 \\ 4,68 a_0 + 3,0304 a_1 &= 100,403 \end{aligned}$$

cuya solución es: $a_0 = 5,53$
 $a_1 = 24,595$

por tanto, la recta de mejor ajuste será:

$$T = 5,53 + 24,585 s$$

b) En el caso del modelo cuadrático $T = b_0 + b_1 s + b_2 s^2$ se pueden tomar las funciones base

$$g_0(s) = 1; \quad g_1(s) = s \quad \text{y} \quad g_2(s) = s^2$$

y los coeficientes b_0 , b_1 y b_2 se calculan mediante el sistema normal:

$$\begin{aligned} (g_0 \cdot g_0) b_0 + (g_0 \cdot g_1) b_1 + (g_0 \cdot g_2) b_2 &= g_0 \cdot T \\ (g_1 \cdot g_0) b_0 + (g_1 \cdot g_1) b_1 + (g_1 \cdot g_2) b_2 &= g_1 \cdot T \\ (g_2 \cdot g_0) b_0 + (g_2 \cdot g_1) b_1 + (g_2 \cdot g_2) b_2 &= g_2 \cdot T \end{aligned}$$

Esto es:

$$\begin{aligned} 10b_0 + \left(\sum_{j=1}^{10} s_j \right) b_1 + \left(\sum_{j=1}^{10} s_j^2 \right) b_2 &= \sum_{j=1}^{10} T_j \\ \left(\sum_{j=1}^{10} s_j \right) b_0 + \left(\sum_{j=1}^{10} s_j^2 \right) b_1 + \left(\sum_{j=1}^{10} s_j^3 \right) b_2 &= \sum_{j=1}^{10} s_j T_j \\ \left(\sum_{j=1}^{10} s_j^2 \right) b_0 + \left(\sum_{j=1}^{10} s_j^3 \right) b_1 + \left(\sum_{j=1}^{10} s_j^4 \right) b_2 &= \sum_{j=1}^{10} s_j^2 T_j \end{aligned}$$

Una vez calculadas las sumas, el sistema queda:

$$\begin{aligned} 10b_0 + 4,68b_1 + 3,0304b_2 &= 170,4 \\ 4,68b_0 + 3,0304b_1 + 2,35612b_2 &= 100,403 \\ 3,0304b_0 + 2,35612b_1 + 2,02127b_2 &= 73,1248 \end{aligned}$$

Cuya solución, mediante el método de Gauss, es:

$$\begin{aligned} b_0 &= -0,63 \\ b_1 &= 55,955 \\ b_2 &= -28,100 \end{aligned}$$

Luego, el modelo cuadrático de mejor ajuste será:

$$T = -0,63 + 55,955 s - 28,1 s^2$$

En la figura 3 se muestran los puntos experimentales y los dos modelos ajustados.

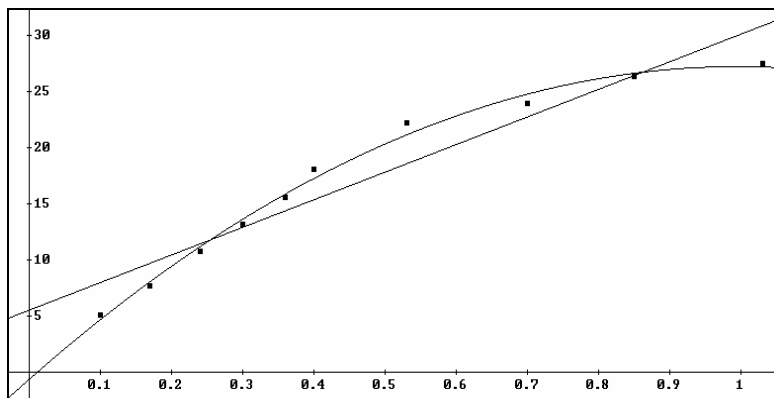


Figura 3

Ejemplo 3

Plantee el sistema normal de ecuaciones para ajustar el modelo $y = a_0 + a_1x + a_2e^{-x} + a_3 \sin x$ a un conjunto de datos $(x_j, y_j), j = 1, 2, \dots, 50$.

Solución:

Tomando como funciones base:

$$\begin{aligned} g_0(s) &= 1 \\ g_1(s) &= x \\ g_2(s) &= e^{-x} \\ g_3(s) &= \sin x \end{aligned}$$

se tiene el sistema normal:

$$\begin{aligned} (g_0 \cdot g_0)a_0 + (g_0 \cdot g_1)a_1 + (g_0 \cdot g_2)a_2 + (g_0 \cdot g_3)a_3 &= g_0 \cdot y \\ (g_1 \cdot g_0)a_0 + (g_1 \cdot g_1)a_1 + (g_1 \cdot g_2)a_2 + (g_1 \cdot g_3)a_3 &= g_1 \cdot y \\ (g_2 \cdot g_0)a_0 + (g_2 \cdot g_1)a_1 + (g_2 \cdot g_2)a_2 + (g_2 \cdot g_3)a_3 &= g_2 \cdot y \\ (g_3 \cdot g_0)a_0 + (g_3 \cdot g_1)a_1 + (g_3 \cdot g_2)a_2 + (g_3 \cdot g_3)a_3 &= g_3 \cdot y \end{aligned}$$

Esto es:

$$\begin{aligned}
& 50a_0 + \left(\sum_{j=1}^{50} x_j \right) a_1 + \left(\sum_{j=1}^{50} e^{-x_j} \right) a_2 + \left(\sum_{j=1}^{50} \text{sen} x_j \right) a_3 = \sum_{j=1}^{50} x_j \\
& \left(\sum_{j=1}^{50} x_j \right) a_0 + \left(\sum_{j=1}^{50} x_j^2 \right) a_1 + \left(\sum_{j=1}^{50} x_j e^{-x_j} \right) a_2 + \left(\sum_{j=1}^{50} x_j \text{sen} x_j \right) a_3 = \sum_{j=1}^{50} x_j y_j \\
& \left(\sum_{j=1}^{50} e^{-x_j} \right) a_0 + \left(\sum_{j=1}^{50} x_j e^{-x_j} \right) a_1 + \left(\sum_{j=1}^{50} e^{-2x_j} \right) a_2 + \left(\sum_{j=1}^{50} e^{-x_j} \text{sen} x_j \right) a_3 = \sum_{j=1}^{50} y_j e^{-x_j} \\
& \left(\sum_{j=1}^{50} \text{sen} x_j \right) a_0 + \left(\sum_{j=1}^{50} x_j \text{sen} x_j \right) a_1 + \left(\sum_{j=1}^{50} e^{-x_j} \text{sen} x_j \right) a_2 + \left(\sum_{j=1}^{50} \text{sen}^2 x_j \right) a_3 = \sum_{j=1}^{50} y_j \text{sen} x_j
\end{aligned}$$

Ajuste de modelos no lineales mediante cambios de variables

Cuando el modelo que se necesita ajustar no es lineal respecto a sus parámetros, el problema se hace mucho más complicado. No obstante, existen formas de abordarlo, algunas que brindan los valores exactos de los parámetros del modelo, otras que ofrecen una solución aproximada.

En algunos casos, el modelo no lineal se puede linealizar mediante cambios de variables y, entonces, se aplica al modelo linealizado el procedimiento de las ecuaciones normales. Aunque esta forma de proceder no ofrece los valores exactos de los parámetros que optimizan el sistema original, la solución que se obtiene suele ser bastante aproximada y, por lo general, siempre que esta variante es posible, se prefiere a otros métodos exactos pero más complicados. A continuación se muestran algunos modelos no lineales y los cambios de variables que los convierten en lineales.

a) $y = a(b)^x$

Aplicando logaritmos: $\ln y = \ln a + (\ln b)x$

Haciendo $Y = \ln y$, $K_1 = \ln a$, $K_2 = \ln b$ el sistema se reduce a:

$$Y = K_1 + K_2 x$$

que es un modelo lineal, el cual se ajusta a los datos modificados: (x_j, Y_j) donde $Y_j = \ln y_j$ para $j = 1, 2, \dots, m$. Una vez conocidos K_1 y K_2 , los parámetros a y b se hallan como:

$$a = e^{K_1} \quad y \quad b = e^{K_2}$$

b) $y = ax^b$

Aplicando logaritmos: $\ln y = \ln a + b(\ln x)$

Haciendo $Y = \ln y$, $X = \ln x$, $K_1 = \ln a$, $K_2 = b$ el sistema se convierte en:

$$Y = K_1 + K_2 X$$

que se trata de un modelo lineal en las variables X e Y , el cual se puede ajustar a los datos transformados: (X_j, Y_j) donde $X_j = \ln x_j$ y $Y_j = \ln y_j$ para $j = 1, 2, \dots, m$. Hallados K_1 y K_2 , los parámetro a y b se determinan sin dificultad.

c) $y = a + \frac{b}{x}$

Se convierte en un modelo lineal si se define la variable: $X = \frac{1}{x}$. Resulta el modelo lineal:

$$y = a + bX$$

el cual es ajustado a los datos transformados (X_j, y_j) donde $X_j = \frac{1}{x_j}$ para $j = 1, 2, \dots, m$.

d) $y = \frac{1}{ax + b}$

Se puede escribir como $\frac{1}{y} = ax + b$

Llamando $Y = \frac{1}{y}$, queda: $Y = ax + b$

que es un modelo lineal, el cual se debe ajustar a los datos modificados (x_j, Y_j) donde

$Y_j = \frac{1}{y_j}$ para $j = 1, 2, \dots, m$.

e) $y = \frac{x}{ax + b}$

El cual se puede expresar como $\frac{1}{y} = \frac{ax + b}{x} = a + \frac{b}{x}$

Haciendo $X = \frac{1}{x}$ y $Y = \frac{1}{y}$ el modelo se reduce a la forma lineal:

$$Y = a + bX$$

que se ajusta a los datos (X_j, Y_j) donde $X_j = \frac{1}{x_j}$ y $Y_j = \frac{1}{y_j}$ para $j = 1, 2, \dots, m$.

Ejemplo 4

Cuando un condensador de C farad con una carga de q coulomb se descarga a través de una resistencia de R ohm, como se muestra en la figura 4, la corriente de descarga, en ampere, viene dada por

$$i = \frac{q}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

donde t es el tiempo, medido en segundos, a partir del comienzo de la descarga. Determine los valores de q y la constante RC a partir de los datos de la corriente de descarga medida en cinco instantes y que muestra la tabla 3.

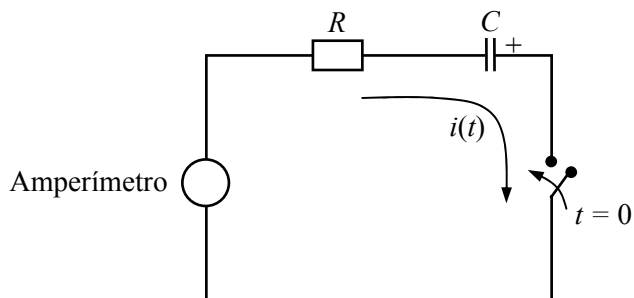


Figura 4

j	t_j	$i(t_j)$
1	0,1	1,228
2	0,2	1,005
3	0,3	0,823
4	0,4	0,674
5	0,5	0,552

Tabla 3

Solución:

Para simplificar, se llamará: $a = \frac{q}{RC}$ y $b = -\frac{1}{RC}$

con lo cual el modelo a ajustar es: $i = ae^{bt}$

Aplicando logaritmos: $\ln i = \ln a + bt$

Introduciendo las nuevas variables: $y = \ln i$ y $c = \ln a$

se obtiene el modelo lineal: $y = c + bt$

El cual será ajustado a los datos transformados (t_j, y_j) donde $y_j = \ln i(t_j)$ $j = 1, 2, 3, 4, 5$ (tabla 4).

Las funciones básicas serán: $g_0(t) = 1$ y $g_1(t) = t$

y el sistema normal de ecuaciones:

$$\begin{aligned}(g_0 \cdot g_0)c + (g_0 \cdot g_1)b &= g_0 \cdot y \\ (g_1 \cdot g_0)c + (g_1 \cdot g_1)b &= g_1 \cdot y\end{aligned}$$

Es decir:

$$\begin{aligned}5c + \left(\sum_{j=1}^5 t_j \right) b &= \sum_{j=1}^5 y_j \\ \left(\sum_{j=1}^5 t_j \right) c + \left(\sum_{j=1}^5 t_j^2 \right) b &= \sum_{j=1}^5 t_j y_j\end{aligned}$$

j	t_j	$i(t_j)$	$y_j = \ln i(t_j)$
1	0,1	1,228	0,205387
2	0,2	1,005	0,004988
3	0,3	0,823	-0,194799
4	0,4	0,674	-0,394525
5	0,5	0,552	-0,693147

Tabla 4

Después de calcular las sumas indicadas, se obtiene:

$$\begin{aligned} 5c + 1,5b &= -0,973172 \\ 1,5c + 0,55b &= -0,491817 \end{aligned}$$

y de aquí: $c = 0,404979$ y $b = -1,998701$

a partir de c se halla $a = e^c = 1,499271$

El modelo ajustado para la corriente de descarga será:

$$i = 1,499271e^{-1,988701t}$$

Como $a = \frac{q}{RC}$ y $b = -\frac{1}{RC}$, resulta:

$$\frac{q}{RC} = 1,499271 \quad \text{y} \quad -\frac{1}{RC} = -1,998701$$

y de aquí: $RC = 0,500325$ segundos y $q = 0,750123$ coulomb

Ajuste numérico de modelos no lineales

El procedimiento de linealizar un modelo para calcular aproximaciones a los parámetros no siempre es posible. En estos casos hay otras dos formas de proceder. Una de ellas es minimizar numéricamente la función desviación cuadrática mediante alguno de los métodos que se estudiarán en el capítulo 6. Aunque este es el enfoque más recomendado, su estudio queda pospuesto para ese momento.

El otro enfoque es calcular las derivadas parciales de la función desviación cuadrática, igualarlas a cero y resolver el sistema de ecuaciones no lineales que resulta. Por esta vía suelen aparecer sistemas no lineales muy complejos, cuya solución numérica puede ser muy problemática. Sin embargo, en algunos casos simples la solución numérica es factible e, incluso, a veces se puede reducir el sistema no lineal a una sola ecuación no lineal, la cual se puede resolver por algunos de los métodos estudiados en el capítulo 2. Por esta vía, a modo de muestra, se resolverá el ejemplo 4 de las páginas anteriores.

Ejemplo 5

Ajuste el modelo $i = ae^{bt}$ (vea el ejemplo anterior) a los datos de la tabla 3, sin linealizarlo.

Solución:

La desviación cuadrática viene dada por la expresión:

$$D = \sum_{j=1}^5 \left(ae^{bt_j} - i_j \right)^2$$

Derivando parcialmente respecto a a y a b , e igualando a cero:

$$\frac{\partial D}{\partial a} = \sum_{j=1}^5 2(ae^{bt_j} - i_j)e^{bt_j} = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial b} = \sum_{j=1}^5 2(ae^{bt_j} - i_j)t_j e^{bt_j} = 0$$

Dividiendo la primera ecuación por 2, la segunda por $2a$ y separando cada suma:

$$a \sum_{j=1}^5 e^{2bt_j} - \sum_{j=1}^5 i_j e^{bt_j} = 0 \quad (4)$$

$$a \sum_{j=1}^5 t_j e^{2bt_j} - \sum_{j=1}^5 i_j t_j e^{bt_j} = 0 \quad (5)$$

Si la ecuación (4) se multiplica por $\sum_{j=1}^5 t_j e^{2bt_j}$, la ecuación (5) por $\sum_{j=1}^5 e^{2bt_j}$ y se restan las ecuaciones resultantes, el parámetro a desaparece:

$$\sum_{j=1}^5 i_j e^{bt_j} \sum_{j=1}^5 t_j e^{2bt_j} - \sum_{j=1}^5 e^{2bt_j} \sum_{j=1}^5 i_j t_j e^{bt_j} = 0 \quad (6)$$

y el sistema queda reducido a una ecuación con una sola incógnita: b . Evaluando las sumas para varios valores de b se concluye que en el intervalo $[-2, 0]$ la ecuación tiene una raíz. Aplicando en este intervalo el método de bisección (esto requiere la confección de un pequeño programa) se determinó con seis cifras decimales exactas el valor de $b = -1,999357$. De cualquiera de las ecuaciones (4) o (5) se halla el parámetro $a = 1,499527$. Compárese estos valores con los obtenidos por el método aproximado del ejemplo 4 ($b = -1,998701$ y $a = 1,499271$) que difieren de estos en menos de una milésima.

Ejercicios

1. Ajuste a los datos de la siguiente tabla, polinomios de grados 1, 2 y 3. Determine para cada uno la desviación cuadrática obtenida y verifique como la desviación cuadrática es mucho menor en el polinomio de grado 2 que en el de grado 1, pero que, sin embargo, no disminuye significativamente en el polinomio de grado 3. ¿Qué conclusión obtiene de este resultado?

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i	0	0,5	2	3	3,5	4,5	5	6	7	7,7	8,5
y_i	27,8	22,5	12,9	9,3	6,8	8,1	8,6	11,2	17,9	21,6	31,3

2. Con vista a determinar la velocidad más económica de un tipo de automóvil de pasajeros, se mide, para diferentes velocidades de conducción, cuántos kilómetros recorre por litro de gasolina. Los resultados se muestran en la tabla que sigue. Ajuste un polinomio de segundo grado y halle después para qué velocidad se hace mínimo el consumo (o máximo los kilómetros por litro).

Velocidad (km/h)	30	40	50	60	70	80	90	100
km/litro de gasolina	9,2	9,7	9,9	10	9,8	9,4	8,8	8,1

3. Cuando un cuerpo sólido se mueve a través de un fluido viscoso se produce sobre aquel una fuerza f_r que se opone al movimiento (fuerza resistiva) y que depende de la velocidad del cuerpo. Con vista a esclarecer esta dependencia, se efectúa un experimento en el cual un cuerpo se hace mover a diferentes velocidades a través de un medio viscoso y se mide la fuerza de fricción. Los resultados obtenidos se muestran en la siguiente tabla. Halle el modelo del tipo $f_r = \mu v^k$ que mejor se ajusta a estos datos.

Velocidad (m/s)	1	2	3	4	5
Fricción (newton)	50	153	293	464	663

4. Se sabe que existe una relación entre el nivel de lluvias caído durante un año y la altura sobre el nivel del mar, correspondiendo, por regla general, mayores precipitaciones a los lugares más altos. Para cuantificar este fenómeno se cuenta con los datos de lluvia de la tabla 5, registrados por pluviómetros ubicados en lugares a diferentes altitudes en la región de la Sierra Maestra al oeste de Santiago de Cuba. Determine que relación lineal aproximada existe entre estas variables.

Zona	Altitud (m)	Precipitación anual (mm)	Zona	Altitud (m)	Precipitación anual (mm)
Batey Mabay	60	1290	Macuba	320	1660
El molino	80	1290	Los Lajiales	380	1625
Batey América	100	1310	Oro de Guisa	560	1780
El Alcázar	180	1310	Las Coloradas	420	1840
Maravilla	160	1330	Buena Vista	555	1910
Las Mantecas	160	1400	Duaba	600	1940
Las Pozas	325	1420	Caña Brava	700	2190
Cruce de los baños	160	1510			

Tabla 5

5. El tiempo que se necesita para detener un vehículo es mayor mientras mayor es la velocidad a la que circula y, por tanto, mayor será la longitud L que recorrerá desde que el conductor descubre un hecho peligroso hasta que el vehículo queda inmóvil. En un código de vialidad y tránsito se brinda la siguiente tabla. Ajuste un polinomio de segundo grado a estos datos y determine a qué velocidad circulaba un automóvil que recorrió 70 metros antes de detenerse.

Velocidad (km/h)	30	40	50	60	70	80	90	100	120
L (m)	11,6	18,3	26,1	34,9	47,3	60,1	75,0	91,4	130

6. La resistividad R de un material conductor de electricidad, se define como la resistencia eléctrica de un conductor de una unidad de longitud y una unidad de área en su sección transversal. En ingeniería eléctrica se suele medir en $\text{ohm}\cdot\text{mm}^2/\text{m}$. La resistividad de la mayoría de los metales aumenta con la temperatura. Esta dependencia se puede representar aproximadamente por la relación:

$$R_t = R_0(1 + \alpha\Delta t)$$

donde: R_t : Resistividad a la temperatura t
 R_0 : Resistividad a la temperatura t_0
 α : Coeficiente térmico de la resistividad
 Δt : $t - t_0$

Determine los coeficientes R_0 y α correspondientes al cobre a la temperatura $t_0 = 20^\circ\text{C}$ a partir de las siguientes mediciones:

Temperatura ($^\circ\text{C}$)	22	24	25	27	28	30
Resistividad ($\text{ohm}\cdot\text{mm}^2/\text{m}$)	0,01764	0,01778	0,01784	0,01798	0,01805	0,01818

7. Los datos que muestra la tabla 6 corresponden a la entrada mensual de grupos turísticos a las instalaciones de una empresa hotelera durante los dos últimos años. Se desea realizar un pronóstico acerca de la afluencia de grupos turísticos en el año siguiente y para ello se utilizará el modelo:

$$y = a + bt + c \cos \frac{\pi}{6}t + d \sin \frac{\pi}{6}t$$

donde t : meses contados a partir del primer dato de la tabla 6
 y : Grupos turísticos que llegaron en el mes t

Ajuste el modelo a los datos, represente en un mismo sistema coordinado los datos y el modelo ajustado y pronostique cuantos grupos turísticos llegarán en primer trimestre del año próximo.

Mes	Primer año	Segundo año
Enero	954	968
Febrero	869	928
Marzo	832	873
Abril	634	665
Mayo	476	¿?
Junio	379	¿?
Julio	591	675
Agosto	571	642
Septiembre	472	578
Octubre	553	703
Noviembre	608	623
Diciembre	797	882

Tabla 6

8. Siguiendo un procedimiento similar al del ejemplo 5, elabore una algoritmo en pseudo código para ajustar el modelo no lineal:

$$y = ax^b$$

a un conjunto de datos: $(x_j, y_j) j = 1, 2, \dots, m$.

9. Por análisis teóricos se sabe que el flujo de un líquido a través de una tubería depende de la pendiente de la misma, según un modelo del tipo:

$$Q = as^b$$

donde s es la pendiente de la tubería y a y b son parámetros a determinar. Mediante experimentos se han obtenido los siguientes datos:

Experimento	1	2	3	4	5	6	7	8
Pendiente	0,001	0,003	0,007	0,01	0,02	0,03	0,05	0,06
Flujo (m ³ /s)	0,80	1,45	2,30	2,75	4,00	5,00	6,55	7,25

- a) Utilice el algoritmo elaborado en ejercicio 8 para ajustar el modelo.
b) Aplique logaritmos para linealizar el modelo y, mediante cambios de variables, obtenga a y b .
c) Compare los resultados obtenidos en a) y en b).
10. Cuando un cuerpo es calentado, su densidad cambia. La densidad a la temperatura t viene dada por la fórmula:

$$\delta_t = \frac{\delta_0}{1 + \beta(t - t_0)}$$

donde δ_0 : Densidad (g/cm³) a la temperatura t_0 de referencia
 β : Coeficiente de expansión volumétrica (1/°C)

Con vistas a determinar las constantes δ_0 y β para el ácido nítrico a 20 °C, se midió la densidad a diferentes temperaturas y se obtuvo:

t (°C)	19	21	24	25	28	30	32	35
δ (g/cm ³)	1,5102	1,5098	1,5093	1,5091	1,5085	1,5081	1,5077	1,5072

Linealice el modelo y, mediante cambios de variables, determine aproximadamente, los parámetros δ_0 y β .

Otras lecturas recomendadas

El tema de aproximación funcional es sumamente amplio y en él existen multitud de aspectos útiles e interesantes, muchos de los cuales no han podido ser tratados en este texto, dado su carácter introductorio.

Solamente han sido estudiados dos criterios de aproximación: la interpolación y el ajuste de curvas; sin embargo existen otros muy importantes, sobre todo el conocido como criterio minimax y el criterio de Taylor. En el criterio minimax la distancia entre una función y su función aproximante se toma como la máxima diferencia entre las imágenes correspondientes para un cierto conjunto de definición y la aproximación óptima será aquella que minimice esta distancia; para el caso en que las funciones aproximantes sean polinomios existen algoritmos aproximados que resuelven el problema con eficiencia y la exactitud deseada, pero el tratamiento requiere de mucho más espacio y tiempo del que se dispone en un curso introductorio. El lector interesado puede consultar “Computing Methods” de I. S. Berezin y N. P. Zhidkov o también “Introduction to Numerical Analysis” de K. E. Atkinson. En el criterio de aproximación de Taylor la proximidad entre dos funciones viene dada por la coincidencia en un punto de referencia de una mayor o menor cantidad de derivadas; se estudia a un nivel elemental en los cursos de Cálculo Infinitesimal empleando como funciones aproximantes los polinomios de Taylor; muchos de los métodos numéricos tratados en este libro están basados en esta forma de aproximación, la cual se supone conocida del lector. En cursos más avanzados se utilizan las funciones racionales de Padé que demuestran ser una vía más eficientes a la hora de evaluar una función aproximante. El estudio de las funciones de Padé para implementar el criterio de Taylor puede ser consultado en muchos libros de Análisis Numérico, entre ellos: “First Course in Numerical Analysis” de A. Ralston.

Los métodos de interpolación tratados en el libro pueden ser ampliados en varios sentidos. Tanto el método de Lagrange como el de Newton dan lugar a fórmulas mucho más simples cuando los nodos de interpolación están ordenados (en forma creciente o decreciente) y son equidistantes. En el caso del método de Newton, aparecen entonces los conceptos de diferencia finita hacia delante, diferencia finita hacia atrás y diferencia central y existen varias fórmulas para realizar la interpolación mediante estos tipos de diferencias. En los cursos de Matemática numérica de algunos años atrás, el tema de interpolación polinomial era tratado mucho más ampliamente debido a que la necesidad de realizar los cálculos manualmente obligaba a la búsqueda de muchos algoritmos que abordaban casos particulares, con el objetivo de hacer las operaciones aritméticas más sencillas (evitar las multiplicaciones y divisiones) y disminuir las equivocaciones. El tema se encuentra tratado ampliamente en el libro “Computational Mathematics” de B. P. Demidovich e I. A. Maron.

El problema de interpolación puede combinarse con el criterio de proximidad de Taylor exigiendo que en los nodos de interpolación la función original y la aproximante coincidan no solo en valor sino en una o varias derivadas; este es conocido como el criterio de aproximación de Hermite. El lector interesado en este enfoque puede consultar la obra de Atkinson antes citada o, con más amplitud, en el libro de Berezin y Zhidkov también citado más arriba.

Aquí se han utilizado como funciones interpoladoras los polinomios y los splines cúbicos, pero otras funciones podrían ser empleadas, en particular las trigonométricas y las exponenciales. La interpolación también puede extenderse a funciones de más de una variable. Aunque el problema puede muchas veces ser reducido a realizar varias interpolaciones unidimensionales, se han desarrollado algoritmos para el tratamiento general en funciones de n variables, los cuales, por su complejidad y uso menos frecuente, han sido excluidos de este libro. Ambos temas pueden ser consultados en la enciclopédica obra ya citada de Berezin y Zhidkov.

En muchas ocasiones los nodos de interpolación están predeterminados por el problema que se está resolviendo, pero en otras ocasiones, el analista puede decidir el valor exacto donde desea tomarlos. El problema de ubicar los nodos de la mejor manera posible (minimizando el máximo error de interpolación) está tratado en muchos textos, vinculado con el tema de los polinomios de Chebyshev. Los lectores motivados por este asunto encontrarán una buena referencia, a un nivel elemental en “Elementary Numerical Analysis” de S. D. Conte y, con más profundidad en el texto de Atkinson, ya citado.

Aunque en este libro el tema de las funciones spline para la interpolación está tratado con una relativa amplitud para un texto de carácter elemental, muchos aspectos no han sido tocados. En particular, el error de interpolación el cual puede ser consultado en muchos lugares, entre ellos en el libro, varias veces citado, de K. E. Atkinson. Un enfoque mucho más general y amplio de los splines, no solamente como funciones interpoladoras, sino para el ajuste y para el diseño gráfico, construido sobre el enfoque de las funciones spline básicas (B-splines), está contenido en el excelente informe técnico “DT_NURBS Spline Geometry Subprogram Library Theory Document”, Versión 3.6, preparado por Boeing Shared Services Group y editado por Naval Surface Warfare Center, Carderock División.

El tema del ajuste de modelos no lineales como un problema de optimización de varias variables, ha sido pospuesto para el capítulo 6, como una aplicación de las técnicas numéricas de optimización. En el caso de los modelos lineales, el uso de polinomios ortogonales como funciones básicas no se ha contemplado en el texto. La teoría y práctica de este tipo de técnica puede consultarse a un nivel básico en la obra de A. Ralston antes citada y, con más profundidad, en la obra clásica: “Analysis of Numerical Methods” de E. Isaacson y H. B. Keller.

Principales ideas del capítulo

- Los problemas de aproximación de funciones aparecen en la teoría y en la práctica con gran frecuencia; bien porque no se conoce una expresión analítica para la función $f(x)$, sino valores aislados $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ de la misma o porque su expresión exacta es muy complicada, y se necesita disponer de una expresión más simple que permita, aunque sea de manera aproximada, evaluar la función en valores de x necesarios.
- Si se conocen los valores que toma la función $f(x)$ en los $n + 1$ puntos diferentes $x_0, x_1, \dots, x_n$, (llamados nodos de interpolación), el problema de interpolación consiste en hallar una

función $g(x)$ cuyos valores puedan ser calculados para cualquier x en un intervalo que contiene a $x_0, x_1, \dots, x_n$, y de manera que $g(x_i) = f(x_i)$ para $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

- A la diferencia entre la función interpolada y la interpoladora se le llama *error de interpolación* y se denota $R(x)$.
- El error de interpolación depende del punto x en que se interpole; es cero si x es un nodo de interpolación y, por lo general, aumenta a medida que x está más distante de los nodos. En particular, el error de interpolación suele ser mucho mayor (en valor absoluto) en los casos de extrapolación que de interpolación.
- Para $n + 1$ nodos de interpolación diferentes $x_0, x_1, \dots, x_n$ y una función f que toma valores $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$, existe uno y solo un polinomio interpolador de grado menor o igual que n .
- Si $f(x)$ es derivable $n + 1$ veces en un intervalo cerrado I que incluye a los nodos de interpolación $x_0, x_1, \dots, x_n$ del polinomio interpolador $p(x)$ y al número x , entonces existe en I al menos un valor c tal que, el error de interpolación en x es:

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_n)$$

- La fórmula de interpolación de Lagrange se basa en la expresión:

$$p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x)$$

$$\text{donde: } L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \cdots (x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1) \cdots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \cdots (x_i-x_n)} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

- La interpolación polinomial no debe usarse como una técnica global para representar a una función en un intervalo grande utilizando muchos nodos, todo lo contrario, se trata de un procedimiento para aproximar *localmente* una función mediante un polinomio.
- Las diferencias divididas de una función $f(x)$ definida en los números diferentes $x_0, x_1, \dots, x_n$ de cualquier orden k se definen recursivamente como:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \quad k = 1, 2, 3, \dots, n$$

donde la diferencia de orden cero es $f[x] = f(x)$

- El método de interpolación de Newton se basa en la fórmula:

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + \tilde{R}_n(x)$$

$$\text{donde: } \tilde{R}_n(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}](x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_n)$$

es una estimación del error de interpolación de $p_n(x)$.

- Las diferencias divididas de orden m de un polinomio de grado m son constantes (es decir, no dependen de los nodos seleccionados) y las de orden mayor que m son nulas.

- Una función spline es una función polinomial por tramos que es continua y posee derivadas continuas hasta un cierto orden. Además de las condiciones de continuidad y suavidad, el spline deberá satisfacer algunas otras condiciones adecuadas al problema que se desea resolver.
- El spline cúbico interpolador, para el tramo $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, viene dado por

$$s(x) = \frac{v^3 M_i + u^3 M_{i+1}}{6h_i} + \frac{vy_i + uy_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i(vM_i + uM_{i+1})}{6}$$

donde: $u = x - x_i$
 $v = x_{i+1} - x$

y los números M_i , $i = 0, 1, \dots, n$ se calculan resolviendo un sistema lineal de ecuaciones con diagonal predominante cuya estructura es diferente para el spline natural, anclado o periódico.

- El problema del ajuste de curvas consiste, en encontrar aquella función g de la familia G que se aproxime “lo mejor posible” a los datos (x_j, y_j) ($j = 1, 2, \dots, m$) lo cual significa hacer mínima la desviación cuadrática:

$$D = \sum_{j=1}^m [g(x_j) - y_j]^2$$

- Cuando el modelo a ajustar es lineal, es decir, del tipo:

$$g(x) = C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x) + \dots + C_n g_n(x)$$

entonces los parámetros se hallan resolviendo el sistema normal de ecuaciones:

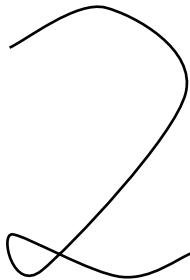
$$\begin{aligned} (g_1 \cdot g_1)C_1 + (g_1 \cdot g_2)C_2 + \dots + (g_1 \cdot g_n)C_n &= g_1 \cdot y \\ (g_2 \cdot g_1)C_1 + (g_2 \cdot g_2)C_2 + \dots + (g_2 \cdot g_n)C_n &= g_2 \cdot y \\ &\vdots \\ (g_n \cdot g_1)C_1 + (g_n \cdot g_2)C_2 + \dots + (g_n \cdot g_n)C_n &= g_n \cdot y \end{aligned}$$

donde $f \cdot g = \sum_{j=1}^m f(x_j)g(x_j)$

- Cuando el modelo a ajustar no es lineal el problema se puede resolver aproximadamente a veces linealizando el modelo, o bien resolviendo el sistema no lineal de ecuaciones que surge de igualar a cero las derivadas parciales de la desviación cuadrática, o bien resolviendo numéricamente el problema de minimizar la desviación cuadrática, como se verá en el capítulo 6.

Auto examen

1. ¿En qué consiste el problema general de la aproximación de funciones y, en particular, el problema de interpolación?
2. Ofrezca dos ejemplos prácticos de problemas de aproximación funcional: uno que deba ser resuelto por interpolación y otro por ajuste de curvas.
3. Se tienen los valores de una función $f(x)$ en cuatro nodos de interpolación. Diga cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuales son falsas y porqué.
 - a) Existen infinitos polinomios de grado menor o igual que dos para dichos nodos.
 - b) Hay uno y solo un polinomio de grado tres para dichos nodos.
 - c) Pudiera haber un polinomio interpolador de grado menor o igual que 5, pero no se puede asegurar.
4. Halle un polinomio interpolador de grado 2 que represente a la función $\frac{\sin x}{x}$ en el intervalo $[-1, 1]$. Dé una cota del error de interpolación.
5. ¿A qué se llama un spline cúbico interpolador?
6. Plantee los sistemas de ecuaciones necesarios para determinar los splines cúbicos naturales que permitan obtener una curva paramétrica con la forma de la figura que sigue:



7. El consumo eléctrico en un domicilio depende de muchos factores pero fundamentalmente de la época del año. Proponga un modelo lineal que sea adecuado para ajustarse a los datos mensuales de consumo eléctrico (en kilowatt-hora). Ajuste el modelo propuesto a los datos de consumo eléctrico de su casa en los últimos 24 meses (los recibos que conserve) y utilice el modelo para pronosticar el consumo del mes próximo.
8. Ajuste a los datos que siguen los modelos no lineales biparamétricos $y = ax^b$ e $y = ab^x$. Determine cual de los dos se ajusta mejor a los datos.

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
y	5,1	5,4	5,7	6,0	6,3	6,6	7,0	7,4	7,8	8,2	8,7

9. Explique tres formas de resolver el problema de ajustar un modelo no lineal a un conjunto de valores experimentales.