

CAPÍTULO 5

Matemática Numérica, 2da Edición

Manuel Álvarez, Alfredo Guerra, Rogelio Lau

INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Objetivos

Al finalizar el estudio y la ejercitación de este capítulo, el lector debe ser capaz de:

- Describir las limitaciones de la fórmula de Barrow para el cálculo de integrales definidas.
- Describir geoméricamente los métodos de trapecios y de Simpson para el cálculo aproximado de integrales definidas.
- Justificar las fórmulas del método de los trapecios y del método de Simpson y de las expresiones para estimar el error de truncamiento.
- Describir la idea fundamental del método de integración numérica de Gauss.
- Justificar algebraicamente la fórmula de Gauss para tres puntos y generalizarla a otros valores de m .
- Deducir la fórmula de extrapolación de Richardson y explicar, a través de ella, el método de integración de Romberg.
- Describir los algoritmos en pseudo código de los métodos de trapecios, Simpson, Gauss y Romberg.
- Calcular integrales definidas mediante los algoritmos de trapecios, Simpson, Gauss y Romberg, estimando el error de truncamiento si fuera necesario.
- Modelar problemas simples que conducen a integrales definidas y resolverlos mediante métodos numéricos de integración.
- Explicar la forma en que una integral doble se puede calcular aproximadamente mediante los algoritmos numéricos para integrales unidimensionales, ejemplificando para los casos de Simpson y Gauss.
- Calcular integrales dobles mediante los métodos de Gauss y de Simpson y obtener, en este caso, una estimación del error de truncamiento.
- Explicar el algoritmo en pseudo código de los métodos de Gauss y de Simpson para el cálculo de integrales dobles.
- Modelar problemas simples que conduzcan a integrales dobles y calcularlas numéricamente por los métodos estudiados.

5.1 Introducción

En el curso de Cálculo Infinitesimal se ha estudiado el concepto de integral definida de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx$$

como el resultado de un proceso de límite de una suma finita. El lector seguramente recuerda las importantes aplicaciones que poseen las integrales en las diferentes ramas de la Geometría, la Física, la Química, las Ciencias Económicas y, prácticamente, en todas las ramas del saber. Supuesto que $f(x)$ sea continua en $[a, b]$, la integral se puede calcular mediante la regla de Barrow (también llamada de Newton – Leibniz):

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

donde $F(x)$ es cualquier primitiva de $f(x)$, es decir, una función cuya derivada sea $f(x)$.

El punto débil de este procedimiento analítico para evaluar una integral es la obtención de una función primitiva. Para muchas funciones sencillas se obtienen primitivas con mayor o menor dificultad pero, en muchos casos se presentan integrales para las cuales no existen primitivas que se puedan expresar en términos de funciones elementales. Lo peor es que, en muchas ocasiones, se trata de integrandos sencillos (es decir, formados por funciones elementales). Por supuesto que, si no se tiene una primitiva expresada en términos de funciones elementales, no es posible evaluarla en los límites de integración, y la regla de Barrow se hace inaplicable.

Ejemplo 1

Al calcular la longitud de una elipse aparece la integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} \, dt$$

donde el parámetro k depende de la excentricidad de la elipse. En el caso más simple en que la excentricidad es 1 (la elipse es una circunferencia), el parámetro k toma el valor 1 y la integral se calcula fácilmente. En el caso más general en que $0 < k < 1$ se ha demostrado que no existen funciones elementales que puedan ser primitivas. Este tipo de integral se llama “elíptica”.

Ejemplo 2

Las variables aleatorias se caracterizan por su función de densidad probabilística. De todas estas funciones de densidad, la más importante es la distribución Normal, que aparece de una u otra manera en casi todos los fenómenos naturales de carácter aleatorio. La probabilidad de que la variable con distribución normal tome un valor entre 0 y x viene dada por la integral:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

para la cual está demostrado que no existe una primitiva elemental.

Ejemplo 3

En el patrón de transmisión de algunas antenas aparece la función elemental

$$\frac{\sin \theta}{\theta}$$

donde θ representa una dirección en el espacio. Para calcular la potencia radiada por la antena en un sector, se requiere calcular la integral:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta$$

y, también en este caso, es imposible hallar una primitiva elemental del integrando. ■

En otros casos la regla de Barrow no puede usarse porque no se conoce la expresión analítica del integrando, sino valores obtenidos a través de mediciones.

Ejemplo 4

El gasto (en m³/s) de agua que circula por un río es el volumen de agua que atraviesa una sección cualquiera del río en una unidad de tiempo. Suponiendo, para simplificar el problema, que en todos los puntos de la sección seleccionada la velocidad es la misma (es decir, tomando una velocidad promedio v_m), el gasto se puede calcular como:

$$Q = v_m A$$

donde A es el área de la sección seleccionada. En la figura 1 se muestra una hipotética sección del río y se ha introducido un sistema de referencia con el eje vertical dirigido hacia abajo y el eje horizontal en la superficie del agua y a lo largo de la sección y con el origen en una de las orillas. Se ha representado por $h(x)$ la función que describe la profundidad del río para cada x . Es claro que el área de la sección será:

$$A = \int_0^b h(x) dx$$

pero la función $h(x)$ no tiene una expresión analítica conocida a la que se pueda encontrar una primitiva. La regla de Barrow, de nuevo, no se puede usar.

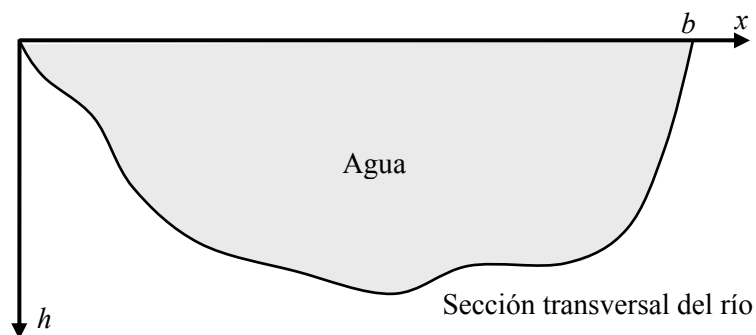


Figura 1

5.2 El método de los trapecios

Aunque el método más elemental para calcular la integral definida de una función consiste en utilizar la misma definición de la integral definida pero prescindiendo del proceso de límite, es decir:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i \quad (1)$$

el resultado que se obtiene es muy inexacto, a menos que se tome un número n de subintervalos muy grande. El método de los trapecios que se expone a continuación requiere una cantidad de cálculos semejante a la expresión (1) y produce resultados mucho mejores.

En esta sección y en todo lo que sigue de este capítulo, se supondrá que $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$. Aunque algunas de las expresiones que se deducirán pueden usarse aun sin el requisito de la continuidad de $f(x)$, las fórmulas para el cálculo de los errores siempre requerirán la continuidad, e incluso la derivabilidad de $f(x)$, de modo que no vale la pena contemplar el caso de funciones discontinuas. Por otra parte, en la mayoría de los casos de interés práctico el integrando es continuo o la integral se puede descomponer en una suma de integrales con el integrando continuo en el intervalo de integración.

El método de los trapecios se basa en la idea de dividir el intervalo de integración en n subintervalos de amplitud h mediante un conjunto de puntos $\{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$ y descomponer la integral en n integrales, cada una de las cuales posee un intervalo de integración pequeño de longitud h , como se ilustra en la figura 1. El parámetro h se denomina *paso* y juega un papel importante en la exactitud del resultado obtenido.

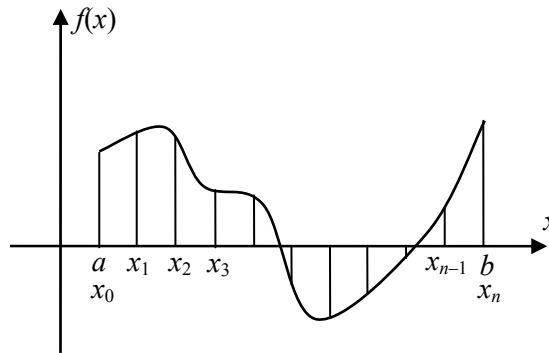


Figura 1

Es decir:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \quad (2)$$

donde: $x_i - x_{i-1} = h$ para $i = 1, 2, \dots, n$ y $h = \frac{b-a}{n}$

Ahora, cada una de las n integrales resultantes se aproximan sustituyendo el integrando $f(x)$ por un polinomio interpolador de grado 1, es decir, un segmento de recta, como se ilustra en la figura 2.

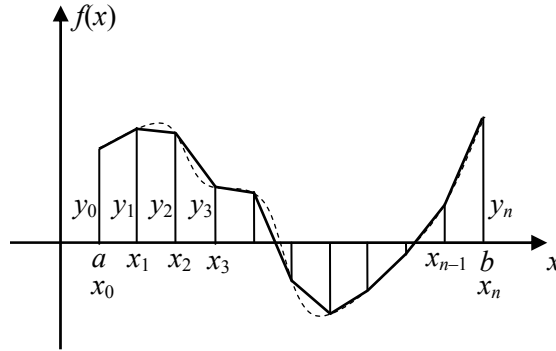


Figura 2

Nótese que la región entre la gráfica de $f(x)$ y el eje x se aproximará mediante un conjunto de n regiones, que tienen, en general, forma de trapecios, es decir, cuadriláteros con dos de sus lados paralelos, lo cual da nombre al método. Para simplificar la notación, se llamará: $y_i = f(x_i)$ para $i = 0, 1, 2, \dots, n$, como se muestra también en la figura 2.

Trabajando en el primero de los trapecios, que corresponde al sub-intervalo $[x_0, x_1]$, la ecuación de la recta de interpolación que le corresponde será:

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Es decir:

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h}(x - x_0)$$

Sustituyendo el integrando $f(x)$ por el polinomio $p_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h}(x - x_0)$, la primera de las n integrales queda aproximada como:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx &\approx \int_{x_0}^{x_1} p_1(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} \left(y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h}(x - x_0) \right) dx \\ &= y_0 \int_{x_0}^{x_1} dx + \frac{y_1 - y_0}{h} \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0) dx \\ &= y_0 x \Big|_{x_0}^{x_1} + \frac{y_1 - y_0}{2h} (x - x_0)^2 \Big|_{x_0}^{x_1} \\ &= y_0 (x_1 - x_0) + \frac{y_1 - y_0}{2h} (x_1 - x_0)^2 \\ &= y_0 h + \frac{y_1 - y_0}{2h} h^2 \end{aligned}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_1} p_1(x) dx = h \left(\frac{y_0 + y_1}{2} \right) \quad (3)$$

Nótese que el resultado obtenido coincide con la conocida fórmula para el área de un trapecio (semisuma de las bases por la altura) cuando y_0 y y_1 son positivas, pero la expresión (3) tiene un carácter más general, ya que es válida para cualesquiera valores (positivos, negativos o cero) que tomen y_0 y y_1 .

Es evidente que aplicando el mismo procedimiento para la segunda integral se obtendría:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \approx \int_{x_1}^{x_2} p_2(x) dx = h \left(\frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

y similarmente ocurriría para cada una de las n integrales de la expresión (2). Por tanto, de ella resulta:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{y_0 + y_1}{2} \right) + h \left(\frac{y_1 + y_2}{2} \right) + \dots + h \left(\frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right)$$

Simplificando:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right) \quad (4)$$

que es la forma usual de expresar el método de los trapecios para el cálculo numérico aproximado de integrales definidas.

Ejemplo 1

Calcule aproximadamente la integral

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

mediante el método de los trapecios, utilizando 10, 20 y 40 sub-intervalos. Compare con el resultado exacto, que es 2.

Solución:

Tomando $n = 10$ sub-intervalos, resulta $h = \frac{\pi - 0}{10} = 0,314159$. La tabla 1 muestra los valores de x_i y $y_i = \sin x_i$ para $i = 0, 1, \dots, 10$. A partir de ahí se obtiene:

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx \approx h \left(\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_9 + \frac{1}{2} y_{10} \right) = 1,983524$$

Similarmente, para $n = 20$, $h = 0,157080$ y se obtiene la aproximación:

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx \approx h \left(\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{19} + \frac{1}{2} y_{20} \right) = 1,995886$$

y, para $n = 40$, $h = 0,078540$ y resulta:

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx \approx h \left(\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{39} + \frac{1}{2} y_{40} \right) = 1,998972$$

i	x_i	$y_i = \sin x_i$
0	0,000000	0,000000
1	0,314159	0,309017
2	0,628319	0,587785
3	0,942478	0,809017
4	1,256637	0,951057
5	1,570796	1,000000
6	1,884956	0,951057
7	2,199115	0,809017
8	2,513274	0,587785
9	2,827433	0,309017
10	3,141593	0,000000

Tabla 1

Como era de esperar, a medida que el paso h toma valores más pequeños se obtienen resultados más exactos, así los errores respectivos para $n = 10, 20$ y 40 fueron: 0,016476, 0,004114 y 0,001028. Observe el hecho, que no es casual, de que en la medida en que el paso se reduce a la mitad, el error se reduce aproximadamente a la cuarta parte.

Algoritmo en pseudo código

El algoritmo que sigue calcula aproximadamente la integral definida de la función continua $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ mediante el método de los trapecios tomando n sub intervalos. Se suponen conocidos la función $f(x)$, el intervalo $[a, b]$ y el número entero $n > 1$. El resultado es, aproximadamente,

$$\int_a^b f(x) dx$$

$$h := \frac{b-a}{n}$$

$$Suma := \frac{1}{2} [f(a) + f(b)]$$

for $i = 1$ **to** $n - 1$

$$x = a + ih$$

$$Suma := Suma + f(x)$$

end

$$Integral := h \cdot Suma$$

El resultado aproximado es *Integral*

Terminar

El error de truncamiento en el método de los trapecios

Por supuesto que la fórmula (4) de los trapecios no tiene gran valor si no se puede acotar el error que con ella se comete. A continuación se hallará una expresión que en muchos casos permite determinar un error absoluto máximo de truncamiento. Además del error de truncamiento, la fórmula (4) introduce un error de redondeo debido a los errores de este tipo que contienen los sumandos y_i , del cual se hablará posteriormente, pero que desde ahora puede adelantarse que suele ser insignificante.

El error de truncamiento total se hallará como la suma de los errores de truncamiento que aparecen en cada uno de los subintervalos en que se divide $[a, b]$. Considérese, en general, el subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$) y sea $p(x)$ el polinomio de interpolación de primer grado mediante el cual se aproxima a $f(x)$ en dicho intervalo. Sea $r(x)$ el error de interpolación correspondiente, de modo que:

$$f(x) = p(x) + r(x) \quad \text{para } x_i \leq x \leq x_{i+1}$$

Integrando en cada miembro y trasponiendo, se obtiene:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} r(x) dx$$

Es decir, que el error de truncamiento que se introduce en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, puede obtenerse integrando el error de interpolación en ese intervalo. Se llamará:

$$R_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} r(x) dx \quad (5)$$

de manera que el error de truncamiento R del método de los trapecios pueda ser calculado como:

$$R = \sum_{i=0}^{n-1} R_i \quad (6)$$

El error de interpolación (vea la sección 4.2, fórmula (7)) para un polinomio de primer grado correspondiente a los nodos x_i y x_{i+1} viene dado por:

$$r(x) = \frac{f''(\alpha)}{2!} (x - x_i)(x - x_{i+1})$$

donde α es algún número del intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ cuyo valor depende de x . De acuerdo con (5):

$$R_i = \frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f''(\alpha)(x - x_i)(x - x_{i+1}) dx \quad (7)$$

Considérese el caso en que $f''(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces en el intervalo de integración $[x_i, x_{i+1}]$ ella tomará un valor mínimo m y uno máximo M , por lo tanto se puede asegurar que:

$$m \leq f''(\alpha) \leq M \quad (8)$$

Por otra parte, como en $[x_i, x_{i+1}]$ el factor $(x - x_i)$ es mayor o igual que cero, mientras que $(x - x_{i+1})$ es menor o igual que cero, el producto $(x - x_i)(x - x_{i+1})$ es negativo o cero, de modo que si cada miembro de (8) se multiplica por este producto, se obtiene:

$$M(x - x_i)(x - x_{i+1}) \leq f''(\alpha)(x - x_i)(x - x_{i+1}) \leq m(x - x_i)(x - x_{i+1}) \quad \text{para } x_i \leq x \leq x_{i+1}$$

De aquí resulta que:

$$M \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1}) dx \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} f''(\alpha)(x - x_i)(x - x_{i+1}) dx \leq m \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1}) dx$$

Esto significa que, para algún valor μ comprendido entre m y M se cumple que:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f''(\alpha)(x - x_i)(x - x_{i+1}) dx = \mu \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1}) dx$$

Por ser $f''(x)$ continua en $[x_i, x_{i+1}]$, ella tomará en algún punto de ese intervalo el valor μ , esto es, existe un c_i en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ para el cual:

$$f''(c_i) = \mu$$

$$\text{y, por tanto:} \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} f''(\alpha)(x - x_i)(x - x_{i+1}) dx = f''(c_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1}) dx$$

$$\text{y la fórmula (7) queda:} \quad R_i = \frac{1}{2} f''(c_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1}) dx$$

para algún c_i en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$. Calculando la integral y simplificando, tomando en cuenta que $x_{i+1} - x_i = h$, se obtiene:

$$R_i = \frac{1}{2} f''(c_i) \left(-\frac{h^3}{6} \right)$$

$$\text{Esto es:} \quad R_i = -\frac{h^3 f''(c_i)}{12}$$

Observe que el signo menos que aparece tiene un significado interesante: como era de esperar, cuando la segunda derivada es positiva en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ (la gráfica de la función es cóncava hacia arriba) la recta de interpolación está por encima de $f(x)$ y el error es negativo, es decir por exceso, mientras que cuando la gráfica es cóncava hacia abajo (segunda derivada negativa) el error de integración es positivo, es decir, por defecto.

Volviendo a la expresión (6) se puede calcular ahora el error de truncamiento total como:

$$R = \sum_{i=0}^{n-1} R_i = \sum_{i=0}^{n-1} -\frac{h^3 f''(c_i)}{12}$$

Es decir:

$$R = -\frac{h^3}{12} \sum_{i=0}^{n-1} f''(c_i) \quad (9)$$

Con vista a obtener una fórmula más sencilla, conviene escribir esta ecuación como:

$$R = -\frac{nh^3}{12} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f''(c_i) \right]$$

pues ahora el término entre corchetes es el promedio de n valores de $f''(x)$, el cual tiene que estar comprendido entre los valores mínimo y máximo de $f''(x)$ en $[a, b]$ y, como se trata de una función continua, $f''(x)$ tomará este valor en algún punto del intervalo $[a, b]$. Llámese c a este número y se puede entonces decir que:

$$R = -\frac{nh^3}{12} f''(c)$$

Por último, como $n = \frac{b-a}{h}$, queda:

$$R = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(c) \quad (10)$$

para algún c en el intervalo $[a, b]$.

En resumen:

Si en el intervalo $[a, b]$ $f(x)$ es continua y posee primera y segunda derivadas continuas, entonces existe en $[a, b]$ al menos un número c tal que, el error de truncamiento de la fórmula de los trapecios para la integral de $f(x)$ en $[a, b]$ viene dado por:

$$R = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(c)$$

La fórmula anterior, además de su valor teórico, permite en muchos casos acotar el error cometido en el método de los trapecios. Para ello se necesita hallar una cota superior del valor absoluto de la segunda derivada en el intervalo de integración, lo cual a veces no es difícil de encontrar.

Ejemplo 2

Al calcular la integral

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

por el método de los trapecios en el ejemplo 1, tomando $n = 10$ sub-intervalos, se obtuvo el resultado aproximado: 1,983524. Halle una cota del error que se ha cometido.

Solución:

La función $f(x) = \sin x$ satisface las condiciones de continuidad y derivabilidad exigidas para aplicar la fórmula (10). En este caso se tiene:

$$f''(x) = -\sin x$$

así que:

$$R = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(c) = \frac{\pi-0}{12} \left(\frac{\pi}{10}\right)^2 \sin c$$

para algún c en el intervalo de integración $[0, \pi]$. Aunque no se conoce el número c el valor de $\sin c$ está en el intervalo $[0, 1]$, por tanto:

$$0 \leq R \leq \frac{\pi^3}{1200}$$

O sea: $0 \leq R \leq 0,0258$

El error realmente fue de 0,016476 por lo cual, la cota es válida aunque un poco conservadora.

Una fórmula asintótica para el error de truncamiento

Es fácil obtener una fórmula para hallar una aproximación del error de truncamiento del método de los trapecios, que posee la ventaja de dar una estimación del error no tan conservadora como las cotas que se obtienen con la fórmula (10) y que, además, no requiere calcular la segunda derivada de $f(x)$. La fórmula se llama asintótica porque, a medida que h tiende hacia cero (o n hacia infinito) el resultado que ella brinda tiende hacia el verdadero error cometido, lo cual significa que el valor de R que ella estima es tanto mejor cuanto más pequeño sea h .

De acuerdo con la fórmula (9):

$$R = -\frac{h^3}{12} \sum_{i=0}^{n-1} f''(c_i)$$

la cual puede ser escrita como:

$$R = -\frac{h^2}{12} \sum_{i=0}^{n-1} f''(c_i)h$$

esto es:

$$-\frac{12R}{h^2} = \sum_{i=0}^{n-1} f''(c_i)h$$

Tomando límites cuando h tiende hacia cero, se obtiene:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(-\frac{12R}{h^2} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f''(c_i)h$$

Suponiendo que $f''(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y, por lo tanto, integrable, el límite de la derecha existe y coincide con la integral definida de $f''(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Es decir:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(-\frac{12R}{h^2} \right) = \int_a^b f''(x) dx$$

y como se trata de un integrando continuo se puede utilizar la regla de Barrow. La ecuación queda:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(-\frac{12R}{h^2} \right) = f'(b) - f'(a)$$

Si se prescinde del límite se obtiene la fórmula:

$$R \approx -\frac{f'(b) - f'(a)}{12} h^2 \quad (11)$$

donde el signo “ $\approx$ ” se entiende en sentido asintótico, es decir, la fórmula se va haciendo exacta en la medida en que h tiende hacia cero.

Ejemplo 3

Halle un estimado del error de truncamiento cometido al calcular:

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

por el método de los trapecios (ejemplo 1) con $n = 10$ sub-intervalos.

Solución:

Como $f(x) = \sin x$, se obtiene $f'(x) = \cos x$ y aplicando la fórmula (11):

$$R \approx -\frac{f'(b) - f'(a)}{12} h^2 = -\frac{\cos \pi - \cos 0}{12} \left(\frac{\pi}{10} \right)^2$$

$$R \approx \frac{\pi^2}{600} = 0,01645$$

Compárese con el valor exacto del error de truncamiento que fue de 0,016476.

Estimación del error de truncamiento por doble cálculo

La fórmula (11) permite apreciar claramente un hecho que ya se había notado en el ejemplo 1. Como

$$R \approx -\frac{f'(b) - f'(a)}{12} h^2$$

el error de truncamiento es aproximadamente una función cuadrática del paso h , lo cual significa, por ejemplo, que al disminuir h a la mitad, el error de truncamiento disminuirá aproximadamente a la cuarta parte. Este sencillo hecho, permitirá obtener una estimación de R sin necesidad de obtener la derivada de $f(x)$, a cambio de utilizar dos veces el método de los trapecios.

Como este razonamiento se puede generalizar fácilmente, se supondrá que el error de truncamiento al calcular la integral con paso h viene dado por:

$$R_h = Ch^p \quad (12)$$

donde, C es una constante (no depende de h) y la constante p vale 2 para el método de los trapecios. Observe que (12) es una fórmula exacta mientras que (11) es solo una aproximación; esto quiere decir que, aunque se utilizará el signo igual, solo se aspira a obtener fórmulas aproximadas.

Suponga que utilizando el método de los trapecios, se calcula una integral definida dos veces, una de ellas con un paso h y la otra con paso $2h$. Sea:

I_h : Resultado obtenido al calcular la integral con paso h
 I_{2h} : Resultado obtenido al calcular la integral con paso $2h$

El error de truncamiento de I_h viene dado por $R_h = Ch^p$.
 El error de truncamiento de I_{2h} será $R_{2h} = C(2h)^p$.

$$\text{De aquí resulta que: } R_{2h} = C(2h)^p = 2^p Ch^p = 2^p R_h \quad (13)$$

$$\text{Por otra parte, } I_h + R_h = I_{2h} + R_{2h}$$

ya que ambas expresiones dan el valor exacto de la integral. Sustituyendo en esta igualdad el resultado (13), queda:

$$I_h + R_h = I_{2h} + 2^p R_h$$

$$\text{y puede despejarse } R_h: R_h \approx \frac{I_h - I_{2h}}{2^p - 1} \quad (14)$$

donde se ha escrito el signo “ $\approx$ ” tomando en cuenta que la fórmula (12) solo se cumple en sentido asintótico, es decir, cuando h tiende hacia cero. Como en el método de los trapecios $p = 2$, se tiene, como caso particular:

$$R_h \approx \frac{I_h - I_{2h}}{3} \quad (15)$$

Ejemplo 4

En el ejemplo 1 se calculó la integral

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

tomando $n = 10, 20$ y 40 . Se obtuvo los resultados aproximados: 1,983524, 1,995886 y 1,998972 respectivamente. Utilice estos resultados para estimar el error de truncamiento de los dos últimos.

Solución:

Para $n = 20$, se obtuvo: $I_h = 1,995886$
 Para $n = 10$, se obtuvo: $I_{2h} = 1,983524$.

El error de truncamiento de I_h viene dado aproximadamente por (15):

$$R_h \approx \frac{I_h - I_{2h}}{3} = \frac{1,995886 - 1,983524}{3} = 0,0041$$

Es decir, al tomar 20 sub-intervalos el error de truncamiento es aproximadamente de 0,0041. Nótese que el verdadero error de este resultado es de 0,004114.

Para $n = 40$, se obtuvo: $I_h = 1,998972$

Para $n = 20$, se obtuvo: $I_{2h} = 1,995886$

El error de truncamiento de I_h es aproximadamente:

$$R_h \approx \frac{I_h - I_{2h}}{3} = \frac{1,998972 - 1,995886}{3} = 0,0010$$

Esto es, tomando $n = 40$ sub-intervalos el error de truncamiento resulta aproximadamente de 0,0010. El verdadero error de truncamiento es en este caso de 0,001028.

Ejemplo 5

Calcule la integral $\int_1^2 e^{x^2} dx$ con cuatro cifras decimales exactas.

Solución:

En los cálculos que siguen se ha utilizado un programa basado en el seudo código del método de los trapecios, para efectuar cada una de las integrales. El error de truncamiento se ha estimado mediante doble cálculo utilizando la fórmula (15). El proceso se comenzó arbitrariamente con $n = 10$ y a partir de ahí se estimaron los errores comparando con el resultado anterior. La tabla 2 muestra todos los resultados. El proceso iterativo fue detenido tan pronto como el error estimado fue menor que 0,00005. Con cuatro cifras decimales exactas, el valor de la integral es 14.990019.

n	Integral	Error estimado
10	15.166784	
20	15.034301	0.044161
40	15.001065	0.011079
80	14.992749	0.002772
160	14.990669	0.000693
320	14.990149	0.000173
640	14.990019	0.000043

Tabla 2

El error de redondeo en la fórmula de los trapecios

En la fórmula de los trapecios

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right)$$

se necesita calcular la suma de una gran cantidad de datos que contienen errores de redondeo. Puede entonces pensarse que se introducirá un error resultante muy grande cuando se sumen todos estos errores de redondeo. Realmente no es así. Para simplificar, supóngase que cada uno de los datos posee un mismo error absoluto máximo δ (que se supone causado por el redondeo, pero que podría ser motivado por cualquier otro factor, por ejemplo, por la medición u observación). Sea:

$$S = h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right)$$

Se trata de hallar $E_m(S)$. Para ello es mejor escribir h como $\frac{b-a}{n}$, es decir:

$$S = \frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right)$$

Como, a , b y n se suponen exentos de error, resulta:

$$\begin{aligned} E_m(S) &= \frac{b-a}{n} E_m\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right) \\ &= \frac{b-a}{n} \left(\frac{1}{2}\delta + \delta + \delta + \cdots + \delta + \frac{1}{2}\delta\right) \\ &= \frac{b-a}{n} (n\delta) \\ E_m(S) &= (b-a)\delta \end{aligned}$$

Es decir, el error total en el resultado causado por errores en los datos, es solamente el error absoluto máximo de cada dato individual multiplicado por la amplitud del intervalo de integración y es independiente de la cantidad de términos que se tomen en la fórmula. Como se trata de un error insignificante en comparación con el error de truncamiento, este tipo de error no suele tomarse en consideración en el cálculo numérico de integrales.

En los demás métodos de integración numérica que serán estudiados en el resto de este capítulo sucede algo similar, así que en ellos se prescindirá del estudio del error por redondeo.

5.3 El método de Simpson

La fórmula de los trapecios se obtiene aproximando el integrando por un conjunto de polinomios de interpolación de primer grado. Esta idea puede ser mejorada si la aproximación se realiza con polinomios interpoladores de grado dos. Considérese entonces la integral:

$$\int_a^b f(x)dx$$

donde se supondrá que $f(x)$ es continua en $[a, b]$. Sea el intervalo de integración dividido en un número par de intervalos de igual amplitud h mediante los puntos $\{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$. Las figuras 1 y 2 muestran la idea geométrica del método de Simpson: en la figura 1 se aprecia que la región comprendida entre el eje horizontal y la gráfica de $f(x)$ se ha dividido en franjas verticales mediante rectas que determinan los puntos de la partición de $[a, b]$. En la figura 2 se ha sustituido la función $f(x)$ por un conjunto de polinomios de grado 2, es decir, parábolas de eje vertical. Posteriormente, se calculará la suma de las integrales de estas funciones cuadráticas.

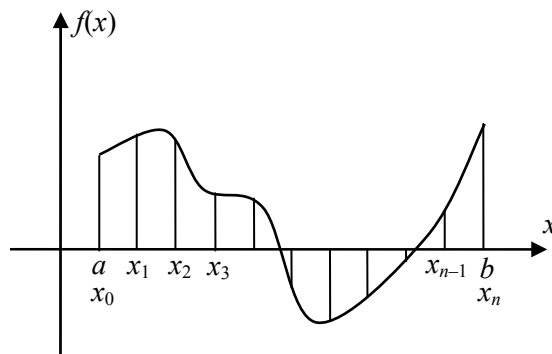


Figura 1

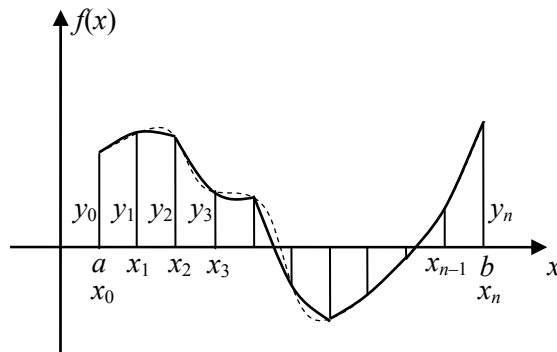


Figura 2

Al igual que en el método de los trapecios, la notación se simplificará llamando $y_i = f(x_i)$ para $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

La obtención de la fórmula de Simpson requiere conocer el valor de la integral de una función cuadrática determinada por tres puntos (x_0, y_0) , (x_1, y_1) y (x_2, y_2) donde $x_1 - x_0 = h$ y $x_2 - x_1 = h$ como muestra la figura 3. El resultado, naturalmente, no cambiará si toda la figura se traslada de modo que $x_1 = 0$, como muestra la figura 4, y de esta manera el trabajo algebraico se simplifica.

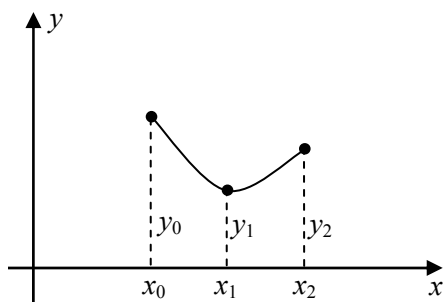


Figura 3

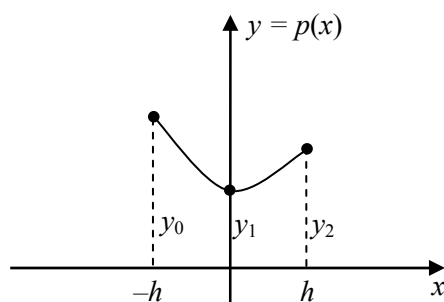


Figura 4

Sea entonces $p(x)$ el polinomio de segundo grado cuya gráfica aparece en la figura 4, determinado por los tres puntos $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$ y (h, y_2) , cuya ecuación será de la forma:

$$p(x) = ax^2 + bx + c \quad (1)$$

Su integral vendrá dada por:

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h p(x) dx &= \int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) dx = \left(\frac{1}{3} ax^3 + \frac{1}{2} bx^2 + cx \right) \Big|_{-h}^h = \\ \int_{-h}^h p(x) dx &= \frac{2}{3} ah^3 + 2ch \end{aligned} \quad (2)$$

Ahora bien, de acuerdo con (1), se cumple que:

$$p(-h) = ah^2 - bh + c = y_0 \quad (3)$$

$$p(0) = c = y_1 \quad (4)$$

$$y \quad p(h) = ah^2 + bh + c = y_2 \quad (5)$$

Al sumar (5) con (3) queda: $2ah^2 + 2c = y_0 + y_2$

y como, según (4), $c = y_1$: $2ah^2 + 2y_1 = y_0 + y_2$

Esto es:
$$a = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2h^2}$$

Sustituyendo en (2):
$$\int_{-h}^h p(x) dx = \frac{2}{3} \left(\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2h^2} \right) h^3 + 2y_1 h$$

Simplificando:

$$\int_{-h}^h p(x) dx = \frac{1}{3} h (y_0 + 4y_1 + y_2) \quad (6)$$

Aplicando ahora a la integral de $f(x)$ en $[a, b]$ la propiedad de aditividad respecto al intervalo de integración resulta:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x) dx$$

Sustituyendo en cada integral la función $f(x)$ por el polinomio interpolador de segundo grado que corresponde a esos nodos, la integral resultante se puede calcular mediante la fórmula (6). Se obtiene la aproximación:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{3} h (y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{1}{3} h (y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + \frac{1}{3} h (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

Que se simplifica como:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{3} h (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

o, más brevemente:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{3} h (E + 4I + 2P)$$

donde:

$E = y_0 + y_n$	(Suma de las ordenadas en los extremos)
$I = y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}$	(Suma de las ordenadas de índice impar)
$P = y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}$	(Suma de las ordenadas de índice par)

Ejemplo 1

Calcule aproximadamente la integral

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

mediante el método de Simpson, utilizando 10, 20 y 40 sub-intervalos. Compare con el resultado exacto, que es 2 y con los resultados obtenidos mediante el método de los trapecios en el ejemplo 1 de la sección 5.2.

Solución:

Tomando $n = 10$ sub-intervalos, resulta $h = \frac{\pi - 0}{10} = 0,314159$. La tabla 1 muestra los valores de

x_i y $y_i = \sin x_i$ para $i = 0, 1, \dots, 10$. Para facilitar las sumas cuando se trabaja manualmente, se suelen colocar los valores de la función en tres columnas.

i	x_i	$y_i = \text{sen } x_i$
0	0,000000	0,000000
1	0,314159	0,309017
2	0,628319	0,587785
3	0,942478	0,809017
4	1,256637	0,951057
5	1,570796	1,000000
6	1,884956	0,951057
7	2,199115	0,809017
8	2,513274	0,587785
9	2,827433	0,309017
10	3,141593	0,000000

$$E = 0,000000 \quad I = 3,236068 \quad P = 3,077684$$

Tabla 1

El resultado será:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{3}h(E + 4I + 2P) = \frac{1}{3}0,314159[0 + 4(3,236068) + 2(3,077684)] =$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx 2,000110$$

Nótese que el error de truncamiento es solo de 0,00011. Con este mismo paso h , el resultado del método de los trapecios contenía un error de 0,016476, unas 150 veces mayor.

Con $n = 20$ se obtiene, de forma similar:

$$\int_a^b f(x)dx \approx 2,00000678$$

cuyo error de truncamiento: 0,00000678 es 600 veces menor que el de 0,004114 logrado con el método de los trapecios.

Para $n = 40$ el resultado del método de Simpson es:

$$\int_a^b f(x)dx \approx 2,00000042$$

con un error de truncamiento de solo 0,00000042 unas 2400 veces menor que el de 0,001028 que se logra con el método de los trapecios para este mismo paso.

Algoritmo en pseudo código

El algoritmo que sigue calcula aproximadamente la integral definida de la función continua $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ mediante el método de Simpson tomando un número par n de sub intervalos. Se supone conocidos la función $f(x)$, el intervalo $[a, b]$ y el número entero par $n \geq 2$. El resultado es, aproximadamente,

$$\int_a^b f(x)dx$$

```

 $h := \frac{b-a}{n}$ 
 $E := f(a) + f(b)$  {Se calcula la suma de las ordenadas extremas}
 $I := 0$  {Se calcula la suma de las ordenadas de índice impar}
 $i := 1$ 
do while  $i < n$ 
     $x = a + ih$ 
     $I := I + f(x)$ 
     $i := i + 2$ 
end
 $P := 0$  {Se calcula la suma de las ordenadas de índice par, sin incluir las extremas}
 $i := 2$ 
do while  $i < n$ 
     $x = a + ih$ 
     $P := P + f(x)$ 
     $i := i + 2$ 
end
 $Integral := \frac{1}{3}h(E + 4I + 2P)$ 
El resultado aproximado es  $Integral$ 
Terminar

```

Error de truncamiento en el método de Simpson

De forma semejante a como se procedió en el método de los trapecios, aunque con dificultades adicionales, se puede demostrar (en las lecturas recomendadas se indica donde encontrar esta demostración) que el error de truncamiento R_i que se produce en el método de Simpson en el sub intervalo $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ ($i = 0, 1, 2, \dots, \frac{1}{2}n - 1$), viene dado por:

$$R_i = -\frac{h^5 f^{(4)}(c_i)}{90}$$

donde c_i es algún número del intervalo $[x_{2i}, x_{2i+2}]$. Por tanto en todo el intervalo $[a, b]$ de integración, el error de truncamiento es:

$$R = -\frac{h^5}{90} \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} f^{(4)}(c_i) \quad (7)$$

Que puede ser escrito como:

$$R = -\frac{nh^5}{180} \left[\frac{2}{n} \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} f^{(4)}(c_i) \right]$$

Como la cantidad entre corchetes es un promedio de valores de la cuarta derivada, el mismo se encuentra entre el mínimo y el máximo valor que toma esa función en $[a, b]$. Suponiendo que $f^{(4)}(x)$ es continua en $[a, b]$ se puede afirmar que, al menos en un punto c de ese intervalo, la cuarta derivada toma este valor promedio. Resulta entonces que:

$$R = -\frac{nh^5}{180} f^{(4)}(c)$$

pero como $n = \frac{b-a}{h}$, se obtiene: $R = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(c)$

Resumiendo:

Si en el intervalo $[a, b]$ $f(x)$ es continua y posee hasta la cuarta derivada continuas, entonces existe en $[a, b]$ al menos un número c tal que, el error de truncamiento de la fórmula de Simpson para la integral de $f(x)$ en $[a, b]$ viene dado por:

$$R = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(c)$$

Esta fórmula, debida a Peano, requiere conocer una cota superior de la cuarta derivada para poder acotar el error de truncamiento, por lo cual su valor práctico es algo limitado. Su valor teórico fundamental reside en que ella pone claramente de manifiesto la dependencia del error con la potencia h^4 , lo cual indica que, a medida que h tome valores más pequeños, el error de truncamiento tenderá a cero con rapidez. Nótese que la presencia de la cuarta derivada en la expresión de R , indica que el método de Simpson es exacto si $f(x)$ es un polinomio de grado 2 (lo cual era de esperar, puesto que se aproxima con parábolas) y también para polinomios de grado 3, lo cual resulta realmente inesperado.

A los efectos prácticos, puede utilizarse la fórmula de Mansion: que permite acotar el error sin necesidad de hallar derivadas:

$$|R| \leq \frac{2}{3} h |I - P - \frac{1}{2} E|$$

y cuya demostración se indica en otras lecturas recomendadas.

Ejemplo 2

En el ejemplo 1 se calculó con $n = 10$, mediante el método de Simpson, la integral:

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

Se obtuvo:

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx \approx 2,000110$$

Utilice la fórmula de Peano y la de Mansion para hallar el error absoluto máximo de este resultado.

Solución:

Como el integrando es $f(x) = \sin x$, la cuarta derivada será $f^{(4)}(x) = \sin x$, la cual está acotada entre 0 y 1 en el intervalo de integración $[0, \pi]$. Tomando 1 como la cota superior, la fórmula de Peano conduce a:

$$-\frac{\pi-0}{180}\left(\frac{\pi}{10}\right)^4 \leq R \leq 0$$

$$-0,00017 \leq R \leq 0$$

Es decir un error negativo (error por exceso) y menor en valor absoluto que 0,00017. En realidad, el error de truncamiento es de $-0,00011$.

La fórmula de Mansion utiliza los valores, calculados en el ejemplo 1,

$$E = 0,000000$$

$$I = 3,236068$$

$$P = 3,077684$$

$$\text{de donde: } |R| \leq \frac{2}{3}h \left| I - P - \frac{1}{2}E \right| = 0,033$$

que es una cota muy conservadora para el error de truncamiento real.

Una fórmula asintótica para el error de truncamiento del método de Simpson

Es fácil obtener una fórmula para hallar una aproximación del error de truncamiento en el método de Simpson, que posee la ventaja de dar una estimación del error menos conservadora que las cotas que se obtienen con las fórmulas de Peano y Mansion. Su deducción es muy similar a la que se empleó en el método de las trapecios. A partir de la fórmula (7):

$$R = -\frac{h^5}{90} \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} f^{(4)}(c_i)$$

se puede escribir:

$$R = -\frac{h^4}{180} \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} f^{(4)}(c_i) 2h$$

Entonces, trasponiendo y pasando al límite:

$$-\lim_{h \rightarrow 0} \frac{180R}{h^4} = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} f^{(4)}(c_i) 2h$$

y, como $f^{(4)}(x)$ es continua y, por lo tanto, integrable en $[a, b]$, el límite de la derecha existe y es la integral definida de esta función. Es decir:

$$-\lim_{h \rightarrow 0} \frac{180R}{h^4} = \int_a^b f^{(4)}(x) dx$$

Siendo $f^{(4)}(x)$ continua, puede utilizarse la regla de Barrow y resulta:

$$-\lim_{h \rightarrow 0} \frac{180R}{h^4} = f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)$$

Así que, para valores pequeños de h , se tiene:

$$R \approx -\frac{f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)}{180} h^4 \quad (8)$$

donde el signo “ $\approx$ ” se está utilizando con el sentido asintótico: Cuando h tiende hacia cero, ambos miembros son infinitésimos equivalentes.

Estimación del error de truncamiento por doble cálculo

La fórmula (8) no es tan atractiva para la estimación del error de truncamiento como su similar del método de los trapecios, ya que aquí se requiere hallar hasta la tercera derivada del integrando. Sin embargo, ella deja ver claramente que, para valores pequeños del paso h , el error de truncamiento es de la forma:

$$R = Ch^4 \quad (9)$$

lo cual se puede utilizar de inmediato para hallar estimaciones de R a partir de dos aplicaciones del método de Simpson.

Sea I_h : Resultado obtenido al calcular la integral por el método de Simpson con paso h
 I_{2h} : Resultado obtenido al calcular la integral por el método de Simpson con paso $2h$
 R_h : Error de truncamiento de I_h

Como ya se demostró en la sección 5.2 (fórmula 14):

$$R_h \approx \frac{I_h - I_{2h}}{2^p - 1}$$

Como, de acuerdo con (9), para el método de Simpson es $p = 4$, resulta:

$$R_h \approx \frac{I_h - I_{2h}}{15} \quad (10)$$

Ejemplo 3

En el ejemplo 1 la integral

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

fue calculada con el método de Simpson utilizando $n = 10$, 20 y 40 sub intervalos. Utilice estos resultados para estimar el error de truncamiento obtenido para $n = 20$ y $n = 40$.

Solución:

Para $n = 20$, se obtuvo: $I_h = 2,00000678$

Para $n = 10$, se obtuvo: $I_{2h} = 2,00011$.

El error de truncamiento de I_h viene dado aproximadamente por:

$$R_h \approx \frac{I_h - I_{2h}}{15} = \frac{2,00000678 - 2,00011}{15} = -0,00000688$$

Es decir, al tomar 20 sub-intervalos el error de truncamiento es aproximadamente de $-0,00000688$. Nótese que el verdadero error de este resultado es de $-0,00000678$.

Para $n = 40$, se obtuvo: $I_h = 2,00000042$

Para $n = 20$, se obtuvo: $I_{2h} = 2,00000678$

El error de truncamiento de I_h es aproximadamente:

$$R_h \approx \frac{I_h - I_{2h}}{3} = \frac{2,00000042 - 2,00000678}{15} = -0,000000424$$

Esto es, tomando $n = 40$ sub-intervalos el error de truncamiento resulta aproximadamente de $-0,000000424$. El verdadero error de truncamiento es en este caso de $-0,00000042$.

Ejemplo 4

Calcule la integral $\int_1^2 e^{x^2} dx$ con cuatro cifras decimales exactas utilizando el método de Simpson.

Solución:

Esta integral fue calculada mediante el método de los trapecios en la sección 5.2. Con ese procedimiento se requirió emplear hasta 640 sub intervalos. En los cálculos que siguen se ha utilizado un programa basado en el seudo código del método de Simpson, para efectuar cada una de las integrales. El error de truncamiento se ha estimado mediante doble cálculo utilizando la fórmula (10). El proceso se comenzó arbitrariamente con $n = 10$ y a partir de ahí se estimaron los errores comparando con el resultado anterior. La tabla 2 muestra todos los resultados. El proceso iterativo fue detenido tan pronto como el error estimado fue menor que 0,00005. Con cuatro cifras decimales exactas, el valor de la integral es 14.989986. Observe que se requirió calcular la integral solamente con 40 sub intervalos.

n	Integral	Error estimado
10	14.992527	
20	14.990140	0.000159
40	14.989986	0.000010

Tabla 2

Fórmulas de Newton – Cotes

La idea del método de los trapecios, posteriormente extendida al método de Simpson, puede generalizarse. En esencia, se trata de aproximar el integrando por un conjunto de polinomios de grado m (en el método de los trapecios $m = 1$ y en el método de Simpson $m = 2$) tomando para ello $m + 1$ nodos sucesivos del conjunto $\{a = x_0, x_1, x_0, \dots, x_n = b\}$. Después se integran estos polinomios y se obtienen fórmulas del tipo:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n A_i y_i$$

donde $y_i = f(x_i)$ para $i = 0, 1, 2, \dots, n$ y las constantes A_i dependen del paso h y del grado m de los polinomios utilizados. Se supone, naturalmente, que n es un múltiplo de m .

Estas fórmulas reciben el nombre de Newton – Cotes. Por ejemplo, para $m = 3$, se obtiene la fórmula de Newton – Cotes de orden 3 (conocida también como fórmula de los tres octavos):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3}{8}h[(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3) + (y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6) + \dots + (y_{n-3} + 3y_{n-2} + 3y_{n-1} + y_n)]$$

donde se supone que n es múltiplo de $m = 3$. Los términos de sub índice múltiplo de tres pueden agruparse y resulta:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3}{8}h(E + 3S_1 + 3S_2 + 2S_3)$$

donde:

$E = y_0 + y_n$	(Suma de las ordenadas en los extremos)
$S_1 = y_1 + y_4 + \dots + y_{n-2}$	(Suma de las ordenadas de índice de tipo $3i + 1$)
$S_2 = y_2 + y_5 + \dots + y_{n-1}$	(Suma de las ordenadas de índice de tipo $3i + 2$)
$S_3 = y_3 + y_6 + \dots + y_{n-3}$	(Suma de las ordenadas de índice de tipo $3i$)

Sin embargo, el error de truncamiento de esta fórmula es del mismo orden h^4 que el método de Simpson, así que no tienen mucho sentido el uso de esta expresión más complicada.

El lector interesado en fórmulas de Newton – Cotes de orden aun mayor puede consultar la bibliografía que se recomienda al final de este capítulo. Más adelante se verá que el enfoque de Romberg es una vía mucho más simple para obtener resultados mejores que los de las fórmulas de Newton – Cotes de orden superior.

Ejercicios

Algunos de los ejercicios que siguen son muy laboriosos para realizar los cálculos a mano. Se supone que posea programas computacionales, preferiblemente confeccionados por usted, para ayudarle en el trabajo. De no ser así, en los ejercicios que requieran mucho trabajo manual, determine los resultados con menos cifras exactas que las exigidas.

1. Dada la integral $\int_1^2 \frac{2}{x^3} dx = 0,75$
 - a) Mediante el método de los trapecios, calcúlela aproximadamente con 4, 8, 16, 32 y 64 sub intervalos, determine el error en cada caso y verifique que en la medida en que el paso se duplica el error disminuye aproximadamente a la cuarta parte. ¿Por qué sucede esto?
 - b) Repita el cálculo de la integral, pero empleando el método de Simpson y determine cómo va decreciendo el error en la medida en que la cantidad de sub intervalos se va duplicando. Justifique por qué sucede así.
2. Resulta difícil medir la carga eléctrica, sin embargo la corriente puede determinarse con suficiente exactitud mediante un amperímetro. Este hecho puede aprovecharse para calcular la carga que ha ido almacenando una batería de automóvil mediante:

$$Q = \int_0^t i dt$$

Utilice el método de Simpson para determinar aproximadamente, a partir de los datos de corriente medidos en ampere cada 10 minutos, la carga adquirida por la batería en una hora (utilice hora como unidad de tiempo y obtenga el resultado en ampere-hora).

t (minuto)	0	10	20	30	40	50	60
I (ampere)	3,7	3,0	2,5	2,0	1,7	1,4	1,1

- Calcule con cuatro cifras decimales exactas, el volumen del sólido engendrado por la rotación alrededor del eje x de la región comprendida entre la gráfica de $y = e^x$, el eje x , la recta $x = 0$ y la recta $x = 1$.
- A partir de la igualdad

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$$

utilice el método de Simpson para calcular π con cinco cifras decimales exactas.

- En el ejemplo 4 de la sección 5.1 se analizó el problema de determinar el área de la sección transversal de un río con vista a calcular su caudal. En la figura 5 se muestran los resultados de un conjunto de mediciones de la profundidad del río a lo largo de su sección transversal. Calcule el área de la sección transversal y halle un estimado del error cometido.

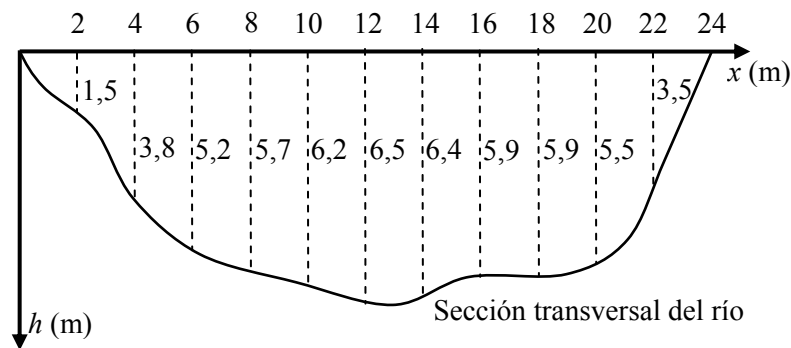


Figura 5

- Dada la integral definida:

$$\int_1^3 (x^3 + 4x^2 - 5x + 4) dx$$

- Calcule su valor exacto por la regla de Barrow.
- Calcule su valor por el método de los trapecios con $n = 8$.
- Calcule su valor mediante el método de Simpson con $n = 8$.
- Explique por qué el resultado de Simpson es exacto y el de los trapecios no.

7. Calcule, con cuatro cifras decimales exactas, la integral:

$$\int_0^{1,5} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} d\theta$$

8. Cuando un cable o una cadena cuelga sujeto por los extremos y sometido solamente a su propio peso, adopta la forma de una catenaria, que es la gráfica del coseno hiperbólico. El cable que se muestra en la figura 6 tiene como ecuación:

$$y = \cosh 0,1x$$

respecto a un sistema de ejes, como muestra la figura, colocado de modo que el origen se halla un metro debajo del punto más bajo del cable y donde tanto x como y se miden en metros. Halle la longitud del cable con un error menor que un milímetro.

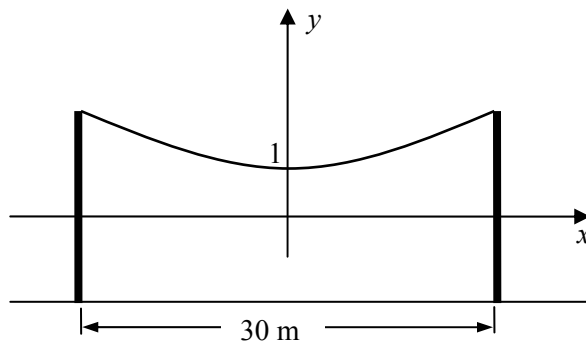


Figura 6

9. Al intentar calcular la longitud de una elipse, aparece un tipo de integral, llamado elíptica, la cual no puede ser evaluada por métodos analíticos. Estas integrales aparecen tabuladas y, en el capítulo 4 se vio cómo el problema se puede resolver interpolando en una de estas tablas. Por supuesto, también se puede calcular la integral elíptica numéricamente. Halle la longitud de una elipse de semiejes 3 y 4 con un error menor que 0,00005.
10. Se necesita calcular la superficie de una teja acanalada que se muestra en la figura 7. Suponga que el perfil de la teja es sinusoidal y calcule la superficie con un error menor que 5 cm².

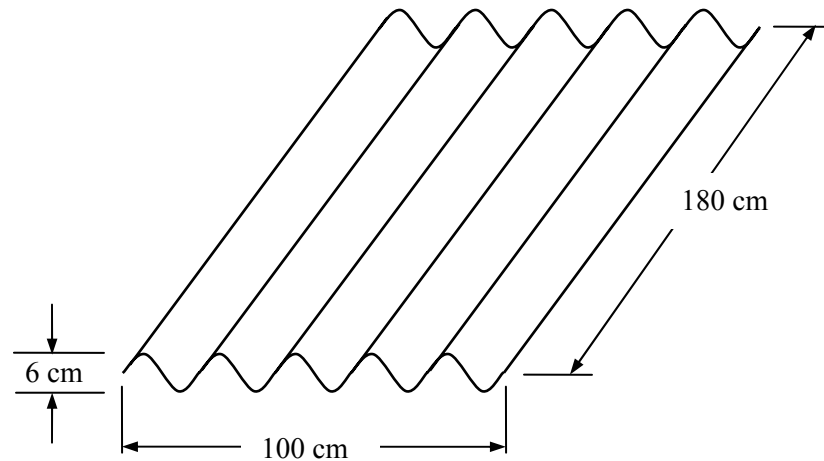


Figura 7

11. Uno de los generadores de una central termo eléctrica ha estado entregando durante un periodo de 4 horas los niveles de potencia que se indican en la tabla. Calcule la energía total entregada en ese periodo, en megawatt-hora y haga un estimado del error cometido.

t (hora)	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
P (megawatt)	45	47	48	47	45	46	48	46	45

12. Elabore un algoritmo en pseudo código que calcule una integral mediante el método de los trapecios utilizando como datos: el integrando, el intervalo de integración y la cantidad de subintervalos. El algoritmo debe dar como resultado no solo el valor aproximado de la integral sino, además, un estimado del error de truncamiento.
13. Elabore un algoritmo en pseudo código que calcule una integral mediante el método de Simpson con un error menor que una cierta tolerancia. El algoritmo debe utilizar como datos: el integrando, el intervalo de integración y la tolerancia del error.

5.4 El método de Gauss

Los métodos considerados hasta aquí se han basado en dividir el intervalo de integración mediante un conjunto de puntos equidistantes en los cuales el integrando se evalúa. El método de integración numérica de Gauss, por el contrario, supone desconocidos los puntos del intervalo en que se evaluará la función y procede entonces a determinarlos de la manera más conveniente, es decir, de modo que la aproximación obtenida sea, en un cierto sentido, lo mejor posible.

Primero se considerará una integral en el intervalo particular $[-1, 1]$. Más adelante se verá que, mediante un sencillo cambio de variable, cualquier integral definida puede reducirse a una integral en ese intervalo. Sea la integral a calcular:

$$\int_{-1}^1 f(t) dt$$

Se trata, entonces, de encontrar una fórmula del tipo:

$$\int_{-1}^1 f(t)dt \approx \sum_{i=1}^m A_i f(t_i) \quad (1)$$

donde los parámetros $A_1, A_2, \dots, A_m$ y $t_1, t_2, \dots, t_m$ se hallarán siguiendo el criterio de que la fórmula (1) sea exacta para polinomios del mayor grado posible.

Como el conjunto P_n de todos los polinomios de grado menor o igual que n es un espacio vectorial de dimensión $n + 1$, es suficiente que la fórmula (1) sea exacta para los elementos de una base de P_n y entonces lo será para todos los elementos del espacio. En efecto, si $\{g_0(t), g_1(t), \dots, g_n(t)\}$ es una base de P_n , cualquier polinomio de grado menor o igual que n se puede escribir como combinación lineal de esta base, es decir:

$$p(t) = \lambda_0 g_0(t) + \lambda_1 g_1(t) + \dots + \lambda_n g_n(t)$$

y, debido a la linealidad de la integral:

$$\int_{-1}^1 p(t)dx = \lambda_0 \int_{-1}^1 g_0(t)dt + \lambda_1 \int_{-1}^1 g_1(t)dt + \dots + \lambda_n \int_{-1}^1 g_n(t)dt$$

Como se supone que la fórmula es exacta para las funciones que forman la base:

$$\int_{-1}^1 p(t)dt = \lambda_0 \sum_{i=1}^m A_i g_0(t_i) + \lambda_1 \sum_{i=1}^m A_i g_1(t_i) + \dots + \lambda_n \sum_{i=1}^m A_i g_n(t_i)$$

O sea:
$$\int_{-1}^1 p(t)dt = \sum_{i=1}^m A_i [\lambda_0 g_0(t_i) + \lambda_1 g_1(t_i) + \dots + \lambda_n g_n(t_i)]$$

Así que:
$$\int_{-1}^1 p(t)dt = \sum_{i=1}^m A_i p(t_i)$$

Es decir, que la aproximación (1) se convierte en exacta para cualquier polinomio de grado menor o igual que n .

Como en la fórmula (1) aparecen $2m$ coeficientes por determinar, es de esperar que esto permita hacerla exacta para $2m$ funciones independientes. Por tanto, debe ser posible lograr su exactitud para polinomios de grado menor o igual que $2m - 1$, cuyas bases son conjuntos de $2m$ funciones.

Con vistas a simplificar las notaciones, el análisis que sigue se limitará al caso concreto en que $m = 3$ que es suficientemente grande para que se comprenda la importancia de seleccionar adecuadamente la base de P_n con la que se operará. Como se verá, la generalización a otros valores de m será evidente.

La fórmula (1) para este caso particular tiene la forma:

$$\int_{-1}^1 f(t)dt \approx A_1 f(t_1) + A_2 f(t_2) + A_3 f(t_3) \quad (2)$$

y los seis parámetros $A_1, A_2, A_3, t_1, t_2, t_3$, serán calculados de manera que la fórmula (2) sea una igualdad para una base del espacio vectorial P_5 de los polinomios de grado menor o igual que cinco.

Suponga que se selecciona como base de P_5 el conjunto de funciones

$$\{1, t, t^2, t^3, t^4, t^5\}$$

(lo cual es una pésima selección), entonces sustituyendo en (2) a $f(t)$ por cada una de estas seis funciones y cambiando el signo “ $\approx$ ” por un “ $=$ ”, se obtienen las seis ecuaciones que siguen:

$$\text{Para } f(t) = 1: \quad A_1 + A_2 + A_3 = \int_{-1}^1 dt = 2$$

$$\text{Para } f(t) = t: \quad A_1 t_1 + A_2 t_2 + A_3 t_3 = \int_{-1}^1 t dt = 0$$

$$\text{Para } f(t) = t^2: \quad A_1 t_1^2 + A_2 t_2^2 + A_3 t_3^2 = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$$

$$\text{Para } f(t) = t^3: \quad A_1 t_1^3 + A_2 t_2^3 + A_3 t_3^3 = \int_{-1}^1 t^3 dt = 0$$

$$\text{Para } f(t) = t^4: \quad A_1 t_1^4 + A_2 t_2^4 + A_3 t_3^4 = \int_{-1}^1 t^4 dt = \frac{2}{5}$$

$$\text{Para } f(t) = t^5: \quad A_1 t_1^5 + A_2 t_2^5 + A_3 t_3^5 = \int_{-1}^1 t^5 dt = 0$$

Como se ve, se trata de un sistema no lineal de seis ecuaciones con seis incógnitas cuya solución es sumamente compleja y eso, a pesar de que se ha tomado un valor de m muy pequeño.

Los polinomios de Legendre

La base seleccionada por Gauss utiliza a una notable familia de polinomios llamada Polinomios de Legendre. El polinomio de Legendre de grado n ($n = 0, 1, 2, \dots$), se define como:

$$p_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} [(t^2 - 1)^n]$$

de modo que:

$$p_0(t) = \frac{1}{2^0 0!} \frac{d^0}{dt^0} [(t^2 - 1)^0] = 1$$

$$p_1(t) = \frac{1}{2^1 1!} \frac{d}{dt} [(t^2 - 1)] = t$$

$$p_2(t) = \frac{1}{2^2 2!} \frac{d^2}{dt^2} [(t^2 - 1)^2] = \frac{1}{8} \frac{d^2}{dt^2} [t^4 - 2t^2 + 1] = \frac{1}{2} (3t^2 - 1)$$

$$p_3(t) = \frac{1}{2^3 3!} \frac{d^3}{dt^3} [(t^2 - 1)^3] = \frac{1}{2} (5t^3 - 3t)$$

$$p_4(t) = \frac{1}{2^4 4!} \frac{d^4}{dt^4} [(t^2 - 1)^4] = \frac{1}{8} (35t^4 - 30t^2 + 3)$$

⋮

Los polinomios de Legendre gozan de muchas interesantes propiedades, de las cuales aquí se citarán las dos que se necesitarán más adelante:

Propiedad 1: Los n ceros del polinomio de Legendre de grado n son reales y diferentes y se encuentran en el intervalo $[-1, 1]$

Propiedad 2: Si q es cualquier entero no negativo menor que n , se cumple que

$$\int_{-1}^1 t^q p_n(t) dt = 0$$

Una base para el espacio P_5

Una forma muy conveniente de seleccionar una base para el espacio de los polinomios de grado menor o igual que cinco es la siguiente:

$$\{1, t, t^2, p_3(t), t \cdot p_3(t), t^2 \cdot p_3(t)\}$$

Observe que estas funciones forman un conjunto linealmente independiente ya que sus grados son respectivamente 0, 1, 2, 3, 4 y 5. Para esta nueva base de P_5 se repetirá ahora el proceso de sustituir cada una de sus funciones en la expresión (2), haciéndola exacta, es decir, cambiando el signo “ $\approx$ ” por un “ $=$ ”. Se obtienen las seis ecuaciones:

$$\text{Para } f(t) = 1: \quad A_1 + A_2 + A_3 = \int_{-1}^1 dt = 2$$

$$\text{Para } f(t) = t: \quad A_1 t_1 + A_2 t_2 + A_3 t_3 = \int_{-1}^1 t dt = 0$$

$$\text{Para } f(t) = t^2: \quad A_1 t_1^2 + A_2 t_2^2 + A_3 t_3^2 = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$$

$$\text{Para } f(t) = p_3(t): \quad A_1 p_3(t_1) + A_2 p_3(t_2) + A_3 p_3(t_3) = \int_{-1}^1 p_3(t) dt = 0$$

$$\text{Para } f(t) = t \cdot p_3(t) \quad A_1 t_1 p_3(t_1) + A_2 t_2 p_3(t_2) + A_3 t_3 p_3(t_3) = \int_{-1}^1 t p_3(t) dt = 0$$

Para $f(t) = t^2 \cdot p_3(t)$:
$$A_1 t_1^2 p_3(t_1) + A_2 t_2^2 p_3(t_2) + A_3 t_3^2 p_3(t_3) = \int_{-1}^1 t^2 p_3(t) dt = 0$$

Obsérvese que las tres últimas integrales no ha sido necesario calcularlas pues, por la propiedad 2 de los polinomios de Legendre, ellas valen cero.

Aunque, aparentemente, este sistema de ecuaciones es mucho más difícil que el anterior, su solución es realmente muy sencilla: Tomando los parámetros t_1 , t_2 y t_3 como los tres ceros de $p_3(t)$ (recuérdese que son reales y distintos y están en el intervalo $[-1, 1]$), las tres últimas ecuaciones del sistema quedan satisfechas automáticamente (independientemente de los valores de A_1 , A_2 y A_3), mientras que, conocidos t_1 , t_2 y t_3 , los valores de A_1 , A_2 y A_3 se hallan sin dificultad a partir de las tres primeras ecuaciones del sistema, que forman un sistema lineal. Es decir:

t_1 , t_2 y t_3 son los ceros de $p_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t)$, que son:

$$t_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}} = -0,774596669 \quad t_2 = 0 \quad t_3 = \sqrt{\frac{3}{5}} = 0,774596669$$

y A_1 , A_2 y A_3 forman la solución del sistema:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= 2 \\ A_1 t_1 + A_2 t_2 + A_3 t_3 &= 0 \\ A_1 t_1^2 + A_2 t_2^2 + A_3 t_3^2 &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Sustituyendo t_1 , t_2 y t_3 por sus valores, el sistema queda:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= 2 \\ -\sqrt{\frac{3}{5}} A_1 + \sqrt{\frac{3}{5}} A_3 &= 0 \\ \frac{3}{5} A_1 + \frac{3}{5} A_3 &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

cuyas sus soluciones son:

$$A_1 = \frac{5}{9} = 0,55555555... \quad A_2 = \frac{8}{9} = 0,88888888... \quad A_3 = \frac{5}{9} = 0,55555555...$$

A modo de resumen, se puede plantear que:

La fórmula de Gauss para tres puntos:

$$\int_{-1}^1 f(t) dt \approx A_1 f(t_1) + A_2 f(t_2) + A_3 f(t_3)$$

$$\begin{aligned} \text{donde } t_1 &= -0,774596669 & A_1 &= 0,555555556 \\ t_2 &= 0 & A_2 &= 0,888888889 \\ t_3 &= 0,774596669 & A_3 &= 0,555555556 \end{aligned}$$

es exacta hasta para polinomios de grado menor o igual que 5.

Generalización para cualquier m

No ofrece ninguna dificultad generalizar para cualquier entero positivo m el procedimiento seguido para el caso particular de tres puntos.

La fórmula de Gauss (también conocida, justamente, como de Gauss y Legendre) para m puntos viene dada por:

$$\int_{-1}^1 f(t)dt \approx \sum_{i=1}^m A_i f(t_i) \quad (3)$$

donde: $t_1, t_2, \dots, t_m$ son los ceros del polinomio de Legendre de grado m

y $A_1, A_2, \dots, A_m$ son la solución del sistema lineal:

$$t_1^i A_1 + t_2^i A_2 + \dots + t_m^i A_m = \begin{cases} \frac{2}{n+1} & \text{si } i \text{ es par} \\ 0 & \text{si } i \text{ es impar} \end{cases} \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1$$

La fórmula (3) da resultados exactos si el integrando es cualquier polinomio de grado menor o igual que $2m-1$. Si $f(t)$ es una función no polinómica los resultados ya no serán exactos pero su error será tanto menor mientras mayor sea el valor de m .

Generalización para cualquier intervalo

Cuando el intervalo de integración es $[a, b]$, un cambio de variable lo puede siempre reducir al caso $[-1, 1]$. En efecto, considere la integral:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Sea
$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t \quad (4)$$

La ecuación (4) define a x como una función de primer grado de t , de tal modo que:

Para $t = -1$ resulta $x = a$

Para $t = 1$ resulta $x = b$

y por otra parte: $dx = \frac{b-a}{2} dt$

Entonces, la integral se transforma en:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_{-1}^1 f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right) \left(\frac{b-a}{2}\right) dt = \\ &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right) dt \end{aligned}$$

A la última integral se le puede aplicar la fórmula (3), pues su intervalo de integración es $[-1, 1]$. De ahí resulta:

$$\frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right) dt \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^m A_i f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_i\right)$$

Para que la fórmula resulte más corta, se acostumbra llamar:

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m$$

y se obtiene:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^m A_i f(x_i)$$

en resumen:

La fórmula de Gauss para m puntos:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^m A_i f(x_i)$$

donde

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m$$

da resultados exactos si $f(x)$ es cualquier polinomio de grado menor o igual que $2m-1$.

Aunque los parámetros t_i y A_i pueden ser calculados sin dificultad, los mismos se encuentran tabulados con gran exactitud para su uso computacional. La tabla 1 ofrece sus valores hasta $m = 8$.

	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$	$m = 8$
t_1	-0,57735027	-0,77459667	-0,86113631	-0,90617985	-0,93246951	-0,94910791	-0,96028986
t_2	0,57735027	0	-0,33998104	-0,53846931	-0,66120939	-0,74153119	-0,79666648
t_3		0,77459667	0,33998104	0	-0,23861919	-0,40584515	-0,52553242
t_4			0,86113631	0,53846931	0,23861919	0	-0,18343464
t_5				0,90617985	0,66120939	0,40584515	0,18343464
t_6					0,93246951	0,74153119	0,52553242
t_7						0,94910791	0,79666648
t_8							0,96028986
A_1	1	0,55555556	0,34785484	0,23692688	0,17132450	0,12948496	0,10122854
A_2	1	0,88888889	0,65214516	0,47862868	0,36076158	0,27970540	0,22238104
A_3		0,55555556	0,65214516	0,56888889	0,46791394	0,38183006	0,31370664
A_4			0,34785484	0,47862868	0,46791394	0,41795918	0,36268378
A_5				0,23692688	0,36076158	0,38183006	0,36268378
A_6					0,17132450	0,27970540	0,31370664
A_7						0,12948496	0,22238104
A_8							0,10122854

Tabla 1

Ejemplo 1

Calcular la integral:

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

a) Mediante el método de Gauss de tres puntos. b) Mediante el método de Gauss de 5 puntos.

Solución:

a) A partir de la tabla 1 se tienen los valores de los parámetros t_i y A_i . Mediante los valores de t_i se obtiene:

$$x_i = \frac{0 + \pi}{2} + \frac{\pi - 0}{2} t_i = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} t_i$$

$$\begin{aligned} \text{De ahí: } x_1 &= 0,35406272 \\ x_2 &= 1,57079633 \\ x_3 &= 2,78752993 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin x \, dx &\approx \frac{\pi-0}{2} \sum_{i=1}^m A_i \sin x_i \\ &= 1,57079633[0,55555556 \sin(0,35406272) + 0,88888889 \sin(1,57079633) + \\ &\quad + 0,55555556 \sin(2,78752993)] \\ \int_0^{\pi} \sin x \, dx &\approx 2,00138892 \end{aligned}$$

El error de truncamiento es 0,0014, un resultado verdaderamente asombroso si se tiene en cuenta que el integrando solamente fue evaluado en tres puntos.

b) De forma similar, para $m = 5$ resulta:

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx \approx 2,00000011$$

Como se observa, con solo cinco evaluaciones del integrando, se han logrado seis cifras decimales exactas. Un resultado similar requiere, con el método de Simpson, evaluar el integrando en 41 puntos (vea el ejemplo 1 de la sección 5.3).

Algoritmo en pseudo código

El siguiente algoritmo calcula el valor aproximado de la integral de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ mediante el método de Gauss de m puntos. Se supone que $f(x)$ es continua en $[a, b]$. Se utilizan como datos: la función $f(x)$, el intervalo de integración, el número entero $m > 1$ y una tabla con los valores de los parámetros t_i y A_i para $i = 1, 2, 3, \dots, m$.

```
Suma := 0
for i = 1 to m
```

```


$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_i$$


$$Suma := Suma + A_i f(x_i)$$

end

$$Integral := \frac{b-a}{2} Suma$$

El resultado es Integral
Terminar

```

El error en el método de Gauss

La obtención de la fórmula del error de truncamiento en el método de Gauss es una tarea muy difícil. Puede demostrarse (ver otras lecturas recomendadas) que, para la fórmula de m puntos de Gauss en el intervalo $[a, b]$, el error de truncamiento viene dado por:

$$R = \frac{(m!)^4 f^{(2m)}(c)}{[(2m)!]^3 (2m+1)} (b-a)^{2m+1}$$

para algún número c en $[a, b]$.

Sin embargo, la necesidad de hallar derivadas de un orden muy alto hace poco útil esta fórmula. Nótese, por ejemplo que para acotar el error en la fórmula de Gauss de 5 puntos se requiere analizar la décima derivada de $f(x)$.

Bajo la suposición de que $f^{(2m)}(x)$ no sufra variaciones muy grandes en el intervalo $[a, b]$, se puede suponer que el error de truncamiento es, aproximadamente:

$$R \approx C(b-a)^{2m+1}$$

donde la constante C depende de $f(x)$ y de m pero no de a y de b . Considere entonces que la integral se calcula mediante la fórmula de Gauss de m puntos y se obtiene un resultado I_1 con error de truncamiento:

$$R_1 \approx C(b-a)^{2m+1}$$

Por otra parte, sea I_2 el resultado obtenido cuando se calcula la integral como:

$$I_2 = \int_a^{\omega} f(x) dx + \int_{\omega}^b f(x) dx$$

donde ω es el punto medio del intervalo $[a, b]$, es decir:

$$\omega = \frac{a+b}{2}$$

empleando en cada una de las integrales la misma fórmula de Gauss de m puntos. Como en cada una de las integrales el intervalo se ha reducido a la mitad, sus errores de truncamiento serán ambos aproximadamente:

$$C \left(\frac{b-a}{2} \right)^{2m+1}$$

por tanto el resultado I_2 tendrá un error de truncamiento aproximado de

$$R_2 = 2C\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2m+1} = \frac{1}{2^{2m}} C(b-a)^{2m+1} = \frac{1}{4^m} R_1$$

Es decir: $R_1 = 4^m R_2$

Por otra parte, como $I_1 + R_1 = I_2 + R_2$

Resulta: $I_1 + 4^m R_2 = I_2 + R_2$

y, despejando R_2 se tiene: $R_2 \approx \frac{I_2 - I_1}{4^m - 1}$ (5)

La fórmula (5) puede utilizarse en forma iterativa, dividiendo de nuevo los intervalos de integración de las dos integrales parciales si el error de truncamiento fuera mayor que lo requerido o, si se desea, repitiendo los cálculos con un valor mayor de m .

Ejemplo 2

Mediante la fórmula de Gauss de 4 puntos calcule la integral

$$\int_1^2 e^{x^2} dx$$

con cuatro cifras decimales exactas.

Solución:

Para el intervalo de integración $[1, 2]$: $I_1 = 14,98899597$

Para el intervalo de integración $[1; 1,5]$: $2,60046192$

Para el intervalo de integración $[1,5; 2]$: $12,38950636$

$I_2 = 14,98996828$

$$R_2 \approx \frac{I_2 - I_1}{4^4 - 1} = \frac{14,98996828 - 14,98899597}{255} = 0,0000038$$

Por tanto, con cinco cifras decimales exactas, $\int_1^2 e^{x^2} dx = 14,989968$.

Nótese que, para llegar a este resultado el integrando fue evaluado 12 veces, 4 para la integral I_1 y 8 para obtener I_2 . En el método de Simpson fueron necesarias 73 evaluaciones, 11 para la primera aproximación, 21 para la segunda y 41 para la tercera y final.

Ejercicios

Algunos de los ejercicios que siguen son muy laboriosos para realizar los cálculos a mano. Se supone que posea un programa computacional, preferiblemente confeccionado por usted, para ayudarle en el trabajo. De no ser así, en los ejercicios que requieran mucho trabajo manual, determine los resultados con menos cifras exactas que las exigidas.

1. Calcule el área sombreada de la figura 1, limitada por la gráfica de la función $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, mediante el método de Gauss de 4 puntos. (Ayuda: aproveche la simetría de la región).

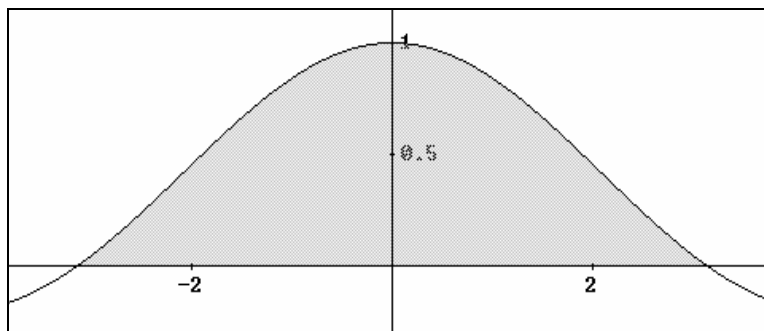


Figura 1

2. Se necesita calcular la integral:

$$\int_{1,75}^{3,17} (3x^7 - 5x^6 + 18x^4 - 17x^3 + 1,6x + 11,5) dx$$

¿Qué método de Gauss usted utilizaría para obtener el resultado exacto de la integral?

3. El método de Gauss y otros similares (por ejemplo, el de Chebyshev) debido a que requieren evaluar el integrando en muy pocos puntos, resultan ventajosos cuando se necesita calcular áreas de regiones limitadas por elementos constructivos curvos. Por ejemplo, en el diseño del casco de un barco, se necesita calcular el área de algunas secciones transversales con vistas a determinar el volumen de agua que se desplazará. En la figura 2 se muestra una de estas secciones. Determine en que puntos sería necesario medir distancias verticales para poder calcular aproximadamente el área de la mitad de la sección mediante el método de Gauss de 5 puntos. Dé una fórmula para calcular el área total.

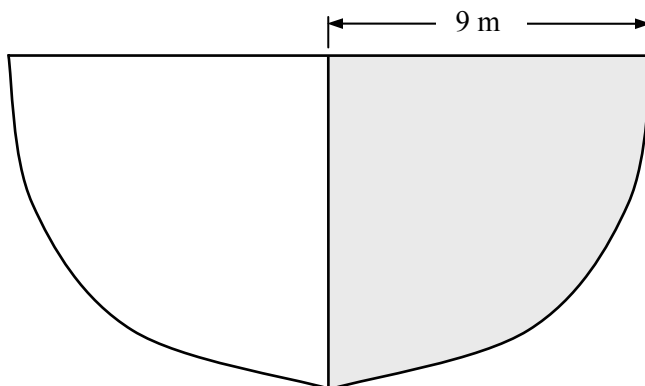


Figura 2

4. Halle aproximadamente el volumen del sólido de revolución que se genera cuando la región de la figura 3 gira alrededor del eje x . Utilice el método de Gauss de 4 puntos. Nota: para

hallar los puntos en que las curvas se intersecan utilice alguno de los métodos numéricos estudiados en el capítulo 2.

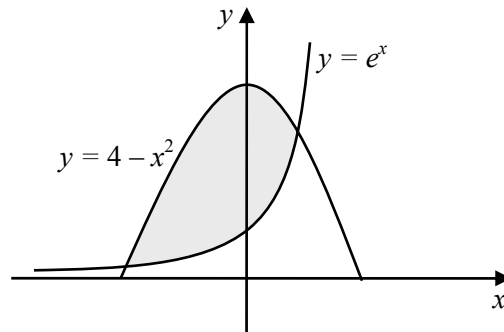


Figura 3

5. Halle la longitud de un periodo de la cosinusoide $y = \cos x$ con cuatro cifras decimales exactas, mediante el método de Gauss de cuatro puntos. Utilice la simetría de la curva.

6. Calcule la integral:

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$$

con error menor que 0,00005 mediante algún método de Gauss.

7. Se quiere calcular el volumen que tendrá una copa (figura 4) que se encuentra en proceso de diseño. Determine a que profundidades habría que tomar la longitud de tres diámetros con vista a calcular el volumen mediante el método de Gauss de 3 puntos. Dé una fórmula para calcular aproximadamente el volumen.

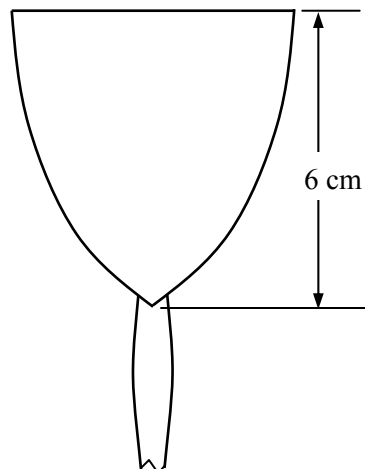


Figura 4

8. Calcule la integral que sigue con 5 cifras decimales exactas mediante el método de Gauss de 4 puntos.

$$\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx$$

9. A partir de la igualdad

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln b - \ln a$$

para a y b positivos, calcule $\ln 2$ con cinco cifras decimales exactas mediante algún método de Gauss.

10. Elabore un algoritmo en pseudo código que calcule el logaritmo neperiano de cualquier número mayor que 1 utilizando la idea del ejercicio 9. El algoritmo debe utilizar el método de Gauss de 4 puntos con doble cálculo para dar no solamente el valor del logaritmo sino un estimado del error de truncamiento.

5.5 El método de Romberg

El método de Romberg proporciona un procedimiento de cálculo numérico de integrales por aproximaciones sucesivas utilizando la idea de estimar el error mediante el método de doble cálculo. En la sección 5.2 se demostró que si la integral

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

se halla con un método numérico cuyo error de truncamiento tiene la forma:

$$R_h \approx Ch^p$$

donde h es el paso de integración: $h = \frac{b-a}{n}$, entonces el error R_h puede ser estimado mediante:

$$R_h \approx \frac{I_h - I_{2h}}{2^p - 1}$$

donde I_h e I_{2h} son los resultados obtenidos al calcular la integral con pasos h y $2h$ respectivamente.

Es de suponer que, si se corrige el valor I_h con su error de truncamiento, se obtendrá una aproximación mejor del resultado exacto I . Es más, si R_h se calculara exactamente, la suma de I_h más R_h daría el resultado exacto de la integral. Puede probarse que, suponiendo que $f(x)$ es suficientemente derivable, la aproximación:

$$I_h + \frac{I_h - I_{2h}}{2^p - 1} = \frac{2^p I_h - I_{2h}}{2^p - 1} \quad (2)$$

posee un error de truncamiento de orden $p + 2$.

La fórmula (2), conocida como fórmula de extrapolación de Richardson es la base del método de Romberg. Para que este resulte más claro, conviene realizar algunos cambios en la notación.

Sea: I_0^0 el resultado obtenido mediante el método de los trapecios usando un número pequeño n de subintervalos.
 I_1^0 el resultado obtenido mediante el método de los trapecios con $2n$ subintervalos.
 I_2^0 el resultado obtenido mediante el método de los trapecios con $4n$ subintervalos.

y, en general:

I_k^0 el resultado obtenido con $(2^k) \cdot n$ subintervalos, para $k = 0, 1, 2, \dots$

Con estos valores iniciales, se pueden calcular mejores aproximaciones mediante la fórmula de Richardson, para los cuales se utilizará la notación: I_k^1

Con la nueva notación, la fórmula de Richardson (2) toma el aspecto:

$$I_k^1 = \frac{2^p I_k^0 - I_{k-1}^0}{2^p - 1} \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

como, para el método de los trapecios es $p = 2$:

$$I_k^1 = \frac{4I_k^0 - I_{k-1}^0}{3} \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

La fórmula (4) permite, con una reducida cantidad de operaciones aritméticas, mejorar las aproximaciones iniciales realizadas por el método de los trapecios. Los resultados de la generación 1: I_k^1 poseen un error de truncamiento de orden 4 y, de hecho, coinciden con los que se obtienen utilizando el método de Simpson.

El proceso puede continuarse. A partir de la generación 1, se pueden obtener los de generación 2, para los cuales en la fórmula (3) basta tomar $p + 2$, en lugar de p :

$$I_k^2 = \frac{2^{p+2} I_k^1 - I_{k-1}^1}{2^{p+2} - 1} \quad k = 2, 3, 4, \dots$$

En general, la generación m se obtiene a partir de la $m - 1$, mediante:

$$I_k^m = \frac{2^{p+2(m-1)} I_k^{m-1} - I_{k-1}^{m-1}}{2^{p+2(m-1)} - 1}$$

donde, el orden del error de truncamiento es $p + 2(m - 1)$, ya que, con cada nueva generación el orden del error se incrementa en 2. Como $p = 2$, la fórmula anterior queda:

$$I_k^m = \frac{4^m I_k^{m-1} - I_{k-1}^{m-1}}{4^m - 1} \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad k = m, m + 1, m + 2, \dots \quad (5)$$

La figura 1 muestra gráficamente la relación entre las diversas aproximaciones obtenidas en el proceso iterativo. La tabla que se muestra en la figura se va construyendo por filas: el primer elemento de la fila se calcula mediante el método de los trapecios y los restantes por la fórmula de Richardson (5). En cada fila el error se acota mediante la diferencia (en valor absoluto) entre el último elemento de la fila y el último elemento de la fila precedente, lo cual en la práctica, es una cota bastante conservadora.

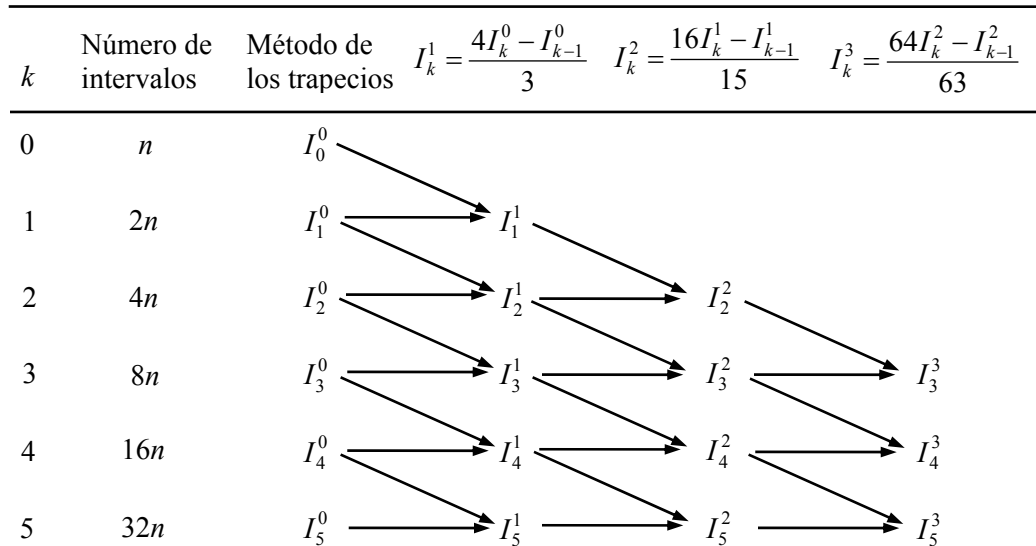


Figura 1

Ejemplo 1

Calcule con cuatro cifras decimales exactas mediante el método de Romberg, la integral

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

Solución:

Aplicando el método de los trapecios con $n = 4$ y $n = 8$ se obtiene, respectivamente:

$$I_0^0 = 1,896119$$

$$I_1^0 = 1,974232$$

y, con ellos:
$$I_1^1 = \frac{4I_1^0 - I_0^0}{3} = 2,000270$$

con error absoluto menor que $|I_1^1 - I_0^0| = 0,104151$

Para comenzar la tercera fila ($k = 2$), se aplica el método de los trapecios con $n = 16$:

$$I_2^0 = 1,993570$$

y, mediante la fórmula de Richardson:

$$I_2^1 = \frac{4I_2^0 - I_1^0}{3} = 2,000016 \quad I_2^2 = \frac{16I_2^1 - I_1^1}{15} = 1,999999$$

El resultado I_2^2 tiene un error absoluto máximo de $|I_2^2 - I_1^1| = 0,000271$

Como esta cota es todavía alta, se pasa a la cuarta fila ($k = 3$):

Utilizando el método de los trapecios con 32 subintervalos:

$$I_3^0 = 1,998393$$

Y se aplica ahora tres veces la fórmula de Richardson, para obtener:

$$I_3^1 = \frac{4I_3^0 - I_2^0}{3} = 2,000001 \quad I_3^2 = \frac{16I_3^1 - I_2^1}{15} = 2,000000 \quad I_3^3 = \frac{64I_3^2 - I_2^2}{63} = 2,000000$$

El error absoluto máximo de este último resultado viene dado por: $|I_3^3 - I_2^2| = 0,000001$

que satisface el requerimiento de cuatro cifras decimales exactas (y también el de cinco decimales exactos). Así, la respuesta es: 2,000000 con cinco cifras decimales exactas.

Si no se posee un programa que haga todo el proceso automáticamente, pero sí uno con el método de los trapecios, los resultados se ordenan de forma similar a como se hizo en la figura 1, tal como muestra la tabla 1.

k	Intervalos	I_k^0	I_k^1	I_k^2	I_k^3	Error
0	4	1,896119				
1	8	1,974232	2,000270			0,104151
2	16	1,993570	2,000016	1,999999		0,000271
3	32	1,998393	2,000001	2,000000	2,000000	0,000001

Tabla 1

En la tabla 2 se muestra un resumen de los resultados que se han obtenido en el cálculo de la integral definida de $\sin x$ en el intervalo $[0, \pi]$ con los métodos de trapecios, Simpson y Romberg, para diferentes cantidades de subintervalos. Observe como el resultado de Romberg, que se ha comenzado con 4 sub intervalos, coincide con el resultado de los trapecios para esa misma cantidad, pero para 8 intervalos coincide con el resultado de Simpson y, a partir de ahí, logra valores con menor error que Simpson.

Intervalos	Trapecios	Simpson	Romberg
4	1,89611908	2,00455974	1,89611908
8	1,97423165	2,00026917	2,00026917
16	1,99357035	2,00001659	1,99999975
32	1,99839336	2,00000103	2,00000000
64	1,99959839	2,00000006	2,00000000

Tabla 2

Algoritmo en pseudo código

El algoritmo que sigue calcula la integral definida de $f(x)$ en $[a, b]$ con error menor que ε mediante el método de Romberg. Se supone que $f(x)$ posee todas las derivadas requeridas en el intervalo $[a, b]$ y que los cálculos se realizan con las cifras decimales necesarias para no tomar en cuenta los errores por redondeo. El algoritmo utiliza como datos la función $f(x)$, el intervalo de integración $[a, b]$, la tolerancia ε del error, el número n de intervalos con que se desea comenzar y supone que existe un algoritmo auxiliar *Trapecios* que permite calcular integrales mediante el método de los trapecios.

$I_0^0 := \text{Trapecios}(f(x), a, b, n)$ {El algoritmo *Trapecios* calcula la integral de $f(x)$ en $[a, b]$ utilizando n sub intervalos}

$k := 0$

repeat

$n := 2n$

$k := k + 1$ {A partir de aquí se calcula la fila número k }

$I_k^0 := \text{Trapecios}(f(x), a, b, n)$ {Se calcula el primer elemento de la fila}

for $m = 1$ **to** k {y en este lazo, los demás elementos de la fila}

$$I_k^m := \frac{4^m I_k^{m-1} - I_{k-1}^{m-1}}{4^m - 1}$$

end

$$\text{Error} := |I_k^k - I_{k-1}^{k-1}|$$

until $\text{Error} < \varepsilon$

El resultado es I_k^k con error absoluto máximo Error

Ejemplo 2

Calcule la integral $\int_1^2 e^{x^2} dx$ con cuatro cifras decimales exactas utilizando el método de Romberg.

Solución:

La tabla 3 muestra los resultados obtenidos por un programa que calcula, a partir de $n = 4$, las filas de Romberg. En la tabla solo se muestra el elemento final de cada fila y la cota del error, que es el módulo de la diferencia entre dos resultados sucesivos.

k	Intervalos	Resultado	Error
0	4	16,07440693	
1	8	14,99608964	1.07831729
2	16	14,98999225	0.00609739
3	32	14.98997603	0.00001622
4	64	14.98997602	0.00000001

Tabla 3

Observe que, con 32 intervalos se ha logrado la exactitud requerida de cuatro cifras decimales exactas. Sin embargo, este resultado es mucho más exacto, ya que la cota del error que se utiliza en el método de Romberg es muy conservadora; la diferencia entre el resultado para $n = 32$ solo difiere en 10^{-8} del obtenido para $n = 64$, el cual posee siete cifras decimales exactas.

Ejercicios

Algunos de los ejercicios que siguen son muy laboriosos para realizar los cálculos a mano. Se supone que posea un programa computacional, preferiblemente confeccionado por usted, para ayudarlo en el trabajo. De no ser así, en los ejercicios que requieran mucho trabajo manual, determine los resultados con menos cifras exactas que las exigidas.

1. Calcule la siguiente integral mediante el método de Romberg con error menor que 10^{-5} .

$$\int_0^2 \tan \sqrt{x} dx$$

2. Halle la longitud de la curva exponencial $y = e^x$ entre los puntos $(0, 1)$ y $(1, e)$ con cuatro cifras decimales exactas mediante el método de Romberg.
3. Mediante el método de Romberg calcule con cuatro cifras decimales exactas el área de la región sombreada de la figura 2, limitada por las gráficas de las curvas $y = \frac{\sin x}{x}$ y $y = \sin x$.

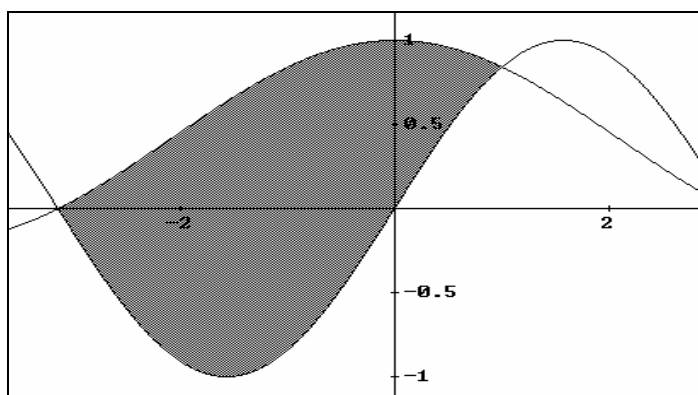


Figura 2

4. Utilice el método de Romberg para calcular, con cuatro cifras decimales exactas, la integral:

$$\int_0^{\pi} 3^{\sin x} dx$$

5. Si x es una variable aleatoria continua con distribución de probabilidad normal con media 0 y varianza 1, entonces su función de densidad probabilística viene dada por:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

que se denomina “campana de Gauss”. La probabilidad de que x tome algún valor entre 0 y 1 viene dada por la integral:

$$\int_0^1 \Phi(x) dx$$

Calcule esta integral mediante el método de Romberg con cinco cifras decimales exactas.

6. Puede probarse que

$$\int_0^{\infty} \Phi(x) dx = \frac{1}{2}$$

Determine con 3 cifras decimales exactas el número a tal que:

$$\int_0^a \Phi(x) dx = \frac{1}{4}$$

(Ayuda: Utilice algunos de los métodos del capítulo 2 para resolver ecuaciones numéricamente, por ejemplo, el método de bisección o el de la secante).

7. La figura 3 muestra la región sombreada R limitada por las curvas $y = \sqrt{\ln x}$ e $y = -(x-2)(x-5)$. Calcule el área de R con cuatro cifras decimales exactas mediante el método de Romberg.

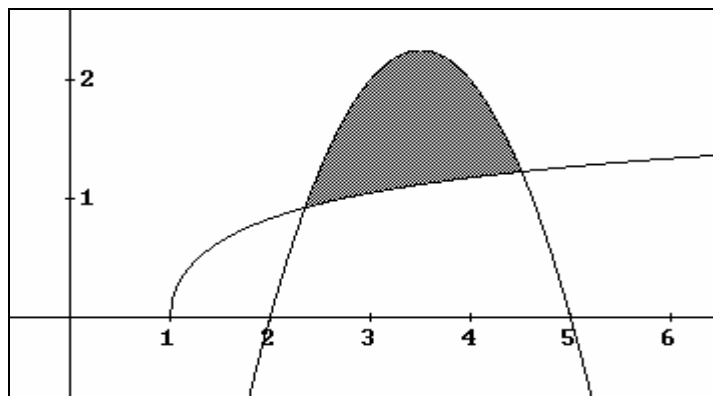


Figura 3

8. Un cable que está sometido a una carga uniforme (además de su propio peso), como ocurre en los puentes colgantes, adquiere la forma de una parábola de eje vertical. Halle la longitud

del cable que sostiene al puente colgante de la figura 4. Utilice el método de Romberg y halle el resultado con un error menor que 1 cm.

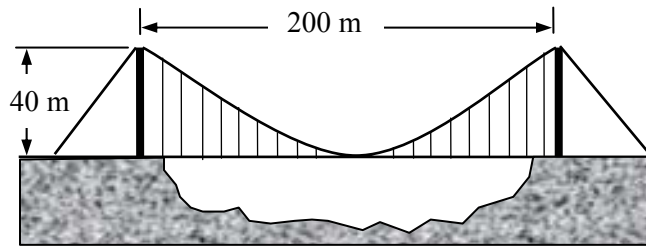


Figura 4

9. En el algoritmo en pseudo código del método de Romberg se trabaja con el arreglo bidimensional I_k^m aunque el algoritmo realmente no requiere almacenar todas las aproximaciones que contiene este arreglo, sino solamente su última fila. Modifique el algoritmo de manera que solo se empleen dos arreglos unidimensionales, llamados *FilaActual* y *FilaAnterior*.

5.6 Cálculo numérico de integrales dobles

Varios de los métodos numéricos estudiados antes pueden ser adaptados con facilidad al problema de calcular una integral doble. Sea la integral:

$$I = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx \quad (1)$$

cuya región de integración, limitada por las graficas de $y = g(x)$, $y = h(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$ se muestra en la figura 1.

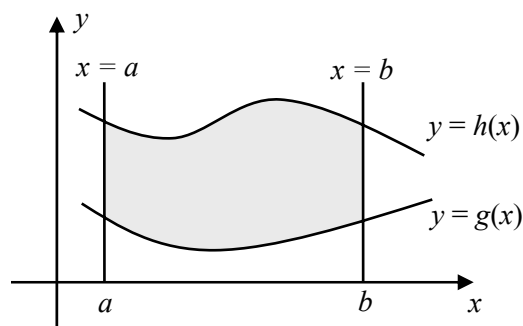


Figura 1

Realmente, el símbolo empleado en la fórmula (1), representa una integral iterada, es decir, una integral respecto a x , de una integral respecto a y . Así es como conviene enfocar este problema. Para ello la integral (1), se escribe:

$$I = \int_a^b F(x) dx \quad (2)$$

donde

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \quad (3)$$

y queda claro que el cálculo de I se reduce al cálculo de integrales unidimensionales.

Los métodos de los trapecios, de Simpson o de Gauss, permiten calcular aproximadamente la integral (2) mediante fórmulas del tipo:

$$\int_a^b F(x) dx \approx \sum_{i=1}^n B_i F(x_i) \quad (4)$$

El cálculo exacto de $F(x_i)$ requiere de la integral:

$$F(x_i) = \int_{g(x_i)}^{h(x_i)} f(x_i, y) dy \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (5)$$

pero su valor, para cada i , puede aproximarse por un método numérico (que no tiene que ser el mismo que el empleado en la expresión (4))

$$F(x_i) \approx \sum_{j=1}^m C_{ij} f(x_i, y_j) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (6)$$

Observe que, como en cada x_i el intervalo de integración de (5) cambia, los coeficientes de (6) no son los mismos para cada i , sino que dependen de i y de j .

Como la cantidad de evaluaciones de $f(x, y)$ será de $m \cdot n$, se requiere utilizar métodos eficientes que no necesiten que m y n tomen valores altos. En lo que sigue se utilizarán, como casos particulares, el método de Gauss y el método de Simpson.

Cálculo de integrales dobles por el método de Gauss

Como el algoritmo de Gauss es muy simple de programar y requiere de muy pocos cálculos, es uno de los preferidos para evaluar integrales dobles. Por razones de simplicidad, se supondrá que todas las integrales unidimensionales se calculan con el mismo método de Gauss (realmente, esto no es obligatorio) de m puntos. Se supone que las funciones f , g y h son continuas y poseen las derivadas necesarias para aplicar este algoritmo. La integral que se desea calcular es:

$$I = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx$$

y su región de integración se muestra en la figura 1. Llamando, como hasta ahora:

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy$$

la integral I se aproxima mediante la fórmula de Gauss:

$$I = \int_a^b F(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^m A_i F(x_i)$$

$$\text{donde } x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m \quad (7)$$

A_i y t_i son parámetros de la fórmula, previamente calculados y tabulados.

En cuanto al término $F(x_i)$, se aproxima también mediante la fórmula de Gauss para m puntos, es decir:

$$F(x_i) = \int_{g(x_i)}^{h(x_i)} f(x_i, y) dy \approx \frac{h(x_i) - g(x_i)}{2} \sum_{j=1}^m A_j f(x_i, y_j) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m$$

$$\text{donde } y_j = \frac{g(x_i) + h(x_i)}{2} + \frac{h(x_i) - g(x_i)}{2} t_j \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, m \quad (8)$$

A_j y t_j son, de nuevo, los parámetros de la fórmula de Gauss para m puntos.

El algoritmo se puede resumir en una sola fórmula:

$$\int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^m A_i \left[\frac{h(x_i) - g(x_i)}{2} \sum_{j=1}^m A_j f(x_i, y_j) \right]$$

con los x_i dados por (7) y, para cada i , los y_j calculados mediante (8).

La estimación del error de truncamiento es complicada y no será tratada.

Algoritmo en pseudo código del método de Gauss para integrales dobles

El siguiente algoritmo calcula aproximadamente, mediante el método de Gauss de m puntos, la integral doble de $f(x, y)$ en la región

$$\{(x, y): a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

como en la figura 1. Tanto el integrando como las funciones que limitan la región de integración se suponen continuas y con la cantidad de derivadas necesarias para que el algoritmo de Gauss que se emplee dé resultados satisfactorios. Se suponen conocidos las funciones f , g y h , el intervalo $[a, b]$, el orden m del método de Gauss que se empleará y los parámetros A_i y t_i ($i = 1, 2, \dots, m$) de la fórmula de Gauss.

```
Integral := 0
for i = 1 to m
```

```

 $x := \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_i$ 
 $c := g(x)$ 
 $d := h(x)$ 
 $F = 0$ 
for  $j = 1$  to  $m$ 
     $y := \frac{c+d}{2} + \frac{d-c}{2}t_j$ 
     $F := F + A_j f(x, y)$ 
end
 $F := \left(\frac{d-c}{2}\right)F$ 
 $Integral := Integral + A_i F$ 
end
 $Integral := \left(\frac{b-a}{2}\right)Integral$ 
El resultado es  $Integral$ 
Terminar

```

Ejemplo 1

Calcule mediante el método de Gauss de 4 puntos la integral doble:

$$\int_2^4 \int_{\ln x}^{\sqrt{x}} \frac{dydx}{x^2 + y^2}$$

Solución:

Los cálculos se realizarán paso a paso, siguiendo el algoritmo en pseudo código, para ayudar a su comprensión.

Se toma $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$, $g(x) = \ln(x)$, $h(x) = \sqrt{x}$, $a = 2$, $b = 4$

y los valores de $t_1, t_2, t_3, t_4, A_1, A_2, A_3, A_4$ de la tabla 1 de la sección 5.4.

Para $i = 1$

$$x_1 = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_1 = 2,138863690$$

$$\text{Límites de integración: } c_1 = \ln(x_1) = 0,7602747020 \quad d_1 = \sqrt{x_1} = 1,462485449$$

$$\begin{aligned} \text{Valores de } y: \quad y_1 &= 0,8090304898 \\ y_2 &= 0,9920109056 \\ y_3 &= 1,230749245 \\ y_4 &= 1,413729661 \end{aligned}$$

$$F_1 = \frac{d_1 - c_1}{2} [A_1 f(x_1, y_1) + A_2 f(x_1, y_2) + A_3 f(x_1, y_3) + A_4 f(x_1, y_4)] = 0,1207277155$$

Para $i = 2$

$$x_2 = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_2 = 2,660018959$$

$$\text{Límites de integración: } c_2 = \ln(x_2) = 0,9783332505 \quad d_2 = \sqrt{x_2} = 1,630956455$$

$$\begin{aligned} \text{Valores de } y: \quad y_1 &= 1,023646083 \\ y_2 &= 1,193705095 \\ y_3 &= 1,415584611 \\ y_4 &= 1,585643622 \end{aligned}$$

$$F_2 = \frac{d_2 - c_2}{2} [A_1 f(x_2, y_1) + A_2 f(x_2, y_2) + A_3 f(x_2, y_3) + A_4 f(x_2, y_4)] = 0,07428028231$$

Para $i = 3$

$$x_3 = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_3 = 3,339981040$$

$$\text{Límites de integración: } c_3 = \ln(x_3) = 1,205965130 \quad d_3 = \sqrt{x_3} = 1,827561501$$

$$\begin{aligned} \text{Valores de } y: \quad y_1 &= 1,249123713 \\ y_2 &= 1,411097825 \\ y_3 &= 1,622428805 \\ y_4 &= 1,784402918 \end{aligned}$$

$$F_3 = \frac{d_3 - c_3}{2} [A_1 f(x_3, y_1) + A_2 f(x_3, y_2) + A_3 f(x_3, y_3) + A_4 f(x_3, y_4)] = 0,04615936537$$

Para $i = 4$

$$x_4 = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_4 = 3,861136309$$

$$\text{Límites de integración: } c_4 = \ln(x_4) = 1,350961520 \quad d_4 = \sqrt{x_4} = 1,964977432$$

$$\begin{aligned} \text{Valores de } y: \quad y_1 &= 1,393593778 \\ y_2 &= 1,553592592 \\ y_3 &= 1,762346360 \\ y_4 &= 1,922345174 \end{aligned}$$

$$F_4 = \frac{d_4 - c_4}{2} [A_1 f(x_4, y_1) + A_2 f(x_4, y_2) + A_3 f(x_4, y_3) + A_4 f(x_4, y_4)] = 0,03475074104$$

Cálculo final:

$$\text{Integral} = \frac{b-a}{2} (A_1 F_1 + A_2 F_2 + A_3 F_3 + A_4 F_4) = 0,1326280669$$

Luego el resultado es de 0,1326280669. La integral no es calculable por métodos analíticos. El resultado, hallado con 10 cifras exactas por vía numérica es: 0,1326309143, lo que significa que se obtuvo un error inferior a 0,000003.

Cálculo de integrales dobles por el método de Simpson

El método de Simpson para calcular integrales dobles, aunque requiere evaluar el integrando en muchos más puntos que el método de Gauss, tiene la ventaja, como se verá más adelante, de que el error de truncamiento se puede estimar por el proceso de doble cálculo. La deducción del algoritmo es muy similar a la del método de Gauss.

Tal como hasta aquí, la integral que se desea calcular es:

$$I = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx$$

con la misma región de integración mostrada en la figura 1. Llamando,

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy$$

la integral I se puede aproximar por el método de Simpson para n subintervalos, como :

$$I = \int_a^b F(x) dx \approx \frac{h}{3} \sum_{i=0}^n A_i F(x_i) \quad (9)$$

$$\text{donde } h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + hi \text{ para } i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

y los coeficientes A_i son:

$$\begin{aligned} A_0 &= A_n = 1 \\ A_1 &= A_3 = A_5 = \dots = A_{n-1} = 4 \\ A_2 &= A_4 = A_6 = \dots = A_{n-2} = 2 \end{aligned} \quad (11)$$

En cuanto a $F(x_i)$, cuyo valor exacto sería:

$$F(x_i) = \int_{g(x_i)}^{h(x_i)} f(x_i, y) dy$$

Su valor se aproximará utilizando también el método de Simpson con la misma cantidad de sub intervalos (esto, realmente, no es necesario, pero de esta forma se obtienen expresiones más sencillas y el acotamiento del error es más simple). De esta manera resulta:

$$F(x_i) \approx \frac{h_i}{3} \sum_{j=0}^n A_j f(x_i, y_j) \quad (12)$$

$$\text{donde } h_i = \frac{h(x_i) - g(x_i)}{n}; \quad y_j = g(x_i) + jh_i \text{ para } j = 0, 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

y los coeficiente A_j están dados por (11).

Combinando las ecuaciones (9) y (12) se obtiene una fórmula más compacta para el cálculo aproximado de la integral doble:

$$\int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx \approx \frac{h}{3} \sum_{i=0}^n A_i \left[\frac{h_i}{3} \sum_{j=0}^n A_j f(x_i, y_j) \right] \quad (14)$$

en la cual, según (10) y (13): $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + hi$ para $i = 0, 1, 2, \dots, n$

$$h_i = \frac{h(x_i) - g(x_i)}{n}; \quad y_j = g(x_i) + jh_i \text{ para } j = 0, 1, 2, \dots, n$$

y los coeficientes A_i y A_j se muestran en (11).

Algoritmo en pseudo código del método de Simpson para integrales dobles

El siguiente algoritmo calcula aproximadamente, mediante el método de Simpson con n sub intervalos, la integral doble de $f(x, y)$ en la región

$$\{(x, y): a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

como en la figura 1. Tanto el integrando como las funciones que limitan la región de integración se suponen continuas y con la cantidad de derivadas necesarias para que el algoritmo de Simpson ofrezca resultados satisfactorios. Se suponen conocidos las funciones f , g y h , el intervalo $[a, b]$, y el número n de sub intervalos que se utilizará, el cual obligatoriamente debe ser par.

```

 $A_0 := 1$ 
 $A_n := 1$ 
for  $i = 1$  to  $n - 1$ 
     $A_i := 3 - (-1)^i$  {El resultado es 2 si  $i$  es par y 4 si  $i$  es impar}
end
 $Integral := 0$ 
 $hh := \frac{b-a}{n}$  {Este es el paso horizontal, para la variable  $x$ }
for  $i = 0$  to  $n$ 
     $x := a + hh \cdot i$ 
     $c := g(x)$ 
     $d := h(x)$ 
     $F := 0$ 
     $hv := \frac{d-c}{n}$  {Este es el paso vertical, para la variable  $y$ }
    for  $j = 0$  to  $n$ 
         $y := c + hv \cdot j$ 
         $F := F + A_j f(x, y)$ 
    end
     $F := \left( \frac{hv}{3} \right) F$ 
     $Integral := Integral + A_i F$ 

```

end

$$Integral := \left(\frac{hh}{3} \right) Integral$$

El resultado es *Integral*

Terminar

Ejemplo 2

Calcule mediante el método de Simpson con $n = 8$ subintervalos la integral doble:

$$\int_2^4 \int_{\ln x}^{\sqrt{x}} \frac{dydx}{x^2 + y^2}$$

Se trata de la misma integral que fue calculada por el método de Gauss en el ejemplo 1.

Solución:

Como $a = 2$ y $b = 4$, el paso de la variable x será: $h = \frac{4-2}{8} = 0,25$

La tabla 1 muestra, para cada uno de los 9 valores de x_i , el resultado $F_i \approx F(x_i)$ de la integral interior, calculado con el método de Simpson de 8 sub intervalos. Se han omitido los detalles del cálculo de los F_i por un problema de espacio. Todos los cálculos fueron ejecutados con un programa confeccionado a partir del algoritmo en pseudo código.

i	x_i	F_i
0	2,00	0,1409302783
1	2,25	0,1075915751
2	2,50	0,0850521566
3	2,75	0,0691444759
4	3,00	0,0575205962
5	3,25	0,0487795461
6	3,50	0,0420453693
7	3,75	0,0367486993
8	4,00	0,0325071312

Tabla 1

El valor obtenido fue 0,1326442366, que comparado con el valor exacto de 0,1326309143, muestra que se lograron 4 cifras decimales exactas, menos que el método de Gauss de 4 puntos con el cual se obtuvo 5 cifras decimales exactas.

Estimación del error

Cuando la integral doble se calcula mediante el método de Simpson, la integral

$$I = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx$$

se aproxima como:

$$I = \int_a^b F(x)dx \approx \frac{h}{3} \sum_{i=0}^n A_i F_i \quad (15)$$

donde:

$$F_i = \frac{h_i}{3} \sum_{j=0}^n A_j f(x_i, y_j) \quad (16)$$

el resultado obtenido contiene errores de dos fuentes diferentes. Por una parte en la ecuación (15) se introduce un error de truncamiento propio del método aproximado de Simpson. Este error se llamará R_1 y, como se recordará, es asintóticamente proporcional a h^4 ; el mismo existiría aunque los valores de F_i coincidieran con $F(x_i)$. Por otra parte en (15) está presente el error debido a que los valores de F_i son solamente aproximaciones de $F(x_i)$, a este error se le llamará R_2 . Nótese que esta es la misma situación que se analizó en la sección 5.2 respecto al error introducido en el cálculo numérico de las integrales debido a errores en los datos. Si se supone que en cada uno de los F_i está presente el mismo error absoluto δ , entonces el error R_2 vendría dado por:

$$R_2 = \frac{h}{3} \sum_{i=0}^n A_i \delta = \frac{1}{3} \delta \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^n A_i$$

Ahora bien, es fácil calcular la suma indicada:

$$\sum_{i=0}^n A_i = 1 + 4 + 2 + 4 + \dots + 2 + 4 + 1$$

y, como aparece $\frac{n}{2}$ veces el sumando 4 y $(\frac{n}{2} - 1)$ veces el sumando 2:

$$\sum_{i=0}^n A_i = 1 + 1 + 4(\frac{n}{2}) + 2(\frac{n}{2} - 1) = 3n$$

De manera que:

$$R_2 = \frac{1}{3} \delta \frac{b-a}{n} (3n) = \delta(b-a) \quad (17)$$

En la realidad, todos los F_i no contendrán el mismo error. Cada uno de estos errores procede del error de truncamiento introducido en la ecuación (16) y, por tanto, será proporcional a h_i^4 . Con vista a obtener una cota superior del error, puede calcularse δ tomando el mayor de los h_i el cual toma el valor:

$$\frac{1}{n} \max_i [h(x_i) - g(x_i)]$$

Esto es:

$$\delta = K_3 \left(\frac{1}{n} \max_i [h(x_i) - g(x_i)] \right)^4$$

y, agrupando todas las constantes (independientes de n) en una sola:

$$\delta = K_2 \left(\frac{1}{n} \right)^4$$

Con esto, y tomando en cuenta la fórmula (17), el error R_2 puede expresarse como:

$$R_2 = K_2 (b-a) \left(\frac{1}{n} \right)^4 \quad (18)$$

Por su parte, el error R_1 viene dado por:

$$R_1 = Ch^4 = C\left(\frac{b-a}{n}\right)^4$$

Que, después de reunir las constantes, resulta:

$$R_1 = K_1\left(\frac{1}{n}\right)^4 \quad (19)$$

El error absoluto total de (15) puede entonces estimarse como la suma de $R_1 + R_2$

Esto es:
$$R = R_1 + R_2 = K_1\left(\frac{1}{n}\right)^4 + K_2(b-a)\left(\frac{1}{n}\right)^4$$

que, con una nueva agrupación de constantes, resulta en:

$$R = K\left(\frac{1}{n}\right)^4$$

Esto prueba que el método de Simpson para integrales dobles continua siendo un método de orden 4, al igual que para integrales unidimensionales. Lo cual es suficiente para extender el procedimiento de doble cálculo utilizado para integrales simples al caso de las integrales dobles. Esto puede resumirse:

Si al calcular la integral doble:

$$\int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx$$

mediante el método de Simpson, se obtienen resultados I_h e I_{2h} al utilizar respectivamente pasos h y $2h$, entonces, el error en I_h puede estimarse como:

$$R_h \approx \frac{I_h - I_{2h}}{15}$$

Ejemplo 3

Calcule la integral doble:

$$\int_2^4 \int_{\ln x}^{\sqrt{x}} \frac{dy dx}{x^2 + y^2}$$

con cinco cifras decimales exactas utilizando el método de Simpson.

Solución:

Al calcular con $n = 4$, se obtiene el resultado:

$$I_{2h} = 0,1328112882$$

Utilizando $n = 8$: $I_h = 0,1326442366$

El error de I_h se estima como: $R_h \approx \frac{I_h - I_{2h}}{15} = \frac{0,1326442366 - 0,1328112882}{15}$

$$R_h \approx -0,000011$$

por lo cual, no es de esperar que I_h tenga cinco cifras decimales exactas. Se repite entonces el proceso, tomando ahora:

Para $n = 8$: $I_{2h} = 0,1326442366$

Para $n = 16$: $I_h = 0,1326317902$

El error contenido en este nuevo resultado puede estimarse como:

$$R_h \approx \frac{I_h - I_{2h}}{15} = \frac{0,1326317902 - 0,1326442366}{15}$$

$$R_h \approx -0,00000083$$

Por tanto, con cinco cifras decimales exactas, el resultado es: 0,1326318.

Observe que la estimación del error es bastante exacta, pues, teniendo en cuenta que el resultado exacto de la integral es 0,1326309143, el verdadero error resulta de: $-0,000000876$.

Ejercicios

1. Calcule la integral doble:

$$\iint_R xy^2 dx dy$$

donde R es la región que muestra la figura 2. Utilice el método de Gauss de 4 puntos.

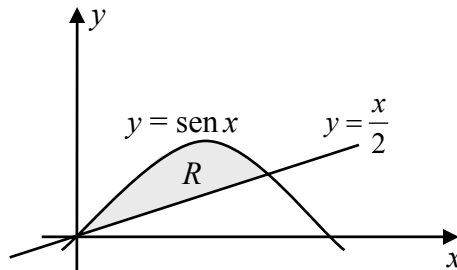


Figura 2

2. Calcule la integral del ejercicio anterior con un error menor que 0,00005 mediante el método de Simpson.
3. Calcule, con cinco cifras decimales exactas, la integral doble:

$$\int_1^3 \int_1^x \frac{\sin x}{y} dy dx$$

4. Determine cuál de los métodos de Gauss (es decir, con cuantos puntos) se requiere para calcular la integral del ejercicio 3 con una exactitud similar.
5. Mediante el método de Gauss de 4 puntos calcule la integral doble:

$$\int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} e^{xy} dy dx$$

6. Calcule la integral del ejercicio anterior mediante el método de Simpson con 16 sub intervalos y determine aproximadamente el error de truncamiento.
7. Calcule la integral doble

$$\iint_R \frac{dx dy}{x^2 + y^2 + 1}$$

donde R es la región limitada por una cardioide como se muestra en la figura 3. Utilice el método de Gauss de 4 puntos.

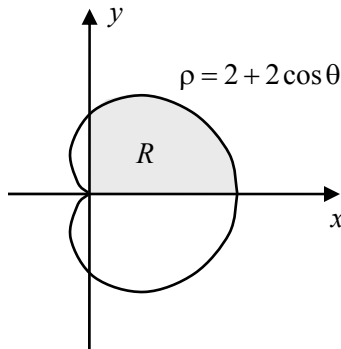


Figura 3

8. Calcule, con cuatro cifras decimales exactas, la integral doble:

$$\iint_R \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dx dy$$

donde R es la región del primer cuadrante interior a la lemniscata $\rho^2 = 4 \cos 2\theta$.

9. En el caso particular en que la integral doble está definida sobre una región rectangular:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

los algoritmos numéricos se simplifican considerablemente. Elabore el pseudo código del método de Simpson para calcular este tipo especial de integral doble.

Otras lecturas recomendadas

En la deducción del error de truncamiento para el método de Simpson, ha sido omitida la deducción para el error cometido en un intervalo; en “Análisis Matemático” de R. Pastor et al. puede verse una demostración de la fórmula con todos los detalles. En esta misma obra se halla la deducción de la fórmula de Mansion para acotar el error del algoritmo de Simpson.

Acerca de las fórmulas de Newton – Cotes de orden superior puede consultarse el libro “Computing Methods” de Berezin y Zhidkov el cual contiene las deducciones generales y los coeficientes tabulados hasta para el caso de la fórmula de orden 11.

El método de Gauss, como se ha visto, descansa en las interesantes propiedades de los polinomios de Legendre, de las cuales solo se han mencionado las dos que eran necesarias para justificar el método. El lector interesado en profundizar acerca de los polinomios de Legendre, puede consultar “A First Course in Numerical Analysis” de A. Ralston. En cuanto a la deducción de la fórmula del error de truncamiento en el método de Gauss, puede consultarse la obra de Berezin y Zhidkov antes citada.

El método de Romberg se basa completamente en la fórmula de Richardson la cual fue demostrada en el texto. Sin embargo, no se probó que, cuando esta fórmula se aplica a un método cuyo error de truncamiento tiene orden p , ella da resultados con error de truncamiento $p + 2$. Esta demostración puede encontrarse en “Elementary Numerical Analysis” de S. D. Conte.

La interpolación mediante splines puede ser utilizada para construir fórmulas de integración numérica; este interesante tema está tratado en “Computer Methods for Mathematical Computations” de G. E. Forsythe et al.

Otro enfoque al problema de la integración numérica es mediante los métodos de Montecarlo, los cuales, aunque poseen una baja eficiencia numérica, constituyen una elegante forma de calcular integrales, sobre todo las dobles, triples y de mayor dimensión. El libro “Computational Mathematics” de Demidovich y Maron incluye todo un capítulo al tratamiento de esta técnica.

Por razones de espacio, el cálculo numérico de las integrales impropias de primera y de segunda especie no se ha abordado. El lector interesado en el tema encontrará una buena referencia en “An Introduction to Numerical Analysis” de K. E. Atkinson.

Principales ideas del capítulo

- El método analítico para calcular integrales definidas está limitado a funciones que posean primitiva en términos de funciones elementales, lo cual en muchos casos importantes, no sucede. El procedimiento analítico tampoco es aplicable en los casos en que el integrando solo puede evaluarse de modo experimental.
- El método de los trapecios se basa en la idea de dividir el intervalo de integración en n subintervalos de amplitud h mediante un conjunto de puntos $\{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$ y descomponer la integral en n integrales, cada una de las cuales posee un intervalo de integración pequeño de longitud h , y se aproxima sustituyendo el integrando, para ese intervalo, por el polinomio interpolador de primer grado que determinan los puntos extremos del intervalo.
- El método de los trapecios consiste en la fórmula aproximada:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right)$$

- Si en el intervalo $[a, b]$ $f(x)$ es continua y posee primera y segunda derivadas continuas, entonces existe en $[a, b]$ al menos un número c tal que, el error de truncamiento de la fórmula de los trapecios para la integral de $f(x)$ en $[a, b]$ viene dado por:

$$R = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(c)$$

- Para valores pequeños de h el error de truncamiento en el método de los trapecios se puede aproximar por la fórmula asintótica:

$$R \approx -\frac{f'(b) - f'(a)}{12} h^2$$

- Si el error de truncamiento de un método numérico de integración es, asintóticamente:

$$R_h = Ch^p$$

entonces se puede estimar, para valores pequeños de h , mediante:

$$R_h \approx \frac{I_h - I_{2h}}{2^p - 1}$$

donde I_h e I_{2h} son los resultados obtenidos al calcular la integral mediante el método numérico con pasos h y $2h$ respectivamente.

- Al calcular numéricamente una integral, se introduce, además del error de truncamiento, un error debido a los errores de los datos. Este error está acotado por el producto del error en cada dato por la longitud del intervalo de integración y es, en general, muy pequeño en comparación con el error de truncamiento.
- El método de Simpson, o método de las parábolas, se basa en la idea de dividir el intervalo de integración en n (número par) subintervalos de amplitud h mediante un conjunto de puntos $\{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$ y descomponer la integral en $n/2$ integrales, cada una de las cuales posee un intervalo de integración pequeño de longitud $2h$, y se aproxima sustituyendo el integrando, para ese intervalo, por el polinomio interpolador de segundo grado que determinan los puntos extremos y el punto central del intervalo.
- La fórmula aproximada del método de Simpson es:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{3}h(E + 4I + 2P)$$

donde:

$E = y_0 + y_n$	(Suma de las ordenadas en los extremos)
$I = y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}$	(Suma de las ordenadas de índice impar)
$P = y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}$	(Suma de las ordenadas de índice par)

y su error de truncamiento viene dado por: $R = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(c)$

Como el error de truncamiento es de orden h^4 se puede estimar como:

$$R_h \approx \frac{I_h - I_{2h}}{15}$$

- La fórmula de Gauss para m puntos viene dada por:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^m A_i f(x_i)$$

donde: $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_i$ para $i = 1, 2, \dots, m$

$t_1, t_2, \dots, t_m$ son los ceros del polinomio de Legendre de grado m . Los valores de $t_1, t_2, \dots, t_m$ y $A_1, A_2, \dots, A_m$ vienen tabulados y son tales que la fórmula de Gauss da resultados exactos para polinomios hasta de grado $2m - 1$.

- Si I_1 es el resultado obtenido a calcular la integral de $f(x)$ en $[a, b]$ mediante el método de Gauss con m puntos e I_2 es la suma los resultados obtenidos al aplicar el mismo método en los intervalos $[a, \omega]$ y $[\omega, b]$ (ω es el punto medio del intervalo $[a, b]$), entonces el error de truncamiento de I_2 puede estimarse como:

$$R_2 \approx \frac{I_2 - I_1}{4^m - 1}$$

- El método de Romberg es un algoritmo iterativo para calcular integrales. Se basa en la idea de calcular por filas una tabla de aproximaciones. La fila número k se calcula a partir de la fila $k - 1$, mediante la fórmula de Richardson:

$$I_k^m = \frac{4^m I_k^{m-1} - I_{k-1}^{m-1}}{4^m - 1} \quad m = 1, 2, \dots, k$$

excepto el primer elemento de la fila: I_k^0 que se calcula mediante el método de los trapecios con $2^k n$ subintervalos (n es un valor inicial que se selecciona como un número entero pequeño, por ejemplo 4). Cada fila posee un elemento más que la anterior. El error de truncamiento del último elemento de la fila está acotado por la diferencia (en valor absoluto) con el último elemento de la fila anterior.

- Algunos de los métodos numéricos de integración (Trapecios, Simpson, Gauss) aproximan una integral definida mediante una suma y, por tanto, como una integral doble se calcula como una integral simple iterada, los métodos anteriores permiten calcular integrales dobles reduciéndolas a una suma de sumas.
- El método de Gauss de m puntos para el cálculo de integrales dobles se puede resumir en la fórmula:

$$\int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^m A_i \left[\frac{h(x_i) - g(x_i)}{2} \sum_{j=1}^m A_j f(x_i, y_j) \right]$$

donde:

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m$$

y, para cada x_i , $y_j = \frac{g(x_i) + h(x_i)}{2} + \frac{h(x_i) - g(x_i)}{2} t_j$ para $j = 1, 2, \dots, m$

- El método de Simpson con n sub intervalos para integrales dobles se resume como:

$$\int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx \approx \frac{h}{3} \sum_{i=0}^n A_i \left[\frac{h_i}{3} \sum_{j=0}^n A_j f(x_i, y_j) \right] \quad (14)$$

donde: $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + hi$ para $i = 0, 1, 2, \dots, n$

y, para cada x_i : $h_i = \frac{h(x_i) - g(x_i)}{n}$; $y_j = g(x_i) + jh_i$ para $j = 0, 1, 2, \dots, n$

En todos los casos $\{A_i\} = \{1, 4, 2, 4, 2, \dots, 2, 4, 1\}$

- Al aplicar el método de Simpson al cálculo de integrales dobles, el error de truncamiento se puede estimar por el procedimiento de doble cálculo, ya que el error es del orden de h^4 , mediante la fórmula:

$$R_h \approx \frac{I_h - I_{2h}}{15}$$

Auto examen

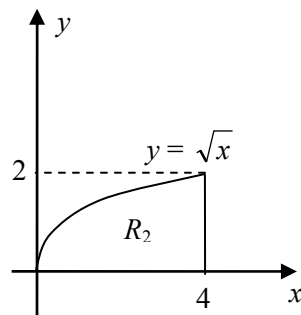
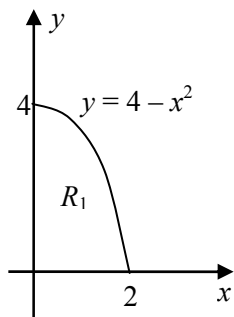
- Cite dos razones que limitan el método analítico de calcular integrales definidas.
- Explique la idea geométrica del método de los trapecios y diga por qué recibe este nombre.
- ¿Qué significa la afirmación de que el error de truncamiento del método de los trapecios es de orden 2 y el de Simpson es de orden 4?
- ¿Por qué en el método de Gauss el integrando se evalúa precisamente en los ceros de un polinomio de Legendre?
- Pruebe la fórmula de extrapolación de Richardson y explique qué relación guarda la misma con el método de integración de Romberg.
- La figura que sigue muestra dos regiones idénticas en cuanto a su forma. La diferencia solo está en cuanto a su posición respecto a los ejes. Si se utiliza la región R_1 el área viene dada por la integral

$$\int_0^2 (4 - x^2) dx$$

que, al ser calculada por el método de Simpson con cuatro sub intervalos da como resultado: 5,33333333, es decir, $16/3$, el valor exacto de la integral. ¿Por qué en este caso el método de Simpson obtiene un resultado exacto? Si se utiliza la región R_2 , hay que calcular la integral:

$$\int_0^4 \sqrt{x} dx$$

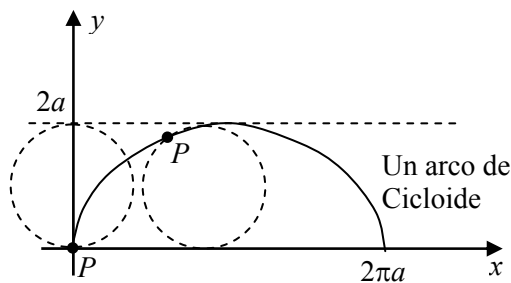
Cuando esta integral se calcula mediante el método de Simpson con 64 sub intervalos se obtiene el resultado 5,33206482 que solo posee dos cifras decimales exactas. ¿Por qué en este caso el método de Simpson conduce a un resultado tan inexacto? ¿Puede usted establecer alguna recomendación de carácter general?



7. Cuando una circunferencia rota (sin deslizamiento) a lo largo de una recta, cualquiera de los puntos de la circunferencia describe una curva periódica, llamada “cicloide”. Si la circunferencia tiene radio a , rota sobre el eje x y el punto P inicialmente se halla en el origen, como en la figura que sigue, el punto P describe la cicloide de ecuación paramétrica:

$$x = a(t - \operatorname{sen} t); \quad y = a(1 - \cos t)$$

Si un auto viaja desde La Habana hasta Matanzas (100 km) ¿Qué longitud recorre una pequeña piedra que se encuentra en la superficie de uno de los neumáticos? Dé la respuesta con un error menor que un metro.



8. Calcule mediante el método de Simpson, con cuatro cifras decimales exactas, la integral doble:

$$\iint_R e^{-y} dy dx$$

donde $R = \{(x, y): \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi; \cos x \leq y \leq \operatorname{sen} x\}$

9. Respecto al algoritmo en pseudo código que se muestra a continuación diga qué método de integración se está empleando y complete los espacios entre signos de interrogación.

$$h := \frac{b-a}{n}$$

$\text{Suma} := 0$?

for $i = 1$ **to** $n - 1$

$x := a + ih$

if $i \bmod 2 = 1$ **then**

$\text{Suma} := \text{Suma} + f(x)$?

else

```

                                 $Suma := Suma + \zeta$     ?
    end
end
 $Integral := \zeta$     ?
El resultado aproximado es  $Integral$ 
Terminar

```