

CAPÍTULO 7

Matemática Numérica, 2da Edición

Manuel Álvarez, Alfredo Guerra, Rogelio Lau

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Objetivos

Al finalizar el estudio y la ejercitación de este capítulo, el lector debe ser capaz de:

- Utilizar adecuadamente la terminología propia del tema de ecuaciones diferenciales ordinarias.
- Identificar problemas de condiciones iniciales y de condiciones de frontera.
- Comparar los métodos analíticos y los métodos numéricos que se utilizan para resolver ecuaciones diferenciales.
- Describir el concepto de campo de direcciones de una ecuación diferencial de primer orden.
- Analizar las características más sobresalientes de las soluciones de una ecuación diferencial de primer orden a partir de la observación del campo de direcciones.
- Describir el concepto de ecuación diferencial estable y de método numérico estable para resolver una ecuación diferencial.
- Interpretar geométricamente los métodos de Euler y de Runge – Kutta.
- Describir los métodos de Euler, Taylor y Runge – Kutta de orden 2 y 4 y Adams, su error de truncamiento y su estabilidad.
- Describir los conceptos de método de paso simple y de método de paso múltiple.
- Explicar la deducción de las fórmulas de Adams – Bashforth y de Adams – Moulton.
- Explicar el concepto de método predictor – corrector y ejemplificarlo mediante los métodos predictor – corrector de Adams.
- Aplicar los métodos de Euler, Runge – Kutta y Adams a la solución de ecuaciones diferenciales de primer orden.
- Describir el concepto de problema de Cauchy de orden m .
- Describir los algoritmos de Runge – Kutta adaptados a la solución de problemas de Cauchy de orden m .
- Resolver ecuaciones diferenciales de orden superior con condiciones iniciales, mediante su transformación en problemas de Cauchy.
- Describir los pasos generales para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones de frontera mediante el método de los disparos.
- Analizar los algoritmos en pseudo código correspondientes a todos los métodos estudiados en el capítulo.
- Modelar problemas sencillos que conducen a ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales o de frontera.

7.1 Introducción

Conceptos iniciales

Como se recordará de cursos previos, una ecuación diferencial es aquella en la que aparecen derivadas. Cuando hay una sola variable independiente respecto a la cual se plantean todas las derivadas, entonces las derivadas se llaman ordinarias y también la ecuación diferencial. Una gran cantidad de leyes físicas, biológicas, económicas, geométricas, etc., se plantean en forma concisa mediante una ecuación diferencial ordinaria o un conjunto de ellas. Algunos ejemplos sencillos de ecuaciones diferenciales ordinarias son:

$$\frac{dy}{dx} = x^3 \quad \frac{dy}{dx} = 2y \quad \frac{dy}{dt} + 4ty = \sin t \quad \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + x^2 y = e^t$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 3y - \frac{dy}{dt} = t^2 \\ \frac{dy}{dt} + x + y + 2 \frac{dx}{dt} = t + 1 \end{cases}$$

Por supuesto, pueden diferir los nombres de las variables, el orden (dado por la derivada de mayor orden), el número de ecuaciones simultáneas, etc. En cualquier caso, el problema más importante que se presenta, una vez que la ecuación ha sido planteada, es hallar su solución. Se entiende por *solución*, una función (o un conjunto de funciones si se trata de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias) que exprese la relación que debe existir entre las variables, de modo que la ecuación diferencial se satisfaga.

Ejemplo 1

Compruebe que $y = \frac{1}{4}x^4 + C_1$ e $y = C_2e^{2x}$, donde C_1 y C_2 son constantes reales, son soluciones, respectivamente, de las ecuaciones $\frac{dy}{dx} = x^3$ y $\frac{dy}{dx} = 2y$

Solución:

Si $y = \frac{1}{4}x^4 + C_1$ basta derivar para obtener $\frac{dy}{dx} = x^3$ independientemente del valor de C_1 . Así que, para cualquier constante C_1 , $y = \frac{1}{4}x^4 + C_1$ es solución de la ecuación diferencial ordinaria $\frac{dy}{dx} = x^3$.

En el segundo caso, al derivar $y = C_2e^{2x}$ se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = 2C_2e^{2x} = 2(C_2e^{2x}) = 2y$$

Luego, $y = C_2e^{2x}$ es solución de la ecuación $\frac{dy}{dx} = 2y$ para todo valor de C_2 .

■

Tipos de solución

Usualmente, una ecuación diferencial ordinaria posee infinitas soluciones que se expresan en una sola igualdad mediante el empleo de constantes arbitrarias. Así, las funciones que mostró el ejemplo 1 son las soluciones generales respectivas de las ecuaciones diferenciales que allí se mostraron.

En los cursos sobre ecuaciones diferenciales se prueba que el número de constantes arbitrarias esenciales que aparece en la solución general de una ecuación diferencial ordinaria coincide con el orden de la ecuación. De esto resulta que, si se desea precisar una única solución para una ecuación diferencial ordinaria de orden n , hay que suministrar n condiciones particulares que deba satisfacer la solución, de modo que no exista ambigüedad en la solución particular que se busca.

Ejemplo 2

Trace las gráficas de varias soluciones particulares de la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dy}{dx} = 2y$$

y, en especial, aquella que satisface $y(1) = 2$.

Solución:

Como la solución general viene dada por $y = Ce^{2x}$, basta asignar a C valores arbitrarios. Tomando, por ejemplo, $C = 1$, $C = 2$, $C = 0$, $C = -\frac{1}{2}$, se tienen las soluciones particulares $y = e^{2x}$, $y = 2e^{2x}$, $y = 0$, $y = -\frac{1}{2}e^{2x}$, respectivamente. Si se exige que $y(1) = 2$, el valor de C debe satisfacer que:

$$2 = Ce^2$$

o sea, $C = 2e^{-2} = 0,27067$, y se tiene la solución:

$$y = 0.27067e^{2x}$$

En la figura 6.1 se muestran, aproximadamente, las cinco soluciones particulares halladas.

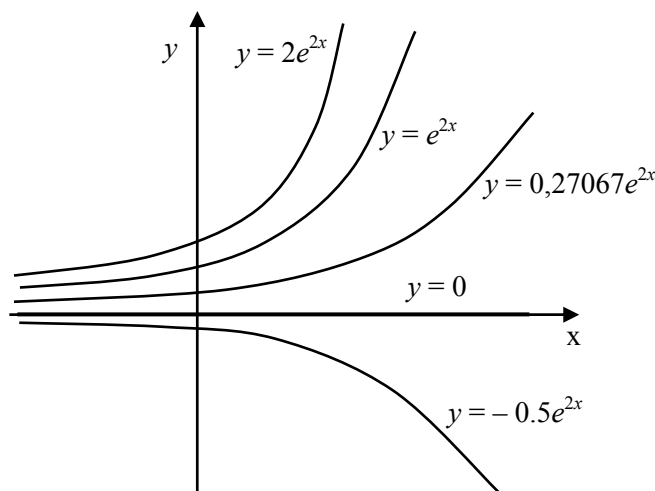


Figura 1

Condiciones iniciales y de frontera

Cuando se requiere más de una condición particular para determinar la solución que se desea, pueden darse dos situaciones muy diferentes:

- Que se especifiquen todas las condiciones particulares para un mismo valor de la variable independiente (*condiciones iniciales*).
- Que se incluyan condiciones particulares que deberá satisfacer la solución para dos o más valores de la variable independiente (*condiciones de frontera*).

Así:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} + 6y &= x^2 + \sin x \\ y(1) &= 1 \\ y'(1) &= 3\end{aligned}$$

es un problema de condiciones iniciales, mientras que

$$\begin{aligned}\frac{d^2 y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} + 6y &= x^2 + \sin x \\ y(1) &= 2 \\ y(2) &= 5\end{aligned}$$

es un problema de condiciones de frontera.

La diferencia entre ambos tipos de problema no es trivial. La forma de resolverlos es muy diferente y, usualmente, los problemas con condiciones de frontera son mucho más complicados. La mayor parte de este capítulo se dedicará a problemas con condiciones iniciales y solo al final, se estudiará un método para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones de frontera.

Limitaciones de los métodos analíticos

Ya en cursos anteriores se han tratado métodos *analíticos* para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. Acerca de ellos puede afirmarse que:

- Utilizan operaciones algebraicas, incluyendo la derivación y la integración, para obtener la solución general a partir de la ecuación diferencial.
- La solución particular deseada se halla a partir de la solución general, buscando valores adecuados para las constantes arbitrarias.
- Cada método analítico se ocupa de un tipo especial de ecuación diferencial ordinaria y es inaplicable en otros casos.
- A pesar de la diversidad de métodos analíticos, la mayoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias no puede resolverse por esta vía.

Una gran cantidad de problemas se pueden modelar mediante ecuaciones diferenciales ordinarias que pueden resolverse analíticamente; en otros casos es necesario simplificar e incluso ignorar aspectos importantes, con tal de poder aplicar posteriormente un método analítico. En otras no pocas situaciones, las ecuaciones obtenidas no se pueden resolver analíticamente. A continuación se muestran algunos ejemplos clásicos.

Ejemplo 3: El péndulo simple

Considérese un cuerpo de masa m que cuelga de un soporte fijo mediante una cuerda de longitud L . Se suponen condiciones perfectamente ideales:

- La cuerda es perfectamente flexible.
- La cuerda no tiene masa.
- El aire no ejerce ninguna resistencia al movimiento del péndulo o la cuerda.

En estas condiciones, el péndulo se separa un ángulo θ_0 de la posición de reposo y se suelta en el instante $t = 0$. Se quiere conocer cómo cambia el ángulo θ de deflexión a lo largo del tiempo.

Solución:

En un instante cualquiera $t \geq 0$ el péndulo ocupará una posición θ (figura 2 a) y sobre él estarán actuando dos fuerzas externas: la atracción gravitacional mg y la fuerza de tensión T de la cuerda (figura 2 b).

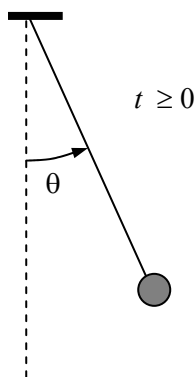


Figura 2 a

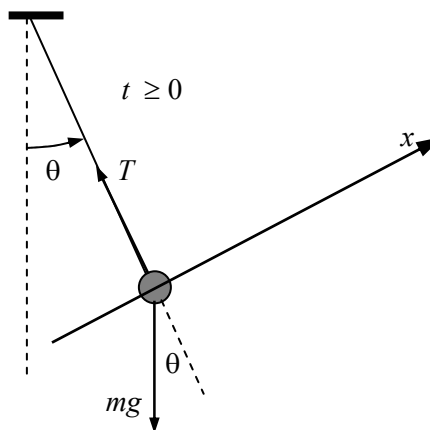


Figura 2 b

Tomando un eje x en el péndulo, tangente a su trayectoria (perpendicular a la cuerda), la segunda ley de Newton conduce a:

$$-mg \sin \theta = ma_x$$

donde a_x denota la aceleración tangencial del péndulo. Si se tiene en cuenta las leyes del movimiento circular:

$$a_x = L \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

ya que L es el radio de la circunferencia que el péndulo describe. Queda entonces la ecuación:

$$-g \sin \theta = L \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

que es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.

A pesar de la apariencia sencilla de esta ecuación, su solución no se puede expresar en términos de funciones elementales y, por tanto, no es posible obtenerla por métodos analíticos. Si el análisis se limita a ángulos de deflexión muy pequeños, en los cuales la aproximación

$$\sin \theta \approx \theta$$

introduzca un error permisible, la ecuación se simplifica considerablemente y se puede encontrar una solución por la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes; pero esto solo permitiría considerar casos en los que el péndulo no se aleje más de cinco o seis grados de la posición de reposo.

Para que el problema del péndulo simple quede completo hay que añadir dos condiciones iniciales (la ecuación es de segundo orden) que están establecidas en el enunciado del ejemplo. El problema quedaría así:

Hallar $\theta(t)$ para $t \geq 0$ tal que:

$$\begin{aligned} -g \sin \theta &= L \frac{d^2 \theta}{dt^2} \\ \theta(0) &= \theta_0 \\ \theta'(0) &= 0 \end{aligned}$$

donde L y g son constantes conocidas. Este problema será resuelto al final del capítulo.

Ejemplo 4: Depredadores y presas

A principios del siglo XX, el matemático italiano Vito Volterra (e, independientemente el norteamericano de origen austriaco, A. J. Lotka) estudió la dinámica de un sistema biológico muy simple en el cual interactúan dos especies, que se llamarán *depredadores* y *presas*. Se supone las siguientes condiciones ideales:

- Ambas especies conviven en una región cerrada (un bosque, un lago, una isla) de modo que no llegan individuos nuevos, ni salen. El crecimiento y decrecimiento solo es causado por nacimientos y muertes.
- Las presas viven del medio ambiente, que se supone puede sostener una población ilimitada de presas. El único factor que limita el crecimiento de la población de presas es su depredador. En ausencia de depredadores, la población de presas crecería sin límite.
- Los depredadores solo se alimentan de las presas. En ausencia de presas, la población de depredadores desaparece.

Considérense las funciones del tiempo:

$x(t)$: número de presas en el instante t
 $y(t)$: número de depredadores en el instante t

En ausencia de depredadores ($y = 0$) las presas aumentan según la ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

donde $a > 0$ representa la tasa de crecimiento natural de la especie, la cual tiene en cuenta la tasas de natalidad y de mortalidad.

En ausencia de presas ($x = 0$) la población de depredadores decrecerá con una rapidez proporcional al número de individuos:

$$\frac{dy}{dt} = -cy$$

donde $c > 0$ es la tasa de decrecimiento. Si $x > 0$ e $y > 0$, la probabilidad de que un depredador y una presa se encuentren será proporcional al producto xy ; como esa probabilidad constituye un factor de crecimiento para la población de depredadores y de decrecimiento para las presas, es razonable suponer que

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases}$$

que se conocen con el nombre de *ecuaciones de Lotka - Volterra*. Aunque su apariencia es sencilla, la presencia del término xy hace que el sistema sea no lineal y su solución analítica no es posible. Sin embargo, conocidos los parámetros a, b, c, d y las poblaciones x e y en un instante inicial, se puede determinar numéricamente como variará cada una de las poblaciones. Se pospone la solución del problema para la sección 7.5.

Ejemplo 5: La órbita de un planeta

Una de los descubrimientos más notables de Isaac Newton fue la ley de gravitación universal. Esta establece que dos cuerpos de masas m_1 y m_2 , cuyos centros de masa están separados una distancia d , se atraen con una fuerza F que es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Simbólicamente:

$$F = \frac{km_1m_2}{d^2}$$

donde k es la constante de gravitación universal: $k = 6.67 \cdot 10^{-8} (cm^3 / g)s^2$

Puesto que esta es la única ley que rige el movimiento planetario (dentro de los límites de la mecánica Newtoniana) ella permite conocer cómo variará la posición de un planeta respecto al sol, suponiendo conocidas su posición y su velocidad en un instante inicial.

Solución:

Se tomará al sol como punto de referencia y se situará en él un sistema de dos ejes coordenados coplanar con la órbita del planeta y de modo que el eje x pase por la posición del mismo en el instante $t = 0$.

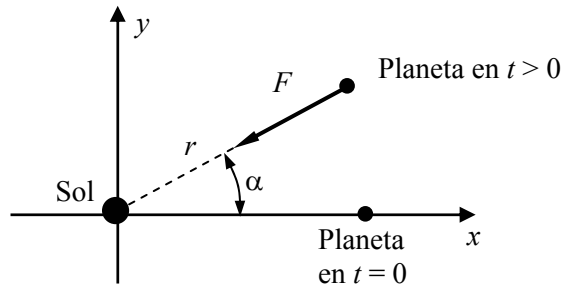


Figura 3

Considérese ahora el planeta en un instante $t > 0$ y sea r la distancia que lo separa del sol y α el ángulo que forma el radio vector con el eje x (figura 3). Para simplificar el problema, no se tendrá en cuenta ninguna otra influencia sobre el planeta, que no sea la fuerza F de atracción del sol. Aplicando la segunda ley de Newton sobre ambos ejes coordenados, resulta:

$$\begin{cases} -F \cos \alpha = m_p a_x \\ -F \sin \alpha = m_p a_y \end{cases}$$

donde m_p es la masa del planeta y a_x y a_y son las componentes de la aceleración sobre los ejes x e y respectivamente. Según la ley de gravitación universal, las ecuaciones se transforman en:

$$\begin{cases} -\frac{km_s m_p}{r^2} \cos \alpha = m_p \frac{d^2 x}{dt^2} \\ -\frac{km_s m_p}{r^2} \sin \alpha = m_p \frac{d^2 y}{dt^2} \end{cases}$$

donde (x, y) son las coordenadas del planeta en el instante t , por lo cual:

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} \quad \sin \alpha = \frac{y}{r} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Esto permite expresar las ecuaciones en términos de x e y :

$$\begin{cases} -\frac{km_s}{x^2 + y^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{d^2 x}{dt^2} \\ -\frac{km_s}{x^2 + y^2} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{d^2 y}{dt^2} \end{cases}$$

O sea:

$$\begin{cases} -\frac{km_s x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{d^2 x}{dt^2} \\ -\frac{km_s y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{d^2 y}{dt^2} \end{cases}$$

que forman un sistema de dos ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden. Las condiciones iniciales del problema son la posición y la velocidad del planeta (respecto al sol) en el instante $t = 0$; es decir:

$$\begin{aligned} x(0) &= r_0 \\ y(0) &= 0 \\ v_x(0) &= v_{0x} \\ v_y(0) &= v_{0y} \end{aligned}$$

Al final del capítulo se estará en condiciones de resolver numéricamente este complicado problema.

Ejercicios

En las siguientes ecuaciones diferenciales diga su orden y determine si usted podría hallar su solución por alguno de los métodos analíticos que conoce. El objetivo de este ejercicio no es que usted repase todos los métodos analíticos que estudió en cursos pasados para resolver ecuaciones diferenciales, sino que se convenza de la gran variedad de tales procedimientos y del reducido número de ecuaciones que se pueden resolver con ellos; de ese modo apreciará mejor la enorme generalidad de los métodos numéricos que estudiará.

1. $(x^2 - xy)dx + (y^2 + x^2)dy = 0$

2. $(x^2 - y)dx + (y^2 + x^2)dy = 0$

3. $\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{x}$

4. $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$

5. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = xy^2$

6. $(x + 2y + 1)dx + (x - 3y + 2)dy = 0$

7. $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}y + y^2$

8. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} = \tan x$

9. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y = \ln x$

10. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n - 1)y = 0$

11. $y'' - (\cos x)y' + y^2 = 0$

12. $\frac{d^2y}{dx^2} = y^3$

En cada uno de los siguientes ejercicios, determine si se trata de un problema de condiciones iniciales o de un problema con condiciones de frontera.

13. $\frac{d^2y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} - e^{-t}y = 4t; \quad y(0) = 0; \quad y(1) = 3$

$$14. \quad \frac{d^3 x}{dt^3} + \frac{dx}{dt} - x^2 = 0; \quad x(1) = 3; \quad x'(1) = 2; \quad x''(1) = -1$$

$$15. \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} - (\operatorname{sen} x)y = x + y; \quad y(2) = 1; \quad y'(2) = 3$$

$$16. \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - 2xy = e^{-x}; \quad y(2) = 1; \quad y'(3) = 2$$

$$17. \quad \frac{dy}{dx} = 4x + 3y^2; \quad y(2) = -3$$

$$18. \quad \frac{dx}{dt} + 4xt = 3t^2; \quad y(0) = 1$$

$$19. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} - 3 \frac{dy}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} = y + 1 \end{cases} \quad x(0) = 2 \quad y(0) = 3$$

$$20. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = z \\ \frac{dz}{dt} = -x + z - y \end{cases} \quad x(1) = 2 \quad y(1) = 1 \quad z(0) = 3$$

7.2 Ecuaciones diferenciales de primer orden

Como ya se sabe de cursos anteriores, una ecuación diferencial de primer orden es aquella en que sólo aparece la primera derivada de la función incógnita respecto a su variable independiente. En todos los casos de interés práctico, esta derivada puede expresarse en forma explícita en términos de las variables dependiente e independiente, así que en todo lo que sigue, se supondrá que la ecuación puede expresarse como

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Como los métodos numéricos sólo son capaces de hallar soluciones particulares de una ecuación diferencial, también se supone conocido el valor de la solución para algún valor de la variable independiente. Es decir, se trata de:

Hallar la solución del problema de Cauchy

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0\end{aligned}\tag{1}$$

Ejemplo 1

Expresa de la forma (1) el problema:

$$\begin{aligned}(4x + y)dx + (2x + y^2 - 3)dy &= 0 \\ y(-1) &= 4\end{aligned}$$

Solución:

Despejando el cociente de diferenciales:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\frac{4x + y}{2x + y^2 - 3} \\ y(-1) &= 4\end{aligned}$$

Ejemplo 2

Proponga una ecuación diferencial de primer orden que no pueda ser expresada en la forma (1)

Solución:

Por ejemplo:

$$\frac{dy}{dx} + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) = x + y$$

ya que en una ecuación del tipo $u + \sin u = v$ no es posible despejar la variable u .

■

Las ecuaciones diferenciales de primer orden se presentan en multitud de problemas de la matemática aplicada pero no solo por esto son importantes. Resulta que cualquier ecuación diferencial ordinaria (o sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias) con condiciones iniciales puede ser reducida a un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden. Esto significa que, desarrollando métodos numéricos capaces de resolver ecuaciones diferenciales de primer orden, se podrá resolver cualquier problema de condiciones iniciales. Más adelante, en la sección 7.5, se verá cómo.

El campo de direcciones

La ecuación
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

puede interpretarse como una relación que a cada par ordenado (x, y) le hace corresponder un valor de la derivada. Como un par ordenado (x, y) representa un punto en el plano coordenado y un valor de una derivada se puede interpretar como una pendiente en un punto, resulta que la ecuación le hace corresponder a cada punto P del plano xy , donde la función f esté definida, una pendiente. Es muy interesante expresar esta relación gráficamente.

Sea R una región del plano xy donde está definida la función $f(x, y)$. Considérese un conjunto discreto de puntos de $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ (marcados en la figura 1 como puntos dentro de la región R)

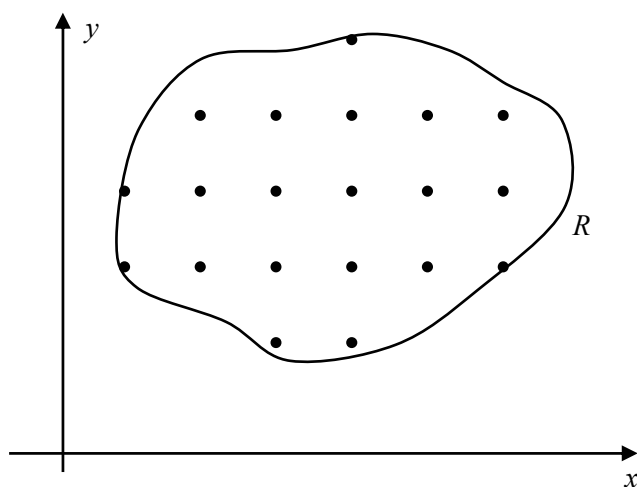


Figura 1

Sea f_i el valor de la función f para el punto P_i , es decir:

$$f_i = f(P_i) \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Trazando un pequeño segmento de recta con centro en P_i y cuya pendiente sea f_i para cada uno de los puntos marcados en la región R , se obtiene una gráfica como la que muestra la figura 2. Al conjunto de segmentos obtenidos se le llama *campo de direcciones* de la ecuación diferencial.

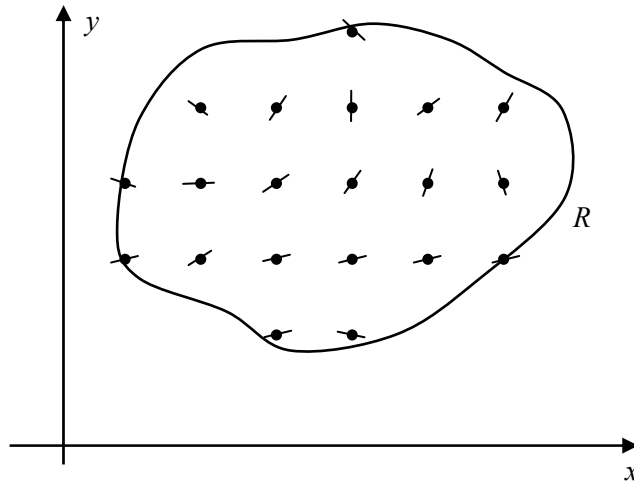


Figura 2

La mayoría de los programas de computadora que trabajan con ecuaciones diferenciales permiten trazar sus campos de direcciones para regiones rectangulares del plano xy tomando conjuntos de puntos distribuidos en forma regular.

Ejemplo 3

Trace el campo de direcciones de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = x^2 - y^2$ en la región rectangular definida por $-2 \leq x \leq 2$; $-2 \leq y \leq 2$

Solución:

En la figura 3 se muestra el campo de direcciones que ofrece un asistente matemático en la región definida por el rectángulo $-2 \leq x \leq 2$; $-2 \leq y \leq 2$, tomando 20 sub intervalos en ambas direcciones.

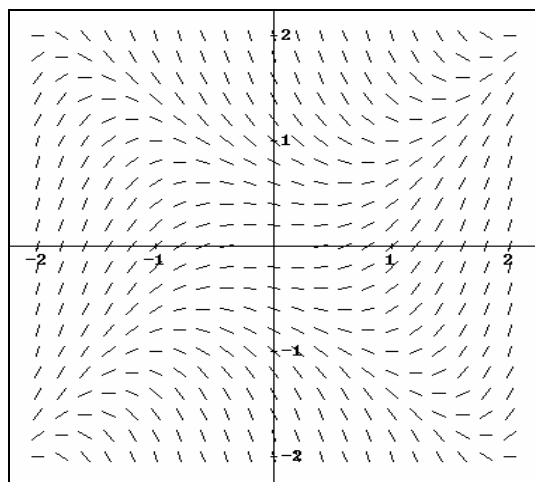


Figura 3

El campo de direcciones brinda una idea cualitativa muy abarcadora acerca de cómo se comportarán las soluciones de una ecuación diferencial y su importancia teórica y práctica no puede ser mayor. Si $y = y(x)$ es una solución particular de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

entonces la gráfica de la función tendrá en cada punto (x, y) del plano una pendiente dada por $f(x, y)$; esto significa que, cuando la curva pase por un punto del campo de direcciones, lo hará en la dirección del segmento que corresponde a ese punto.

En la figura 4 se muestran algunas soluciones particulares de la ecuación (ejemplo 3):

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - y^2$$

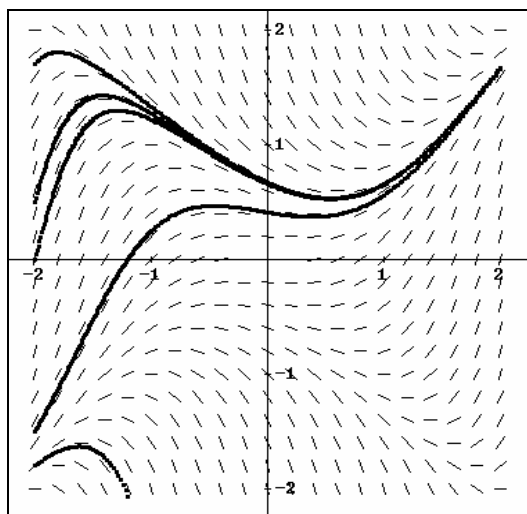


Figura 4

superpuestas a su campo de direcciones. El campo de direcciones se construye con gran facilidad y una simple observación del mismo da una idea acerca del comportamiento de las soluciones de la ecuación diferencial, tales como los intervalos en que crecen y decrecen, la ubicación aproximada de sus puntos de extremos, la existencia de asíntotas e incluso, la estabilidad de la solución.

Ejemplo 4

La ecuación

$$\frac{dy}{dx} = 2x^2 + y^2$$

no puede ser resuelta analíticamente. Trace su campo de direcciones en la región

$R = \{(x, y): -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$ y analice el comportamiento que poseen sus soluciones dentro de esa región.

Solución:

El campo de direcciones se muestra en la figura 5 y del mismo puede concluirse que:

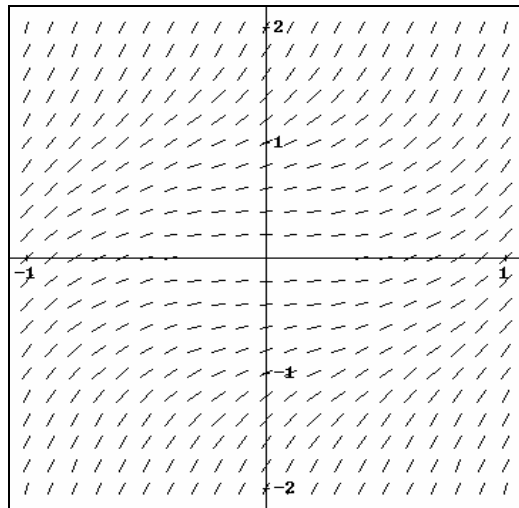


Figura 5

- La pendiente del campo de direcciones es positiva en todos los puntos, lo cual significa que todas las soluciones son funciones crecientes.
- En el origen el campo de direcciones es horizontal; en los demás puntos la pendiente es mayor a medida que aumenta la distancia al origen.
- Las soluciones que pasan cerca del origen tienen un punto de inflexión cuya tangente es casi horizontal; las soluciones que pasan más lejos del origen deben poseer una forma de S invertida con su punto de inflexión muy inclinado.
- Es obvio que ninguna solución de esta ecuación diferencial puede poseer puntos de extremo ni mas de un punto de inflexión.
- Es también bastante clara la ausencia de asíntotas de cualquier tipo.

En la figura 6 se han trazado sobre el campo de direcciones algunas soluciones verdaderas calculadas por métodos numéricos que se estudiarán más adelante, de modo que pueda verificar lo acertado del análisis cualitativo realizado.

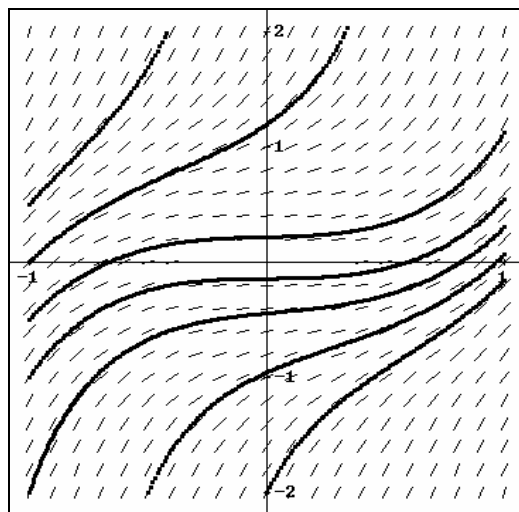


Figura 6

Isoclinas

En las ecuaciones diferenciales de primer orden tienen especial interés unas ciertas curvas llamadas *isoclinas* (igual inclinación) y que tienen la propiedad de que, en cada punto de una de estas curvas, el campo de direcciones posee la misma pendiente. Si la ecuación diferencial es

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

las isoclinas tienen ecuaciones del tipo $f(x, y) = k$.

La determinación de algunas isoclinas importantes puede ser una fuente de información valiosa en el análisis cualitativo de una ecuación diferencial.

Ejemplo 5

Analice cualitativamente la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = x + y$$

teniendo en cuenta su campo de direcciones en la región $R = \{(x, y): -4 \leq x \leq 4, -4 \leq y \leq 4\}$ y algunas isoclinas importantes.

Solución:

El campo de direcciones en la región deseada, se muestra en la figura 7

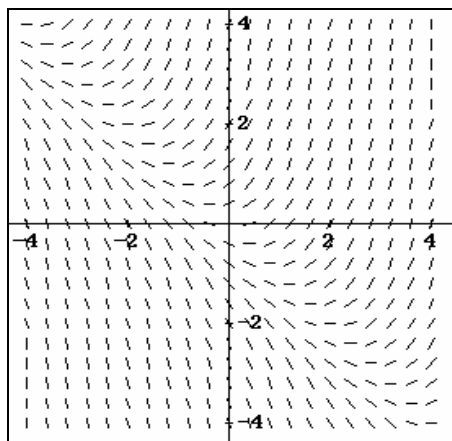


Figura 7

Las isoclinas son de la forma $x + y = k$, es decir, rectas con pendiente -1 . De particular interés es la isoclina que corresponde a $k = 0$:

$$x + y = 0$$

que contiene a los puntos estacionarios de las soluciones (puntos de tangente horizontal). La recta divide al plano en dos regiones:

$$R_1 = \{(x, y): x + y > 0\} \quad \text{y} \quad R_2 = \{(x, y): x + y < 0\}$$

En R_1 las soluciones son crecientes y en R_2 todas son decrecientes. De ahí resulta que todas las soluciones que cruzan la recta $x + y = 0$ poseen un punto de mínimo sobre ella (vea la figura 8)

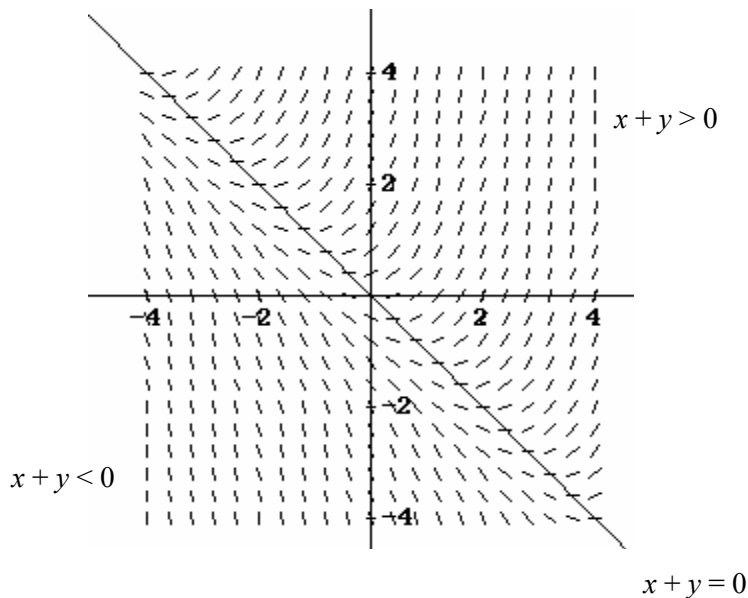


Figura 8

La isoclina que corresponde a $k = -1$ es sumamente interesante. Su ecuación es $x + y = -1$. Su pendiente es -1 , como en las demás isoclinas, pero en esta recta (figura 9) su pendiente en

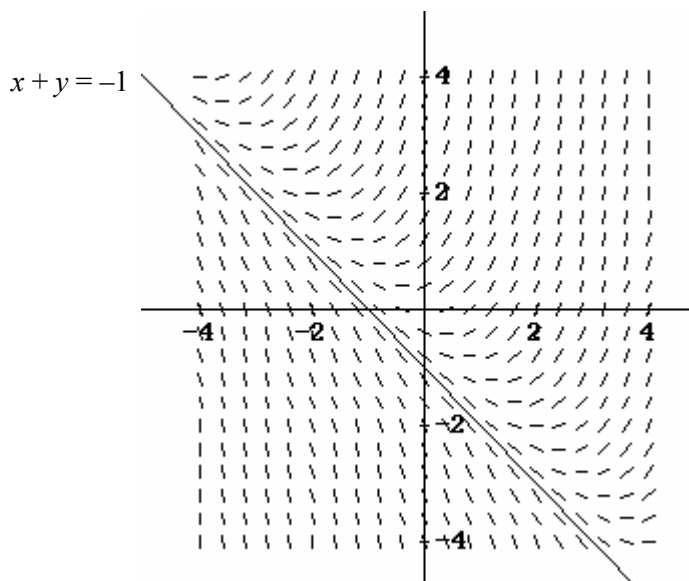


Figura 9

cada punto coincide con la del campo de direcciones. Nótese que esta recta es una solución de la ecuación diferencial porque ella es tangente al campo de direcciones en cada uno de sus puntos; es

la única isoclina que también es solución de la ecuación diferencial. Si usted analiza con cuidado la figura 9, verá que ninguna solución puede atravesar esta recta, la cual es una asíntota oblicua para todas las demás soluciones de la ecuación. Las soluciones son como se muestran en la figura 10. Nótese que si se dan condiciones iniciales (x_0, y_0) próximas a la recta $x + y = -1$ variaciones mínimas de x_0 ó y_0 causarán un importante cambio en el comportamiento de la solución para otros valores de x . Este fenómeno se llama inestabilidad y será objeto de estudio a continuación.

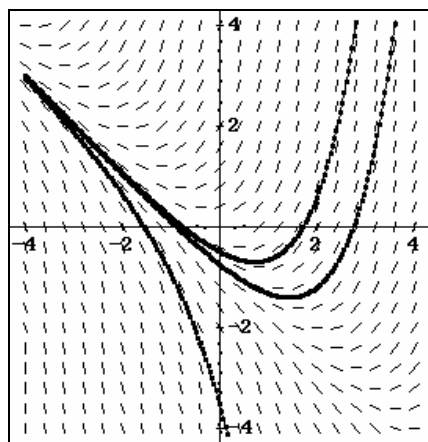


Figura 10

La estabilidad de las ecuaciones diferenciales

Recuérdese que en el primer capítulo fue caracterizado un problema inestable como aquel en el cual, pequeñas variaciones en los datos provocan grandes cambios en la respuesta. Es muy importante conocer si el problema que se va a resolver es estable o inestable pues de ello depende qué tan grandes son los errores que pueden permitirse en los datos iniciales o en el transcurso de la solución. En el campo de las ecuaciones diferenciales, se considerará que el problema de Cauchy:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0$$

es inestable si pequeños cambios en y_0 producen grandes cambios en la solución de la ecuación para valores de x alejados de x_0 . Este concepto puede precisarse más, pero para el objetivo que aquí se persigue, es suficiente con esta idea general.

Una ecuación diferencial será inestable en una cierta región del plano xy si sus soluciones presentan un comportamiento divergente a medida que x crece, como en la figura 11 a, mientras que será estable cuando sus soluciones tienden a agruparse a medida que crece x como en la figura 11 b.

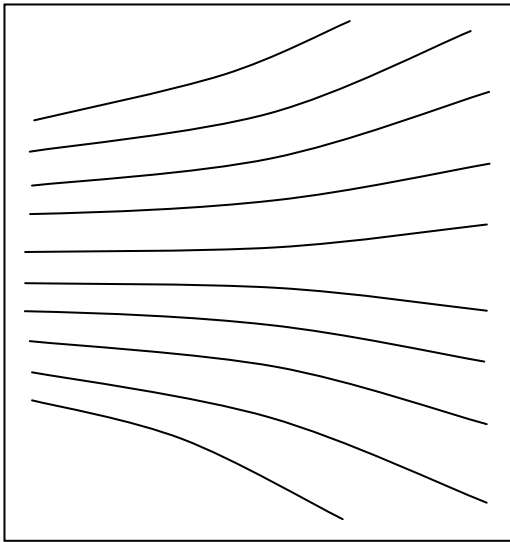


Figura 11 a

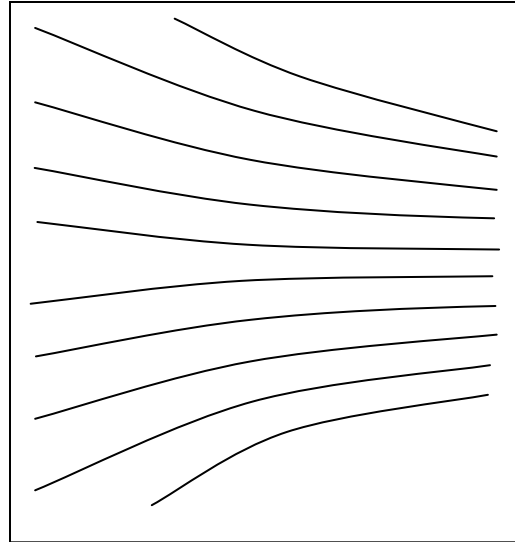


Figura 11 b

Ejemplo 6

Analice la estabilidad de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = x + y$

Solución:

Observe la figura 10. Las curvas solución poseen un patrón divergente en cualquier región del plano xy . Se trata de un problema inestable para cualquier condición inicial que se imponga. Sin embargo, es obvio que si (x_0, y_0) está próximo a la recta $x + y = -1$, el problema será más inestable.

Ejemplo 7

Analice la estabilidad de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = x^2 - y^2$

Solución:

En la figura 4 se mostró el campo de direcciones en la región $R = \{(x, y): -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}$ y las gráficas de varias soluciones. Resulta obvio que, de acuerdo con las condiciones iniciales que se tome, la ecuación diferencial tendrá un comportamiento estable o inestable. Mirando con cuidado el campo de direcciones se podrá apreciar que en la zona donde $y > 0$ las curvas tienden a unirse, mientras que donde $y < 0$ estas tienden a separarse; sin embargo, puede darse el caso que soluciones que inicialmente divergían, al entrar en la zona $y > 0$ converjan rápidamente. ■

La convergencia o divergencia de las soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

y, por tanto, su estabilidad o inestabilidad, dependen de la forma en que varía $f(x, y)$ en la región considerada del plano xy . Si, para una x fija, $f(x, y)$ aumenta con y , ello significa que en la dirección

vertical el campo de direcciones aumenta su pendiente al crecer y , lo cual indica que las soluciones divergen en esa región (observe la figura 12 a); en este caso será positiva la derivada parcial de f respecto a y . Por el contrario, si esa derivada parcial es negativa, la pendiente del campo de direcciones decrece cuando y aumenta, y eso corresponde con una ecuación diferencial estable, con curvas convergentes, como se aprecia en la figura 12 b.

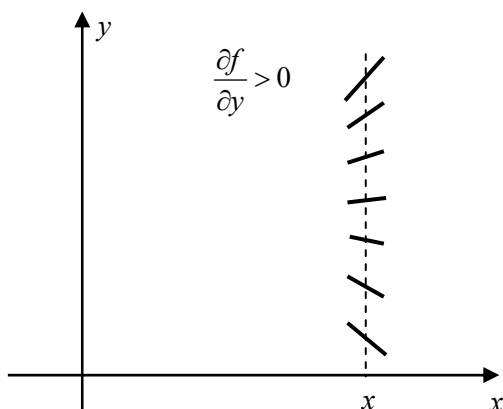


Figura 12 a

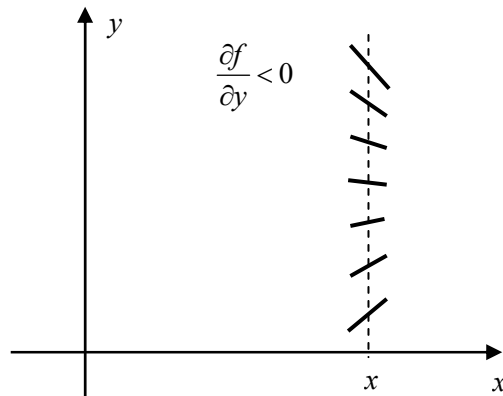


Figura 12 b

El análisis es bastante sencillo cuando la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ mantiene un solo signo en toda la región del plano xy donde puede desarrollarse la solución, pero el asunto se complica cuando dicha derivada posee diferentes signos en la región de interés.

Un ejemplo sumamente importante para el futuro, es el que se realiza a continuación.

Ejemplo 8

Analice la estabilidad de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = Ay$$

de acuerdo con el signo de la constante A .

Solución:

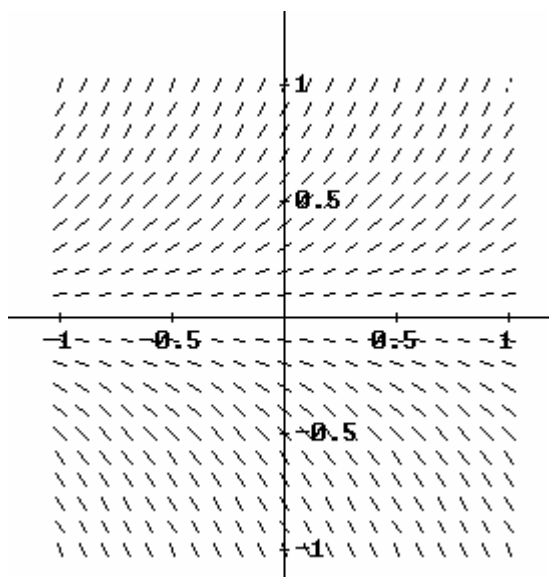
En este ejemplo $f(x, y) = Ay$, así que $\frac{\partial f}{\partial y} = A$ en todo el plano xy . Puede entonces afirmarse que:

Si $A < 0$ la ecuación diferencial es estable

Si $A > 0$ la ecuación diferencial es inestable

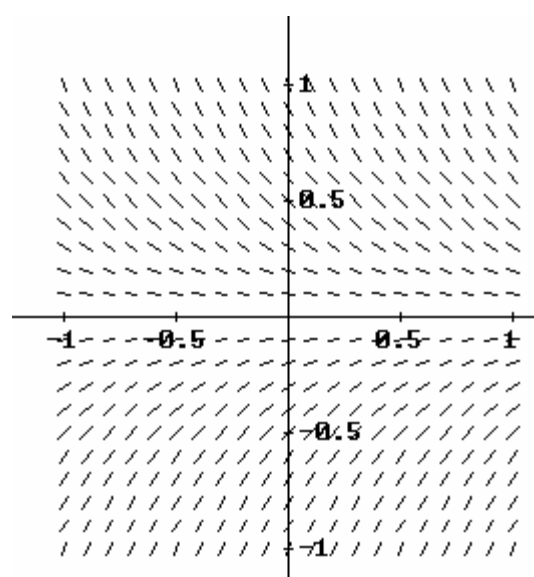
En la figura 13 se muestra el campo de direcciones de dos ecuaciones diferenciales de este tipo, una con $A = 2$ y otra con $A = -2$, en ambos casos en la región:

$$R = \{(x, y): -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$$



$$\frac{dy}{dx} = 2y$$

Figura 13 a



$$\frac{dy}{dx} = -2y$$

Figura 13 b

Ecuación estable modelo

La ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = -Ay$ con $A > 0$ se llamará *ecuación estable modelo*.

La ecuación diferencial modelo es sumamente sencilla, posee solución general en forma analítica:

$$y = Ce^{-Ax}$$

y servirá en lo adelante para analizar el comportamiento de los diferentes métodos numéricos que serán desarrollados frente a una ecuación diferencial estable.

Ejercicios

Expresa las siguientes ecuaciones diferenciales en la forma $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ o diga si no es posible.

$$1. \quad \frac{dy}{x+y} + \frac{dx}{x-y} = 0$$

$$2. \quad x \frac{dy}{dx} + \frac{3}{x} y = \cos x$$

$$3. \quad \sqrt{\frac{dy}{dx}} + y = 3x + 2$$

$$4. \quad \frac{dy}{dx} + \frac{dx}{dy} = x$$

En las siguientes ecuaciones diferenciales construya el campo de direcciones, utilizando un programa adecuado, en la región que se indica, haga un bosquejo de cómo serán las soluciones dentro de esa región y dibuje algunas isoclinas.

$$5. \quad \frac{dy}{dx} = -xy \quad R = \{(x, y): -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$$

$$6. \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad R = \{(x, y): -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$$

$$7. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x+y} \quad R = \{(x, y): -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$$

$$8. \quad \frac{dy}{dx} = -2x \quad R = \{(x, y): -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$$

$$9. \quad \frac{dy}{dx} = x - y \quad R = \{(x, y): -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}$$

$$10. \quad \frac{dy}{dx} = y^2 - 1 \quad R = \{(x, y): -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}$$

7.3 Métodos de paso simple

Dos tipos de métodos

Los métodos numéricos para resolver el problema de Cauchy:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0\end{aligned}\tag{1}$$

se basan en la idea de tomar un conjunto discreto de valores de x :

$$\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$$

casi siempre uniformemente espaciados, y hallar valores:

$$\{y_0, y_1, y_2, \dots\}$$

que se aproximen a los valores de la solución exacta de (1):

$$\{y(x_0), y(x_1), y(x_2), \dots\}$$

Los algoritmos para hallar la solución aproximada $\{y_0, y_1, y_2, \dots\}$ son siempre iterativos y pueden simbolizarse mediante una ecuación del tipo:

$$y_{n+1} = G(y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-k}) \quad n \geq k$$

En el caso más sencillo, cuando $k = 0$:

$$y_{n+1} = G(y_n) \quad n \geq 0$$

los métodos se llaman *de paso simple*, y son los que se estudia en esta sección. En la sección 7.4 se analizarán métodos *de paso múltiple*, es decir, de los tipos:

paso doble: $y_{n+1} = G(y_n, y_{n-1}) \quad n \geq 1$

paso triple: $y_{n+1} = G(y_n, y_{n-1}, y_{n-2}) \quad n \geq 2$

etcétera.

El método de Euler

El método de Euler es el más elemental de los métodos de paso simple. Como se conoce el primer elemento (x_0, y_0) de la solución, se puede determinar el campo de direcciones en ese punto: $f(x_0, y_0)$. Para hallar el segundo punto de la solución aproximada (x_1, y_1) se sigue una trayectoria rectilínea en esa dirección hasta alcanzar la abscisa x_1 (ver figura 1).

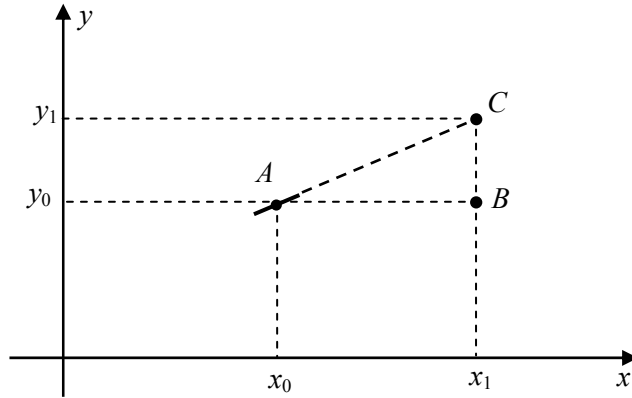


Figura 1

Como la pendiente del segmento AC es $f(x_0, y_0)$, entonces:

$$y_1 = y_0 + (x_1 - x_0)f(x_0, y_0)$$

Llamando $h = x_1 - x_0$, esta ecuación queda:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

Una vez conocido (x_1, y_1) , se aplica la misma idea para determinar (x_2, y_2) . Suponiendo en la figura 2 que $x_2 - x_1 = h$ resulta:

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

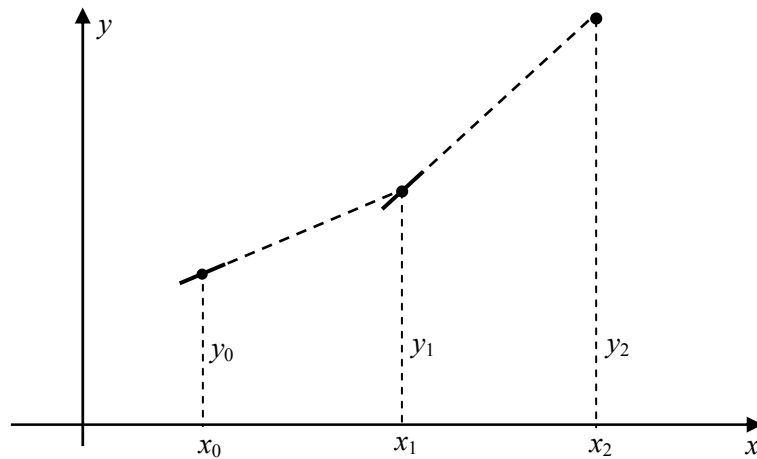


Figura 2

En general, si se toma un paso h como incremento de la variable independiente, resulta:

$$\begin{aligned} \text{Para } n = 0, 1, 2, \dots \quad x_{n+1} &= x_n + h \\ y_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n) \end{aligned} \quad (2)$$

Obsérvese que nada impide que h tome valores diferentes en cada aplicación de la fórmula (2) y que, aunque no es lo usual, su valor pueda ser negativo.

Algoritmo en pseudo código

El algoritmo que sigue obtiene la solución aproximada del problema de Cauchy

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

en un intervalo $x_0 \leq x \leq x_F$ con paso $h > 0$. Se suponen conocidos: la función $f(x, y)$, las condiciones iniciales (x_0, y_0) el valor final x_F y el paso h .

```

n := 0
do while  $x_n < x_F$ 
     $(x_n, y_n)$  es un punto de la solución aproximada
     $x_{n+1} := x_n + h$ 
     $y_{n+1} := y_n + hf(x_n, y_n)$ 
     $n := n + 1$ 
end
Terminar

```

Ejemplo 1

Resuelva el problema de Cauchy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}y \quad y(0) = 0,5$$

en el intervalo $0 \leq x \leq 3$ mediante el método de Euler con pasos $h = 0,4$; $h = 0,2$; $h = 0,1$ y $h = 0,05$. Analice cómo se comporta el error con el incremento de x y con la disminución de h , comparando las soluciones aproximadas obtenidas con la solución exacta:

$$y = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$$

Solución:

Se calculará con detalle algunos valores de la solución aproximada para $h = 0,4$:

$$x_0 = 0 \quad y_0 = 0,5$$

$$x_1 = 0,4 \quad y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = y_0 + h \frac{y_0}{2} = 0,5 + 0,4 \frac{0,5}{2} = 0,6$$

$$x_2 = 0,8 \quad y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = y_1 + h \frac{y_1}{2} = 0,6 + 0,4 \frac{0,6}{2} = 0,72$$

$$x_3 = 1,2 \quad y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = y_2 + h \frac{y_2}{2} = 0,72 + 0,4 \frac{0,72}{2} = 0,864$$

Etcétera.

En la tabla 1 se aprecia el resultado total, la solución exacta y el error para cada x_n

n	x_n	y_n	$y(x_n)$	$error(y_n)$ $= y(x_n) - y_n$
0	0,0	0,5000	0,5000	0,0000
1	0,4	0,6000	0,6107	0,0107
2	0,8	0,7200	0,7459	0,0259
3	1,2	0,8640	0,9111	0,0471
4	1,6	1,0368	1,1128	0,0760
5	2,0	1,2442	1,3591	0,1149
6	2,4	1,4930	1,6601	0,1671
7	2,8	1,7916	2,0276	0,2360
8	3,2	2,1499	2,4765	0,3266
9	3,6	2,5799	3,0248	0,4449
10	4,0	3,0959	3,6945	0,5986

Tabla 1

Nótese como el error de la solución aproximada se va incrementando a medida que la solución progresa. Como se verá más adelante, este comportamiento no es así en todos los casos y está relacionado con el hecho de que esta ecuación diferencial es inestable, ya que $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} > 0$. Una

situación similar ocurre para valores menores del paso y se obtiene el mayor error al final del intervalo $[x_0, x_F]$. En la tabla 2 se muestra la solución obtenida para varios valores de x con pasos 0,4; 0,2; 0,1 y 0,05, así como los errores correspondientes.

Nótese cómo el error para una x fija disminuye a medida que se utilizan pasos menores; es más, se observa que, al disminuir h a la mitad, el error se hace también aproximadamente la mitad. Este fenómeno es general y tendrá su explicación más adelante.

x	Solución aproximada con				Error en la solución aproximada con			
	$h = 0,4$	$h = 0,2$	$h = 0,1$	$h = 0,05$	$h = 0,4$	$h = 0,2$	$h = 0,1$	$h = 0,05$
0,0	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,8	0,7220	0,7320	0,7387	0,7423	0,0259	0,0139	0,0072	0,0036
1,6	1,0368	1,0718	1,0914	1,1019	0,0760	0,0410	0,0214	0,0109
2,4	1,4930	1,5692	1,6126	1,6357	0,0167	0,0909	0,0475	0,0244
3,2	2,1499	2,2975	2,3825	2,4283	0,3266	0,1790	0,0940	0,4820
4,0	3,0659	3,3638	3,5200	3,6048	0,5986	0,3407	0,1745	0,0897

Tabla 2

Error en el método de Euler

Considérese el problema de Cauchy

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0$$

Sea $y(x)$: la solución exacta del problema

$\{y_0, y_1, y_2, \dots, y_n\}$: la solución obtenida por el método de Euler con paso h

$e_n = \text{error}(y_n) = y(x_n) - y_n$: el error que afecta a y_n

Se supondrá que $y(x)$ posee segunda derivada continua, de modo que puede usarse el polinomio de Taylor de primer grado con resto de Lagrange, alrededor de x_n :

$$y(x) = y(x_n) + y'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2} y''(\xi)(x - x_n)^2$$

donde ξ es algún valor entre x_n y x . Evaluando para $x = x_{n+1}$ y considerando que $x_{n+1} - x_n = h$ resulta:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{1}{2} y''(c)h^2 \quad (3)$$

donde $x_n < c < x_{n+1}$

Por otra parte, según la fórmula (2) de Euler:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

y, restando de (3):

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = [y(x_n) - y_n] + h[y'(x_n) - f(x_n, y_n)] + \frac{1}{2} y''(c)h^2 \quad (4)$$

Ahora bien, $e_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$. Además, $y(x_n)$ es la solución exacta de la ecuación diferencial, luego:

$$y'(x_n) = f[x_n, y(x_n)]$$

Sustituyendo en la ecuación (4):

$$e_{n+1} = e_n + h[f(x_n, y(x_n)) - f(x_n, y_n)] + \frac{1}{2} y''(c)h^2$$

Utilizando el teorema del valor medio del Cálculo Diferencial, la diferencia entre corchetes puede escribirse:

$$f(x_n, y(x_n)) - f(x_n, y_n) = f_y(x_n, \bar{y})[y(x_n) - y_n]$$

donde f_y : representa la derivada parcial de f respecto a y , que se supone continua
 $\bar{y}$: es un número entre $y(x_n)$ y y_n

Ahora queda:

$$e_{n+1} = e_n + hf_y(x_n, \bar{y})[y(x_n) - y_n] + \frac{1}{2} y''(c)h^2$$

es decir:

$$e_{n+1} = e_n [1 + hf_y(x_n, \bar{y})] + \frac{1}{2} y''(c)h^2 \quad (5)$$

Esta fórmula es muy instructiva pues explica la forma en que el error de y_n da lugar al error de y_{n+1} . Primeramente observe que, aun en el caso en que y_n fuera exacto ($e_n = 0$), el error e_{n+1} tomaría el valor

$$\frac{1}{2} y''(c)h^2$$

Así que este término es el error nuevo que se incorpora en el paso $n + 1$; por esta razón suele llamarse *error local*:

$$\text{Error local: } \frac{1}{2} y''(c)h^2$$

El otro sumando de la fórmula (5) se conoce como error propagado y representa la parte del error e_{n+1} que se debe al error que ya existía en el paso anterior:

$$\text{Error propagado: } [1 + hf_y(x_n, \bar{y})]e_n$$

Como usualmente h es pequeño, puede suponerse que

$$|hf_y(x_n, \bar{y})| < 1$$

Note como el signo de $f_y(x, y)$ es fundamental en el comportamiento del error propagado, ya que:

$$f_y(x_n, \bar{y}) > 0 \Rightarrow 1 + hf_y(x_n, \bar{y}) > 1$$

$$f_y(x_n, \bar{y}) < 0 \Rightarrow 0 < 1 + hf_y(x_n, \bar{y}) < 1$$

En el primer caso, el error propagado es mayor que e_n (en valor absoluto) y es de esperar que el error crezca rápidamente a medida que la solución avanza. En el segundo caso, el error propagado es menor (en valor absoluto) que e_n y, por lo general, sucederá que el error total se mantiene reducido e incluso puede tender hacia cero cuando la solución avanza.

La ecuación (5) es una ecuación en diferencias finitas (también, ecuación recursiva) de primer orden, que puede ser resuelta, de modo que su variable e_n quede como una función explícita de n . Los detalles de la obtención de la solución se omiten. Resulta:

$$|e_n| \leq \frac{hY}{2F} [e^{(x_n - x_0)F} - 1] \quad (6)$$

donde F : Cota superior de $|f_y(x, y)|$ en toda la región del plano xy donde se desarrolla el problema

Y : Cota superior de $y''(x)$ para $x_0 \leq x \leq x_n$

La fórmula (6) ofrece una cota del error total del método de Euler, pero su uso práctico es muy limitado por la presencia de los parámetros F e Y que usualmente no se conocen; lo más importante que aporta es el hecho de que

$$|e_n| \leq kh \quad (7)$$

donde $k = \frac{Y}{2F} \left[e^{(x_n - x_0)F} - 1 \right]$

De la fórmula (7) se llega a dos conclusiones de gran importancia teórica y práctica:

1. Para una x_n fija, si se toman valores de h cada vez menores, se cumple que $\lim_{h \rightarrow 0} e_n = 0$
2. El error total del método de Euler depende de h de tal modo que esta dependencia no sobrepasa una cierta función lineal. Simbólicamente, $e_n = O(h)$, lo cual se expresa con la oración: El método de Euler es de orden uno.

Nótese ahora por qué en el ejemplo anterior el error aumenta rápidamente a medida que x se aleja de x_0 ; es que $f_y(x, y) = \frac{1}{2} > 0$ para todo el plano xy . Por otra parte, al ser el método de Euler de primer orden, el error total es proporcional (aproximadamente) a h , y esto explica por que, para cada x fijo, cuando h se reduce a la mitad, el error también lo hace (aproximadamente).

Estimación del error por doble cálculo

Cuando se conoce el orden del error de un método aproximado, se puede hacer un estimado bastante bueno del error cometido hallando la solución dos veces. Ya esta técnica fue empleada en el capítulo 5 para estimar el error en la integración numérica. Salvo algunas notaciones que aquí son distintas, el análisis que sigue es completamente similar al que se realizó allí.

Sea
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0$$

la ecuación diferencial cuya solución se busca. Sea:

y_h :	solución aproximada obtenida para un cierto x usando paso h
y_{2h} :	solución aproximada obtenida para el mismo x usando paso $2h$
e_h :	error total de y_h
e_{2h} :	error total de y_{2h}

Si la solución aproximada se ha obtenido con un método numérico de orden p (por el momento, como el único método estudiado es el de Euler, puede suponerse que $p = 1$; más adelante p tomará otros valores), resulta que:

$$e_n = O(h^p)$$

Considérese aproximadamente: $e_n = kh^p$

(lo cual sólo es exacto en sentido asintótico, es decir, para h tendiendo hacia cero; en otras palabras, e_h y kh^p son infinitésimos equivalentes)

Entonces:
$$e_{2h} = k(2h)^p = 2^p kh^p = 2^p e_h \quad (8)$$

Por otra parte:
$$y_h + e_h = y_{2h} + e_{2h}$$

pues ambos miembros de esta igualdad son el valor de la solución $y(x)$. Teniendo en cuenta (8):

$$y_h + e_h = y_{2h} + 2^p e_h$$

y, despejando e_h

$$e_h = \frac{y_h - y_{2h}}{2^p - 1} \quad (9)$$

Como en el método de Euler el valor de p es 1, resulta:

Para el método de Euler

$$e_h \approx y_h - y_{2h} \quad (10)$$

Ejemplo 2

Resuelva el problema

$$\frac{dy}{dx} = x - y \quad y(1) = 3$$

en el intervalo $1 \leq x \leq 5$ mediante el método de Euler con dos cifras decimales exactas.

Solución:

Nótese que por ser $f_y(x, y) = -1$ se trata de una ecuación diferencial estable y es de esperar que el error no se propague demasiado cuando x se aleje de x_0 . Comenzando con $h = 0,1$, la tabla 3 muestra la solución que se obtiene con diferentes pasos para los valores de x : 1, 2, 3, 4 y 5, así como un estimado del error basado en la fórmula (10). Naturalmente, para la solución obtenida con $h = 0,1$ no se cuenta con la estimación del error.

$h = 0,1$		$h = 0,05$		$h = 0,025$		$h = 0,0125$		$h = 0,00625$	
x	y	y	Error	y	Error	y	Error	y	Error
1	3,0000	3,0000	0,0000	3,0000	0,0000	3,0000	0,0000	3,0000	0,0000
2	2,0460	2,0755	0,0295	2,0897	0,0142	2,0967	0,0070	2,1002	0,0035
3	2,3647	2,3855	0,0208	2,3958	0,0103	2,4009	0,0051	2,4035	0,0026
4	3,1272	3,1382	0,0110	3,1438	0,0056	3,1466	0,0028	3,1480	0,0014
5	4,0443	4,0495	0,0052	4,0522	0,0027	4,0536	0,0014	4,0543	0,0007

Tabla 3

Nótese como el error, después de un crecimiento local al inicio, disminuye a medida que x se aleja de x_0 . Este comportamiento se explica por el valor negativo de $f_y(x, y)$. También se observa en la tabla cómo el método de Euler converge linealmente a la solución exacta a medida que h tiende hacia cero. En la figura 3 se muestra el campo de direcciones y la gráfica de la solución en el intervalo $1 \leq x \leq 5$ obtenida con $h = 0,00625$.

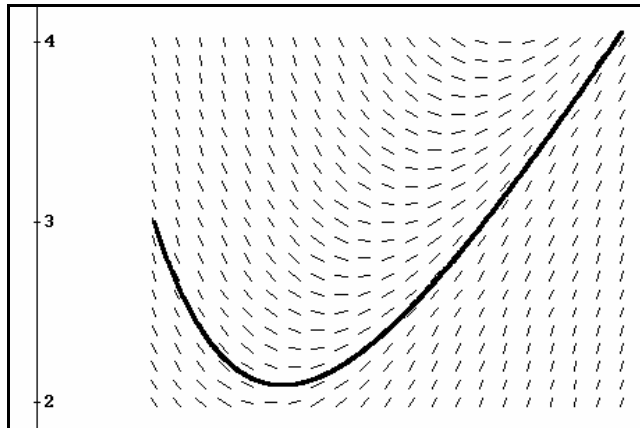


Figura 3

La solución analítica de esta ecuación diferencial puede hallarse sin mucha dificultad (es lineal de primer orden con coeficientes constantes):

$$y(x) = x - 1 + 3e^{1-x}$$

En la tabla 4 se muestran los valores de la solución exacta y de la solución hallada por el método de Euler, así como el verdadero error y el que se estimó por doble cálculo. Aprecie la similitud de ambos.

x	Solución exacta	Solución de Euler con $h = 0,00625$	Error exacto	Error estimado
1	3,000000	3,0000	0,000000	0,0000
2	2,103638	2,1002	0,003506	0,0035
3	2,406006	2,4035	0,002506	0,0026
4	3,149361	3,1480	0,001361	0,0014
5	4,054947	4,0543	0,000647	0,0007

Tabla 4

Estabilidad del método de Euler

El método de Euler, al igual que los demás métodos que se estudiarán en este capítulo, permite encontrar una solución aproximada del problema de Cauchy:

$$\text{Hallar } y(x) \text{ tal que: } \frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0$$

resolviendo otro problema, en este caso:

$$\text{Hallar } \{y_0, y_1, y_2, \dots\} \text{ tal que } y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n); \quad x_{n+1} = x_n + h$$

donde y_0 es conocido.

Ya en las páginas anteriores se vio que la solución del segundo problema converge hacia la solución del primero cuando h tiende hacia cero. Esto no significa, sin embargo, que sean problemas idénticos, así que tiene sentido analizar la estabilidad del segundo problema.

Es importante comenzar dejando claro un aspecto. Como la solución del método de Euler converge hacia la solución de la ecuación diferencial, cuando ésta es inestable, el método de Euler también tiene que serlo. Lo que interesa investigar es si, para una ecuación diferencial estable, pudiera suceder que el método de Euler fuera inestable; solo en ese caso se habla de inestabilidad de un método aproximado. Más formalmente:

Definición:

Se dice que un método aproximado para resolver el problema de Cauchy es inestable si presenta inestabilidad para una ecuación diferencial estable.

Para simplificar, el análisis se limitará a una ecuación diferencial estable modelo:

$$\frac{dy}{dx} = -Ay \quad A > 0$$

y se estudiará si, para esta ecuación diferencial, el método de Euler se comporta en forma estable. Para dicha ecuación, la solución de Euler será:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h(-Ay_n)$$

$$y_{n+1} = y_n(1 - hA)$$

Esta es una ecuación en diferencias de primer orden cuya solución general es

$$y_n = C(1 - hA)^n \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

lo cual se verifica muy fácilmente, por sustitución.

Como y_0 es conocido: $y_0 = C(1 - hA)^0 = C$

así que la solución que brinda el método de Euler será:

$$y_n = y_0(1 - hA)^n \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Para analizar si este es un problema estable, considérese un pequeño cambio ε introducido en y_0 . El cambio que tiene lugar en y_n sería:

$$\begin{aligned} \Delta y_n &= (y_0 + \varepsilon)(1 - hA)^n - y_0(1 - hA)^n \\ &= \varepsilon(1 - hA)^n \end{aligned}$$

Si el producto hA es pequeño, de modo que

$$-1 < 1 - hA < 1$$

entonces, a medida que la solución avanza (n crece), el factor $(1 - hA)^n$ tiende hacia cero y por tanto, $\Delta y_n \rightarrow 0$, lo cual significa que el cambio ε en y_0 no provoca grandes variaciones en y_n .

Ahora bien, si hA es tal que $1 - hA < -1$

para lo cual basta con que $hA > 2$

entonces $|(1 - hA)^n|$ tiende hacia infinito al crecer n , es decir, que aun un pequeño cambio ε , provoca un Δy_n que crece en valor absoluto sin límite.

La conclusión es clara:

El método de Euler es estable si se toma un paso h tal que $hA < 2$. En casos así, en que la estabilidad se produce bajo ciertos requisitos, se dice que el método es condicionalmente estable.

La condición $hA < 2$ no es una exigencia importante porque, como ya se ha visto, el método de Euler requiere normalmente utilizar valores muy pequeños de h para lograr una aproximación aceptable a la solución de la ecuación diferencial.

Los métodos de Taylor

Considérese de nuevo el problema de Cauchy:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0$$

y que para $x = x_n$ se conoce una buena aproximación y_n de la solución exacta $y(x_n)$. Se desea buscar una aproximación y_{n+1} para $y(x_{n+1})$ mejor que la que ofrece la fórmula de Euler:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Esta fórmula consiste en hallar y_{n+1} aproximando la solución $y(x)$ mediante una recta tangente en (x_n, y_n) (figura 4)

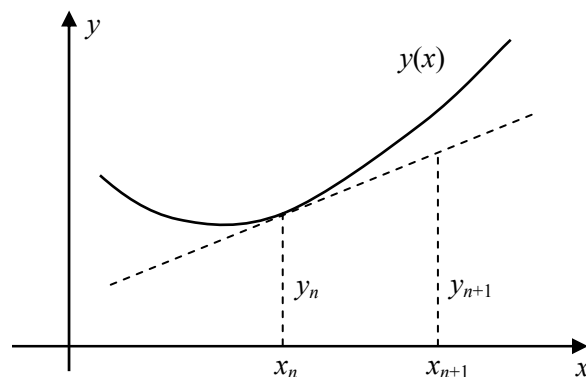


Figura 4

Pero existe la posibilidad de aproximar a $y(x)$ no mediante una línea recta sino mediante un polinomio de grado mayor. Para ello, se supone que la solución $y(x)$ posee una serie de Taylor alrededor de x_n , o sea, que:

$$y(x) = y(x_n) + y'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2} y''(x_n)(x - x_n)^2 + \dots \quad (11)$$

Al tomar de esta serie solo dos términos, se obtiene:

$$y(x) \approx y(x_n) + y'(x_n)(x - x_n)$$

de donde:

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + y'(x_n)h$$

que da lugar a la fórmula de Euler:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

con error local $O(h^2)$.

Si se toman más de dos términos en la serie (11), se pueden obtener fórmulas aproximadas de mayor calidad que la de Euler. A los métodos así obtenidos se les conoce como métodos de Taylor.

A modo de ejemplo, se verá el método de Taylor de orden 2, que surge de tomar tres términos de la serie (11):

$$y(x) \approx y(x_n) + y'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2} y''(x_n)(x - x_n)^2$$

$$\text{de donde:} \quad y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{1}{2} y''(x_n)h^2 \quad (12)$$

Para obtener de aquí una fórmula recursiva que permita hallar y_{n+1} a partir de y_n hay que procurar una expresión para aproximar $y''(x_n)$, lo cual es un poco más complicado que la aproximación:

$$y'(x_n) = f(x_n, y(x_n)) \approx f(x_n, y_n) \quad (13)$$

Como

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

aplicando la regla de la cadena resulta:

$$y''(x) = \frac{d}{dx}(y'(x)) = f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x))y'(x)$$

y de aquí se obtiene la aproximación:

$$y''(x_n) \approx f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n)f(x_n, y_n) \quad (14)$$

Teniendo en cuenta (13) y (14), la aproximación (12) da lugar a la fórmula:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{1}{2} h^2 [f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n)f(x_n, y_n)] \quad (15)$$

que es la fórmula del método de Taylor de orden 2 con error local $O(h^3)$.

Similarmente se pueden obtener otras fórmulas de mayor orden pero, obviamente, la necesidad de aproximar derivadas de mayor orden, complica considerablemente las expresiones y, lo que es peor, introduce la necesidad de calcular derivadas parciales de la función $f(x, y)$.

Ejemplo 3

Halle las fórmulas necesarias para resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \quad y(x_0) = y_0$$

mediante el método de Taylor a) de orden dos: b) de orden tres.

Solución:

En lugar de utilizar la expresión (15), es preferible proceder directamente de la serie (11) y plantear:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_n) + \frac{1}{6}h^3 y'''(x_n) + \dots$$

donde $y'(x) = f(x, y) = x^2 + y^2$

Derivando respecto a x y teniendo presente que y depende de x :

$$y''(x) = 2x + 2y \frac{dy}{dx} = 2x + 2y(x^2 + y^2)$$

$$y''(x) = 2x + 2x^2 y + 2y^3$$

Derivando de nuevo respecto a x :

$$y'''(x) = 2 + 4xy + 2x^2 \frac{dy}{dx} + 6y^2 \frac{dy}{dx}$$

$$y'''(x) = 2 + 4xy + 2x^2(x^2 + y^2) + 6y^2(x^2 + y^2)$$

$$y'''(x) = 2 + 4xy + 2x^4 + 8x^2 y^2 + 6y^4$$

Así que las fórmulas correspondientes son:

Taylor orden dos:

$$y_{n+1} = y_n + h(x^2 + y^2)_n + \frac{1}{2}h^2(2x + 2x^2 y + 2y^3)_n$$

Taylor orden tres:

$$y_{n+1} = y_n + h(x^2 + y^2)_n + \frac{1}{2}h^2(2x + 2x^2y + 2y^3)_n + \frac{1}{6}h^3(2 + 4xy + 2x^4 + 8x^2y^2 + 6y^4)_n$$

donde la notación $()_n$ indica evaluar la expresión entre paréntesis para $x = x_n$ e $y = y_n$.

Error en el método de Taylor

Como las fórmulas de los diferentes métodos de Taylor se basan en truncar la serie de Taylor de $y(x)$, es claro que el error local de la fórmula de orden p es de orden h^{p+1} . Puede probarse que, si $f(x, y)$ tiene el número necesario de derivadas, el error total será de orden h^p . O sea:

El método de Taylor de orden p tiene: Error local $O(h^{p+1})$

Error total $O(h^p)$

Si se tiene en cuenta que el método de Euler posee error total $O(h)$, se comprenderá que los métodos de Taylor con $p > 1$ tienen una convergencia mucho más rápida hacia la solución de la ecuación diferencial. Sin embargo, la necesidad de calcular derivadas parciales es una gran desventaja, dada la complejidad de automatizar este proceso de derivación.

Para resolver este problema, a principios del siglo XX, dos matemáticos alemanes lograron obtener fórmulas mediante las cuales el problema de hallar derivadas parciales de $f(x, y)$ se transforma en el de evaluar la función $f(x, y)$ en varios puntos. De este modo obtuvieron métodos completamente equivalentes a los de Taylor pero sin el requerimiento de calcular derivadas. Estas fórmulas llevan los nombres de sus creadores: Carl Runge y Wilhelm Kutta. A continuación se hará la deducción para el caso de segundo orden, que es el más simple, y posteriormente se verán las fórmulas del método de orden cuatro que es uno de los más populares.

Método de Runge - Kutta de orden dos

El método de Taylor se basa en la aplicación reiterada de la ecuación (15):

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{1}{2}h^2[f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n)f(x_n, y_n)]$$

la cual puede ser escrita:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{1}{2}h[hf_x(x_n, y_n) + hf(x_n, y_n)f_y(x_n, y_n)]$$

Llamando: $K_1 = hf(x_n, y_n)$.

la ecuación queda:

$$y_{n+1} = y_n + K_1 + \frac{1}{2}h[hf_x(x_n, y_n) + K_1f_y(x_n, y_n)] \quad (16)$$

Si se supone que $f(x, y)$ es una función diferenciable, su diferencial viene dado por:

$$df(x, y) = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y$$

de modo que el término entre corchetes de la ecuación (16) es el diferencial de f en (x_n, y_n) para

$$\Delta x = h \quad \text{y} \quad \Delta y = K_1$$

Para valores pequeños de h (y, por tanto, de K_1) este diferencial puede aproximarse mediante el incremento:

$$\Delta f(x_n, y_n) = f(x_n + h, y_n + K_1) - f(x_n, y_n)$$

con lo cual la ecuación (16) queda:

$$y_{n+1} = y_n + K_1 + \frac{1}{2}h[f(x_n + h, y_n + K_1) - f(x_n, y_n)] \quad (17)$$

La fórmula (17) es equivalente a la (16) en cuanto a exactitud, pero posee la enorme ventaja de no utilizar las derivadas de f . En su lugar, será necesario evaluar f dos veces: en (x_n, y_n) y en $(x_n + h, y_n + K_1)$. Para simplificar la notación, se suele llamar:

$$K_2 = hf'(x_n + h, y_n + K_1)$$

y la ecuación (17) se reduce entonces a:

$$y_{n+1} = y_n + K_1 + \frac{1}{2}[K_2 - K_1] = y_n + \frac{1}{2}[K_1 + K_2]$$

Resumiendo lo anterior, las fórmulas de Runge - Kutta de orden dos (RK2) son:

$$\text{RK2:} \quad \begin{cases} K_1 = hf(x_n, y_n) \\ K_2 = hf(x_n + h, y_n + K_1) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Interpretación geométrica de RK-2

Los términos $f(x_n, y_n)$ y $f(x_n + h, y_n + K_1)$ corresponden con las pendientes del campo de direcciones en los puntos (x_n, y_n) y $(x_n + h, y_n + K_1)$ (ver figura 5). Estas pendientes, multiplicadas por el incremento horizontal h , corresponden con incrementos verticales K_1 y K_2 . Entonces, geoméricamente, el método RK2 consiste en determinar el valor K_1 utilizando la pendiente del campo de direcciones en (x_n, y_n) . Una vez conocido el punto $(x_n + h, y_n + K_1)$, tomar en él la pendiente del campo de direcciones y determinar el valor K_2 . El promedio de K_1 y K_2 permite calcular y_{n+1} al agregarlo a y_n . Obsérvese que promediar K_1 y K_2 es equivalente a haber promediado las pendientes del campo de direcciones en (x_n, y_n) y $(x_n + h, y_n + K_1)$ y calcular

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot (\text{pendiente promedio})$$

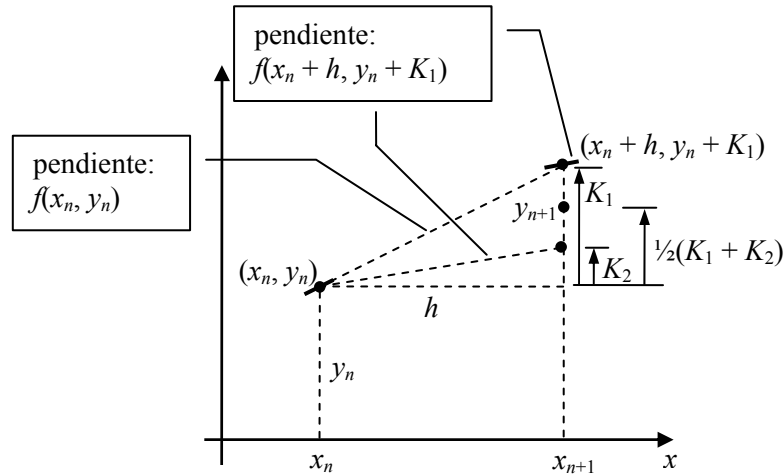


Figura 5

Algoritmo en pseudo código para RK2

El algoritmo que sigue obtiene la solución aproximada del problema de Cauchy

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

en un intervalo $x_0 \leq x \leq x_F$ con paso $h > 0$. Se suponen conocidos: la función $f(x, y)$, las condiciones iniciales (x_0, y_0) el valor final x_F y el paso h .

```

n := 0
do while  $x_n < x_F$ 
     $(x_n, y_n)$  es un punto de la solución aproximada
     $K_1 := hf(x_n, y_n)$ 
     $K_2 := hf(x_n + h, y_n + K_1)$ 
     $y_{n+1} := y_n + \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$ 
     $x_{n+1} := x_n + h$ 
     $n := n + 1$ 
end
Terminar
    
```

Ejemplo 4

Resuelva el problema de Cauchy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}y \quad y(0) = 0,5$$

en el intervalo $0 \leq x \leq 4$ mediante RK2 con pasos $h = 0,4; 0,2; 0,1; 0,05$. Analice cómo se comporta el error con la variación de x y con la disminución del paso h , comparando la solución obtenida con la solución exacta

$$y = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}$$

Solución:

Este mismo ejemplo fue resuelto por el método de Euler al principio de esta sección (Ejemplo 1). Resulta instructivo notar la diferencia en cuanto a los resultados en la solución por ambos métodos. Para el caso $h = 0,4$, se realizarán en detalle los primeros pasos de la solución.

$$x_0 = 0; \quad y_0 = 0,5$$

$$K_1 = hf(x_0, y_0) = 0,4 f(0; 0,5) = 0,4 \cdot \frac{1}{2}(0,5) = 0,1$$

$$K_2 = hf(x_0 + h, y_0 + K_1) = 0,4 f(0,4; 0,6) = 0,4 \cdot \frac{1}{2}(0,6) = 0,12$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) = 0,5 + \frac{1}{2}(0,1 + 0,12) = 0,61$$

$$x_1 = 0,4; \quad y_1 = 0,61$$

$$K_1 = hf(x_1, y_1) = 0,4 f(0,4; 0,61) = 0,4 \cdot \frac{1}{2}(0,61) = 0,122$$

$$K_2 = hf(x_1 + h, y_1 + K_1) = 0,4 f(0,8; 0,732) = 0,4 \cdot \frac{1}{2}(0,732) = 0,1464$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) = 0,61 + \frac{1}{2}(0,122 + 0,1464) = 0,7442$$

$$x_2 = 0,8; \quad y_2 = 0,7442$$

En la tabla 5 se muestran los resultados obtenidos para $x = 0,8; 1,6; 2,4; 3,2$ y 4 y los errores correspondientes, calculados por comparación con la solución exacta.

x	Solución aproximada con				Error en la solución aproximada con			
	$h = 0,4$	$h = 0,2$	$h = 0,1$	$h = 0,05$	$h = 0,4$	$h = 0,2$	$h = 0,1$	$h = 0,05$
0,0	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,8	0,7442	0,7455	0,7458	0,7459	0,0017	0,0004	0,0001	0,0000
1,6	1,1077	1,1114	1,1124	1,1127	0,0051	0,0014	0,0003	0,0001
2,4	1,6487	1,6570	1,6593	1,6599	0,0114	0,0031	0,0008	0,0002
3,2	2,4539	2,4704	2,4749	2,4761	0,0226	0,0061	0,0016	0,0004
4,0	3,6523	3,6831	3,9616	3,6938	0,0422	0,0114	0,0029	0,0007

Tabla 5

Debido a que $f_y(x, y) = 0,5 > 0$, se ve un incremento del error a medida que x se aleja de x_0 . Para cada x fija, el error disminuye con h . Nótese que, en este caso, el error disminuye unas cuatro veces cuando h se reduce a la mitad. Esto se debe a que RK2 posee un error total $O(h^2)$ al igual que el método de Taylor de orden 2.

Estimación del error en RK2

Como RK2 es una adaptación del método de Taylor de orden 2, pose errores local y total del mismo orden que aquel. Esto es:

$$\text{Error local: } O(h^3)$$

$$\text{Error total: } O(h^2)$$

El error total se puede estimar por doble cálculo mediante la fórmula (9):

$$e_h = \frac{y_h - y_{2h}}{2^p - 1}$$

donde: y_h : Solución obtenida para un cierto x mediante RK2 con paso h

y_{2h} : Solución obtenida para un cierto x mediante RK2 con paso $2h$

e_h : Error total en y_h

El parámetro p , como se recordará, es el orden del error total y toma en este caso el valor 2. Resulta entonces:

$$e_h = \frac{y_h - y_{2h}}{3}$$

Ejemplo 5

Resuelva el problema

$$\frac{dy}{dx} = x - y \quad y(1) = 3$$

en el intervalo $1 \leq x \leq 5$ mediante RK2 con tres cifras decimales exactas en los resultados.

Solución:

Este ejemplo coincide con el ejemplo 2 de esta sección, en el que se utilizó el método de Euler. Es conveniente que compare los resultados de ambos. En la tabla 6 se muestran los resultados para $x = 1, 2, 3, 4$ y 5 con pasos $h = 0,1; 0,05$ y $0,025$ así como los errores estimados mediante doble cálculo (excepto para $h = 0,1$ donde no existe la información requerida)

$h = 0,1$		$h = 0,05$		$h = 0,025$	
x	y	y	Error	y	Error
1	3,0000	3,0000	0,0000	3,0000	0,0000
2	2,1056	2,1041	0,0005	2,1038	0,0001
3	2,4075	2,4064	0,0004	2,4061	0,0001
4	3,1502	3,1496	0,0002	3,1494	0,0001
5	4,0553	4,0550	0,0001	4,0550	0,0000

Tabla 6

De la tabla se aprecia que el error tiende a disminuir a medida que x se aleja de x_0 . Esto se debe a que $f_y(x, y) = -1 < 0$, lo cual determina el decrecimiento del error propagado. Para cada x

fija, el error va reduciéndose a la cuarta parte en cada disminución de h a la mitad, como corresponde a un método con error total de orden dos.

Estabilidad de RK2

Al igual que en el método de Euler, la estabilidad será analizada para la ecuación modelo estable

$$\frac{dy}{dx} = -Ay \quad A > 0$$

El método RK2 aplicado a esta ecuación se reduce a

$$K_1 = hf(x_n, y_n) = h(-Ay_n) = -hAy_n$$

$$K_2 = hf(x_n + h, y_n + K_1) = h[-A(y_n + K_1)] = -hA(y_n + K_1) = -hA(y_n - hAy_n) =$$

$$= -hA(1 - hA)y_n = (-hA + h^2A^2)y_n$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) = y_n + \frac{1}{2}[-hAy_n + (-hA + h^2A^2)y_n] = y_n \left[1 + \frac{1}{2}(-hA - hA + h^2A^2)\right] =$$

$$y_{n+1} = y_n \left[1 - hA + \frac{1}{2}h^2A^2\right]$$

Esta ecuación en diferencias finitas es estable si

$$\left|1 - hA + \frac{1}{2}h^2A^2\right| < 1 \quad (18)$$

La forma cuadrática $\frac{1}{2}h^2A^2 - hA + 1$ posee discriminante negativo:

$$D = b^2 - 4ac = 1 - 4\left(\frac{1}{2}\right)(1) = -1$$

así que no se anula para ningún hA real y, como vale 1 para $hA = 0$, es positiva para todo hA real. Luego, la inecuación (18) equivale a

$$1 - hA + \frac{1}{2}h^2A^2 < 1$$

esto es:

$$hA\left(\frac{1}{2}hA - 1\right) < 0$$

y, como $hA > 0$, equivale a

$$\frac{1}{2}hA - 1 < 0$$

es decir,

$$hA < 2$$

Se puede concluir entonces que el método RK2 es condicionalmente estable; se requiere tomar

$$h < \frac{2}{A}$$

En general, para valores de h que son suficientemente pequeños para lograr un error aceptable, se satisface también la condición de estabilidad.

Ejemplo 6

Resuelva la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = -7y \quad y(0) = 5$$

en el intervalo $0 \leq x \leq 5$ con paso $h = 0,4$ y $h = 0,2$ utilizando RK2. Analice la estabilidad del método.

Solución:

La condición de estabilidad requiere en este caso que

$$h < \frac{2}{7} = 0,2857$$

lo cual no se cumple si se toma $h = 0,4$. En la tabla 7 se muestra la solución analítica:

$$y = 5e^{-7x}$$

y las obtenidas con RK2 para $h = 0,4$ y $h = 0,2$. Nótese la inestabilidad en los resultados obtenidos con paso $h = 0,4$.

x	Solución exacta	RK2 con $h = 0,4$	RK2 con $h = 0,2$
0,0	5,0000000	5,0000	5,000000
0,4	0,3040503	10,600	1,682000
0,8	0,0184893	22,472	0,565825
1,2	0,0011243	47,641	0,190343
1,6	0,0000684	101,00	0,064032
2,0	0,0000042	214,11	0,021540
2,4	0,0000003	453,93	0,007246
2,8	0,0000000	962,32	0,002436
3,2	0,0000000	2040,1	0,000820
3,6	0,0000000	4325,1	0,000276
4,0	0,0000000	9169,1	0,000093
4,4	0,0000000	19438	0,000031
4,8	0,0000000	41210	0,000011

Tabla 7

Método de Runge - Kutta de orden cuatro

A partir del método de Taylor de orden cuatro, se pueden deducir varios esquemas de Runge – Kutta orden cuatro, de modo similar (naturalmente, mucho más laborioso) al usado para obtener RK2. De estos esquemas, el más popular es el siguiente:

$$\text{RK4: } \begin{cases} K_1 = hf(x_n, y_n) \\ K_2 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}K_1) \\ K_3 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}K_2) \\ K_4 = hf(x_n + h, y_n + K_3) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

cuya interpretación geométrica se deja al lector. El método, por ser una consecuencia de Taylor orden con cuatro, posee:

$$\begin{aligned} \text{Error local: } O(h^5) \\ \text{Error total: } O(h^4) \end{aligned}$$

por tanto, el error total se puede estimar mediante doble cálculo como:

$$e_h = \frac{y_h - y_{2h}}{2^p - 1}$$

con $p = 4$, es decir:

$$e_h = \frac{y_h - y_{2h}}{15} \quad (19)$$

De forma similar a la utilizada para RK2, se demuestra que el método es estable para la ecuación modelo:

$$\frac{dy}{dx} = -Ay \quad A > 0$$

si se toma $hA < 2,785$, lo cual se satisface para los valores de h utilizados normalmente.

Algoritmo en pseudo código para RK4

El algoritmo que sigue obtiene la solución aproximada del problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

en un intervalo $x_0 \leq x \leq x_F$ con paso $h > 0$. Se suponen conocidos: la función $f(x, y)$, las condiciones iniciales (x_0, y_0) el valor final x_F y el paso h .

```
n := 0
do while  $x_n < x_F$ 
     $(x_n, y_n)$  es un punto de la solución aproximada
     $K_1 := hf(x_n, y_n)$ 
     $K_2 := hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}K_1)$ 
```

```


$$K_3 := hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}K_2)$$


$$K_4 := hf(x_n + h, y_n + K_3)$$


$$y_{n+1} := y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$


$$x_{n+1} := x_n + h$$


$$n := n + 1$$

end
Terminar

```

Ejemplo 7

Resuelva el problema

$$\frac{dy}{dx} = x - y \quad y(1) = 3$$

en el intervalo $1 \leq x \leq 5$ mediante RK4 con cuatro cifras decimales exactas.

Solución:

Se comenzara tomando $h = 0,2$. El primer paso del método se muestra a continuación en detalle.

$$x_0 = 1 \quad y_0 = 3$$

$$K_1 = hf(x_0, y_0) = 0,2f(1; 3) = 0,2(1 - 3) = -0,4$$

$$K_2 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}K_1) = 0,2f(1,1; 2,8) = 0,2(1,1 - 2,8) = -0,34$$

$$K_3 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}K_2) = 0,2f(1,1; 2,83) = 0,2(1,1 - 2,83) = -0,346$$

$$K_4 = hf(x_0 + h, y_0 + K_3) = 0,2f(1,2; 2,654) = 0,2(1,2 - 2,654) = -0,2908$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = 3 + \frac{1}{6}(-0,4 - 0,68 - 0,692 - 0,2908) = 2,6562$$

El resto de la solución se muestra en la tabla 8. También se incluyen los cálculos para $h = 0,1$ y los errores correspondientes obtenidos mediante la fórmula (19) para $x = 1, 2, 3, 4$ y 5 . En este caso no ha sido necesario tomar valores de h más pequeños pues, como se observa, con $h = 0,1$ se obtiene un error suficientemente pequeño.

x	$h = 0,2$	$h = 0,1$	
	y	y	Error
1	3,000000	3,000000	0,000000
2	2,103656	2,103639	0,000001
3	2,406019	2,406007	0,000001
4	3,149368	3,149362	0,000000
5	4,054950	4,054947	0,000000

Tabla 8

Obsérvese que, para obtener resultados con solo tres cifras decimales exactas para este mismo problema (ejemplo 5) utilizando RK2 fue necesario emplear $h = 0,025$ mientras que con RK4 se han obtenido cinco cifras decimales exactas con paso $h = 0,1$. Por supuesto, debe tomarse en cuenta que cada paso de RK4 requiere evaluar la función f cuatro veces mientras que RK2 solo requiere dos evaluaciones, pero aun así, el método de cuarto orden es mucho más eficiente. En este problema, por ejemplo, utilizando RK2 con $h = 0,025$ se necesitan 160 pasos para cubrir el intervalo $1 \leq x \leq 5$, lo que representa 320 evaluaciones de la función f ; utilizando RK4 con $h = 0,1$ se emplean 40 pasos para un total de 160 evaluaciones de f , es decir, en la mitad del tiempo de cálculo se obtienen resultados con dos cifras decimales exactas adicionales.

Ejercicios

1. Considere el problema de Cauchy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{\ln x} \quad y(2) = 1$$

- a) Analice la estabilidad de la ecuación en el intervalo $2 \leq x \leq 6$ mediante el comportamiento de $f_j(x, y)$.
- b) Analice su campo de direcciones (utilice un programa computacional adecuado) y verifique su estabilidad en el intervalo dado.
- c) Halle su solución con tres cifras decimales exactas en el intervalo $2 \leq x \leq 6$ utilizando los métodos de Euler, RK2 y RK4. Compare la cantidad de veces que fue necesario evaluar la función f en cada caso.

2. Sea la ecuación diferencial

$$(y^2 - x)dx + (y + 3x)dy = 0 \quad y(0) = 4$$

- a) Analice la estabilidad de este problema mediante la construcción (con un programa computacional) y la observación del campo de direcciones.
- b) Halle la solución de la ecuación en el intervalo $0 \leq x \leq 5$ con cuatro cifras decimales exactas mediante RK4.
- c) Repita el inciso b) cambiando la condición inicial por $y(0) = 4,001$, compare con el resultado obtenido en b) y explique.

3. Resuelva la siguiente ecuación diferencial con cuatro cifras decimales exactas

$$\frac{dy}{dx} = y - x$$

en el intervalo $0 \leq x \leq 5$ con las condiciones iniciales:

- a) $y(0) = 0,999$
- b) $y(0) = 1,001$

mediante RK4, con cuatro cifras decimales exactas.

- c) Compare los resultados obtenidos en a) y b) y explique, observando el campo de direcciones de la ecuación.

4. En las páginas anteriores se han dado algoritmos para los métodos de Euler, RK2 y RK4 que suponen $h > 0$. Introduzca en dichos algoritmos las modificaciones necesarias de manera que

admitan los mismos valores positivos que negativos de h . Tenga en cuenta que los valores de x_0 y x_F deben ser consecuentes con el signo de h .

5. No es difícil elaborar algoritmos para resolver ecuaciones diferenciales que seleccionen automáticamente el tamaño h del paso. Sea ε la tolerancia relativa que se desea obtener en la solución (ε es el mayor error que se permitirá acumular por cada unidad que avance la solución; puede obtenerse dividiendo el máximo error absoluto permitido entre la amplitud del intervalo en que se desea obtener la solución). Construya un algoritmo basado en RK4 que utilice el método de doble cálculo para estimar el error en cada paso y que reduzca el paso a la mitad si se excede la tolerancia relativa y lo duplique si se está obteniendo un error 40 veces menor que lo que permite la tolerancia relativa.
6. Una curva pasa por el punto $(1, 1)$ y posee la siguiente propiedad: La recta tangente a la curva en un punto (x, y) (x positivo) corta al eje y a una distancia x del origen de coordenadas. Obtenga la ordenada del punto de la curva cuya abscisa es 1,5. Dé el resultado con cuatro cifras decimales exactas.
7. La suposición de que una población crece con una tasa constante conduce a la sencilla ecuación:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

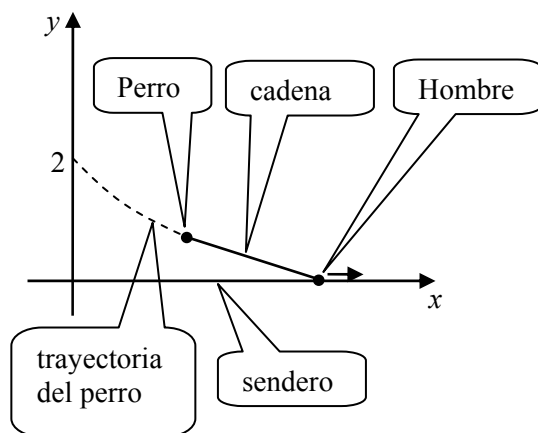
donde P : Población en el instante t .
 k : Tasa de crecimiento.

En la mayoría de los casos este es un modelo demasiado simple para un problema real, pues sucede que, al aumentar P (que lo haría exponencialmente, si se toma este modelo) aparecen factores ambientales y limitaciones de recursos materiales que actúan en contra de este aumento y provocan el efecto de disminuir la tasa de crecimiento. Un modelo más satisfactorio es:

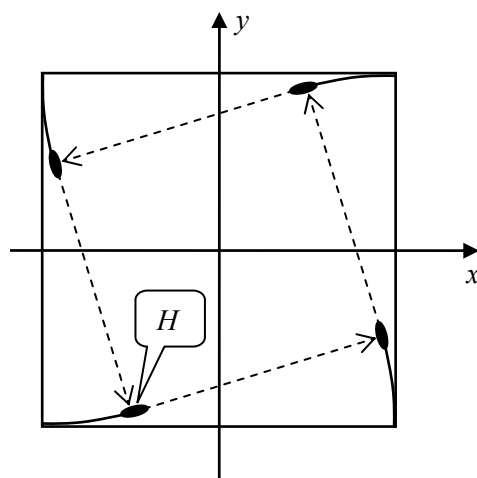
$$\frac{dP}{dt} = (a - bP)P$$

con a y b positivas, propuesto en 1840 por el matemático y biólogo belga P. F. Verhulst, y conocido como *ecuación logística*.

- a) Interprete el modelo logístico comparándolo con el modelo simple $\frac{dP}{dt} = kP$.
- b) Considere el caso $\frac{dP}{dt} = (0,9 - 0,01 \cdot P)P$; $P(0) = 10$ y determine la población en $t = 10$ con todas las cifras enteras exactas.
8. Un hombre saca a pasear a su perro. El hombre camina por un sendero en línea recta y el perro no quiere moverse, pero el hombre lo va halando con una cadena de tres metros de largo, como se muestra en la figura. Considere como instante inicial, el momento en que el perro se hallaba a dos metros del sendero. Defina un sistema coordenado xy donde el eje x coincide con el sendero y el eje y es perpendicular al x y pasa por la posición inicial del perro. Halle la trayectoria del perro para $0 \leq x \leq 6$ con error menor que 1 mm.



9. Sobre una mesa cuadrada de dos metros de lado, hay cuatro hormigas, una en cada esquina de la mesa. En el instante $t = 0$ comienzan a caminar las cuatro hormigas, todas a la misma velocidad, y lo hacen de manera que cada una se mueve en la dirección en que se encuentra en ese instante la hormiga a su derecha, como se muestra en la figura. Tome un sistema de referencia con origen en el centro de la mesa y ejes paralelos a los bordes y halle, con error menor que 1 mm la trayectoria de la hormiga H desde $x = -1$ hasta $x = 0$.



7.4 Métodos de paso múltiple

Todos los métodos estudiados en la sección anterior son de paso simple. En ellos el valor de y_{n+1} se calcula teniendo en cuenta solamente y_n mediante algún algoritmo que puede simbolizarse por

$$y_{n+1} = G(y_n)$$

Los métodos de paso múltiple, por el contrario, utilizan varios valores anteriores a y_n para calcular y_{n+1} . Así, si se usa los últimos $p + 1$ valores de la solución: $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-p}$, para hallar y_{n+1} , se dice que se trata de un método de paso $p + 1$, que se simboliza:

$$y_{n+1} = G(y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-p})$$

Por ejemplo, un método de paso cuádruple sería del tipo:

$$y_{n+1} = G(y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, y_{n-3})$$

Comparación entre los métodos de paso simple y paso múltiple

En términos generales, existen varias importantes diferencias entre estos dos tipos de métodos:

- Como en los métodos de paso múltiple se utiliza una mayor cantidad de información acerca de la solución ya calculada, se logra una mayor eficiencia computacional, en el sentido de una menor cantidad de operaciones para obtener una exactitud similar.
- Un método de paso $p + 1$ no puede funcionar mientras no se conozcan $p + 1$ valores de la solución: $y_0, y_1, y_2, \dots, y_p$. Como en el problema de Cauchy solo se conoce y_0 , es necesario utilizar algún método de paso simple para calcular los primeros p valores de la solución: $y_1, y_2, \dots, y_p$. Por esto se dice con frecuencia en el lenguaje técnico que los métodos de paso múltiple no son capaces de “arrancar”.
- Como los métodos de paso simple solamente utilizan el valor y_n en el cálculo de y_{n+1} , ellos se basan en aproximar la solución de la ecuación diferencial mediante un polinomio de Taylor en el punto x_n . Recuerdese que los métodos de Euler y Runge – Kutta fueron deducidos de esta forma. Los métodos de paso múltiple, por otra parte, puesto que usan varios valores de la solución, suelen estar basados en aproximar la solución de la ecuación diferencial mediante alguna función interpoladora, usualmente un polinomio.

Los métodos de Adams – Bashforth

Los métodos de Adams – Bashforth forman una familia de métodos de paso múltiple típica. Uno de los más usados es el de paso cuádruple que se va a deducir y estudiar a continuación con algún detalle. Después se extenderán los resultados obtenidos a otros métodos de Adams – Bashforth de diferente orden.

Sea, como hasta ahora, el problema de Cauchy:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0$$

y suponga que se han obtenido valores

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$$

los cuales son aproximaciones de la solución exacta:

$$y(x_0), y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_n)$$

para valores de x tomados con paso h .

Se desea hallar y_{n+1} como aproximación de $y(x_{n+1})$.

Como $y(x)$ es la solución del problema de Cauchy, se cumple que:

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x))$$

Esto es,

$$dy(x) = f(x, y(x))dx$$

Integrando:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} dy(x) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))dx$$

Es decir:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))dx \quad (1)$$

Para calcular aproximadamente la integral que aparece en (1), se sustituirá la función $f(x, y(x))$ por el polinomio interpolador de tercer grado $p(x)$ correspondiente a los cuatro nodos:

$$(x_{n-3}, f_{n-3}), (x_{n-2}, f_{n-2}), (x_{n-1}, f_{n-1}), (x_n, f_n)$$

donde se utiliza la notación: $f_i = f(x_i, y_i)$ para $i = n-3, n-2, n-1, n$

De este modo, la fórmula exacta (1) da lugar a la ecuación:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} p(x)dx \quad (2)$$

Si se supone que los valores y_i son buenas aproximaciones de $y(x_i)$, entonces f_i será una adecuada aproximación de $f(x_i, y(x_i))$ y el polinomio $p(x)$ no diferirá mucho de la función $f(x, y(x))$ en el intervalo $[x_{n-3}, x_n]$. Nótese, sin embargo, que aun cuando todas estas aproximaciones fueran satisfactorias, se está empleando un polinomio interpolador calculado con nodos en el intervalo $[x_{n-3}, x_n]$ para calcular una integral en el intervalo $[x_n, x_{n+1}]$; este hecho tendrá una importante incidencia en la exactitud de la fórmula obtenida.

El polinomio interpolador puede expresarse mediante la fórmula de Lagrange como:

$$p(x) = L_n(x)f_n + L_{n-1}(x)f_{n-1} + L_{n-2}(x)f_{n-2} + L_{n-3}(x)f_{n-3}$$

así que la ecuación (2) pasa a ser:

$$y_{n+1} = y_n + f_n \int_{x_n}^{x_{n+1}} L_n(x) dx + f_{n-1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} L_{n-1}(x) dx + f_{n-2} \int_{x_n}^{x_{n+1}} L_{n-2}(x) dx + f_{n-3} \int_{x_n}^{x_{n+1}} L_{n-3}(x) dx \quad (3)$$

$$\text{donde: } L_n(x) = \frac{(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})(x - x_{n-3})}{(x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n-2})(x_n - x_{n-3})}$$

$$L_{n-1}(x) = \frac{(x - x_n)(x - x_{n-2})(x - x_{n-3})}{(x_{n-1} - x_n)(x_{n-1} - x_{n-2})(x_{n-1} - x_{n-3})}$$

$$L_{n-2}(x) = \frac{(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-3})}{(x_{n-2} - x_n)(x_{n-2} - x_{n-1})(x_{n-2} - x_{n-3})}$$

$$L_{n-3}(x) = \frac{(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})}{(x_{n-3} - x_n)(x_{n-3} - x_{n-1})(x_{n-3} - x_{n-2})}$$

Las integrales de la ecuación (3) no son difíciles de calcular. A modo de ilustración se calculará la primera en detalle y se escribirá el resultado obtenido para las otras.

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} L_n(x) dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})(x - x_{n-3})}{(x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n-2})(x_n - x_{n-3})} dx \quad (4)$$

Para simplificar los cálculos es útil hacer el cambio de variables:

$$s = x - x_n$$

En la figura 1 se muestra el significado geométrico de s y de los demás términos que aparecen en la integral.

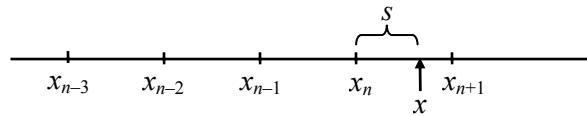


Figura 1

De la figura es obvio que:

$$\begin{aligned} x - x_{n-1} &= h + s \\ x - x_{n-2} &= 2h + s \\ x - x_{n-3} &= 3h + s \\ x_n - x_{n-1} &= h \\ x_n - x_{n-2} &= 2h \\ x_n - x_{n-3} &= 3h \end{aligned}$$

También se observa que:

$$\begin{aligned} x = x_n &\Leftrightarrow s = 0 \\ x = x_{n+1} &\Leftrightarrow s = h \end{aligned}$$

Como, además, $ds = dx$, la ecuación (4) se convierte en:

$$\begin{aligned}
 \int_{x_n}^{x_{n+1}} L_n(x) dx &= \int_0^h \frac{(s+h)(s+2h)(s+3h)}{(h)(2h)(3h)} ds \\
 &= \frac{1}{6h^3} \int_0^h (s^3 + 6hs^2 + 11h^2s + 6h^3) ds \\
 &= \frac{1}{6h^3} \left[\frac{1}{4}s^4 + 2hs^3 + \frac{11}{2}h^2s^2 + 6h^3s \right]_0^h \\
 &= \frac{1}{6h^3} \left[\frac{1}{4} + 2 + \frac{11}{2} + 6 \right] h^4 \\
 &= \frac{55}{24} h
 \end{aligned}$$

En forma similar:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} L_{n-1}(x) dx = -\frac{59}{24} h \quad \int_{x_n}^{x_{n+1}} L_{n-2}(x) dx = \frac{37}{24} h \quad \int_{x_n}^{x_{n+1}} L_{n-3}(x) dx = -\frac{9}{24} h$$

Sustituyendo las integrales calculadas, la ecuación (3) se transforma en:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}) \quad (5)$$

que es la fórmula de Adams – Bashforth de orden 4 (AB4). Integrando en $[x_n, x_{n+1}]$ el error de interpolación de Lagrange:

$$R(x) = \frac{\frac{d^4}{dx^4} f(x, y(x)) \Big|_{x=\xi}}{4!} (x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})(x - x_{n-3})$$

se obtiene una expresión para el error local del método:

$$\text{Error local: } \frac{251}{720} y^{(5)}(c) h^5 \quad (6)$$

El error total será del orden de h^4 , o sea:

$$\text{Error total: } O(h^4)$$

Como se ve, el método de Adams – Bashforth de paso cuádruple, es un método de cuarto orden (error del orden de h^4), al igual que RK4.

Los métodos de Adams – Bashforth de otros órdenes se obtienen de forma similar. A continuación se resumen las fórmulas correspondientes a los más usados, así como los errores locales correspondientes.

Método	Fórmula	Error local	Error total
AB2	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1})$	$\frac{5}{12} y^{(3)}(c)h^3$	$O(h^2)$
AB3	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2})$	$\frac{3}{8} y^{(4)}(c)h^4$	$O(h^3)$
AB4	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$	$\frac{251}{720} y^{(5)}(c)h^5$	$O(h^4)$

Algoritmo en pseudo código para AB4

El algoritmo que sigue obtiene la solución aproximada del problema de Cauchy

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

en un intervalo $x_0 \leq x \leq x_F$ con paso $h > 0$. Se suponen conocidos: la función $f(x, y)$, las condiciones iniciales (x_0, y_0) el valor final x_F y el paso h .

Calcular y_1, y_2, y_3 mediante RK4

for $i = 0$ to 3

$$f_i := f(x_i, y_i)$$

end

$n := 3$

$$x_n := x_0 + nh$$

do while $x_n < x_F$

(x_n, y_n) es un punto de la solución aproximada

$$y_{n+1} := y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$$

$$x_{n+1} := x_n + h$$

$$f_{n+1} := f(x_{n+1}, y_{n+1})$$

$$n := n + 1$$

end

Terminar

Ejemplo 1

Resuelva el problema de Cauchy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}y \quad y(0) = 0,5$$

en el intervalo $0 \leq x \leq 5$ mediante RK4 y AB4 con pasos $h = 0,2$ y $0,1$. Compare ambos resultados con la solución exacta

$$y = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$$

Solución:

Los valores exactos de la solución son:

$y(1) = 0,8243606$; $y(2) = 1,3591409$; $y(3) = 2,2408445$; $y(4) = 3,6945280$; $y(5) = 6,0912469$.

En la tabla 1 se muestran los resultados obtenidos. Observe que, a pesar de que ambos métodos son de orden 4, los resultados de RK4 son más exactos que los de AB4; esto se debe a que el coeficiente de h^4 es menor en el primero que en el segundo. Tenga presente que AB4 requiere cuatro veces menos evaluaciones de $f(x, y)$ que RK4 (AB4: una evaluación por paso; RK4: cuatro evaluaciones por paso).

x	$h = 0,2$ RK4		$h = 0,2$ AB4		$h = 0,1$ RK4		$h = 0,2$ AB4	
	Solución	Error	Solución	Error	Solución	Error	Solución	Error
0	0,500000	0,000000	0,500000	0,000000	0,500000	0,000000	0,500000	0,000000
1	0,824360	0,000001	0,824355	0,000006	0,824361	0,000000	0,824360	0,000001
2	1,359140	0,000001	1,359112	0,000029	1,359141	0,000000	1,359139	0,000002
3	2,240842	0,000002	2,240764	0,000080	2,240844	0,000000	2,240838	0,000006
4	3,694522	0,000006	3,694340	0,000188	3,694528	0,000000	3,694514	0,000014
5	6,091235	0,000012	6,090845	0,000402	6,091246	0,000001	6,091218	0,000029

Tabla 1

Comparando los resultados con paso $h = 0,2$ y $h = 0,1$ se aprecia que, en ambos casos el error disminuye unas 16 veces al disminuir el paso a la mitad, lo cual se debe a que se trata de métodos de cuarto orden.

Los métodos de Adams – Moulton

Como ya se ha señalado, la causa principal de la menor exactitud de los métodos de Adams – Bashforth radica en el hecho de que utilizan un polinomio interpolador en el intervalo $[x_{n-p}, x_n]$ para aproximar a la función $f(x, y(x))$ en el intervalo $[x_n, x_{n+1}]$, y ya se sabe lo inconveniente de la extrapolación polinomial.

Los métodos de Adams – Moulton resuelven este problema tomando los nodos de interpolación en $[x_{n-p}, x_{n+1}]$, lo cual aumenta considerablemente la exactitud pero, como se verá, introduce nuevas dificultades. Al igual que antes, se deducirá solamente la fórmula para el método de cuarto orden (que, en este caso, es de paso triple).

Sea el problema de Cauchy:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0$$

y suponga que se han obtenido valores aproximados de la solución:

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$$

para los valores $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ de x tomados con paso h . Considérese de nuevo la ecuación (1):

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx$$

Ahora la integral se calculará aproximando la función $f(x, y(x))$ mediante el polinomio interpolador $p(x)$ de tercer grado correspondiente a los cuatro nodos:

$$(x_{n-2}, f_{n-2}), (x_{n-1}, f_{n-1}), (x_n, f_n), (x_{n+1}, f_{n+1})$$

Nótese que, al proceder así, se está suponiendo conocido $f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$, que depende precisamente del valor y_{n+1} que se está procurando calcular. Sin embargo, no es nada extraño en Álgebra, plantear una ecuación que contenga a la incógnita en ambos miembros. El polinomio interpolador, utilizando de nuevo la fórmula de Lagrange, sería:

$$p(x) = L_{n+1}(x)f_{n+1} + L_n(x)f_n + L_{n-1}(x)f_{n-1} + L_{n-2}(x)f_{n-2}$$

Sustituyendo $p(x)$ en lugar de $f(x, y(x))$ en el integrando de (1), resulta:

$$y_{n+1} = y_n + f_{n+1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} L_{n+1}(x) dx + f_n \int_{x_n}^{x_{n+1}} L_n(x) dx + f_{n-1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} L_{n-1}(x) dx + f_{n-2} \int_{x_n}^{x_{n+1}} L_{n-2}(x) dx \quad (7)$$

$$\text{donde: } L_{n+1}(x) = \frac{(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})}{(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - x_{n-1})(x_{n+1} - x_{n-2})}$$

$$L_n(x) = \frac{(x - x_{n+1})(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})}{(x_n - x_{n+1})(x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n-2})}$$

$$L_{n-1}(x) = \frac{(x - x_{n+1})(x - x_n)(x - x_{n-2})}{(x_{n-1} - x_{n+1})(x_{n-1} - x_n)(x_{n-1} - x_{n-2})}$$

$$L_{n-2}(x) = \frac{(x - x_{n+1})(x - x_n)(x - x_{n-1})}{(x_{n-2} - x_{n+1})(x_{n-2} - x_n)(x_{n-2} - x_{n-1})}$$

A modo de muestra, se calculará en detalle la última de estas integrales.

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} L_{n-2}(x) dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{(x - x_{n+1})(x - x_n)(x - x_{n-1})}{(x_{n-2} - x_{n+1})(x_{n-2} - x_n)(x_{n-2} - x_{n-1})} dx$$

Haciendo de nuevo el cambio de variables:

$$s = x - x_n$$

$$\begin{aligned} \text{resulta: } x - x_{n+1} &= x - x_n + x_n - x_{n+1} = (x - x_n) - (x_{n+1} - x_n) = s - h \\ x - x_n &= s \\ x - x_{n-1} &= s + h \\ x_{n-2} - x_{n+1} &= -3h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{n-2} - x_n &= -2h \\
x_{n-2} - x_{n-1} &= -h \\
x = x_n &\Leftrightarrow s = 0 \\
x = x_{n+1} &\Leftrightarrow s = h \\
dx &= ds
\end{aligned}$$

La integral queda:

$$\begin{aligned}
\int_{x_n}^{x_{n+1}} L_{n-2}(x) dx &= \int_0^h \frac{(s-h)s(s+h)}{(-3h)(-2h)(-h)} ds \\
&= -\frac{1}{6h^3} \int_0^h (s^3 - h^2 s) ds \\
&= -\frac{1}{6h^3} \left[\frac{1}{4} s^4 - \frac{1}{2} h^2 s^2 \right]_0^h \\
&= -\frac{1}{6h^3} \left[\frac{1}{4} h^4 - \frac{1}{2} h^4 \right] \\
&= \frac{1}{24} h
\end{aligned}$$

De forma similar:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} L_{n+1}(x) dx = \frac{9}{24} h \quad \int_{x_n}^{x_{n+1}} L_n(x) dx = \frac{19}{24} h \quad \int_{x_n}^{x_{n+1}} L_{n-1}(x) dx = -\frac{5}{24} h$$

Sustituyendo en (7):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}) \quad (8)$$

Que es la fórmula de Adams – Moulton de orden 4 (AM4). Puede probarse, integrando el error de interpolación en el intervalo $[x_n, x_{n+1}]$, que el error local tiene la forma:

$$\text{Error local: } -\frac{19}{720} y^{(5)}(\tau) h^5 \quad (9)$$

y que el error total es $O(h^4)$; por esta razón se dice que es un método de orden 4. Nótese, sin embargo, que para determinar y_{n+1} se necesitan y_n , y_{n-1} y y_{n-2} , por lo que se trata de un método de paso triple.

Si se comparan los errores locales de los métodos AB4 y AM4, ecuaciones (9) y (6), se aprecia que el de AB4 es unas 13 veces mayor que AM4. Esto, como se había previsto, se debe a que en el método de Adams – Moulton no se ha empleado la extrapolación de $p(x)$.

Sin embargo, la fórmula AM4, al igual que los demás métodos de Adams – Moulton, presentan el inconveniente de que el valor y_{n+1} buscado no puede ser despejado por lo general. Por esta razón se dice que es un método implícito. La ecuación (8) suele resolverse por el método iterativo simple, estudiado en el capítulo 2. Como se recordará, la ecuación

$$f(x) = 0$$

se escribe en la forma $x = g(x)$

y se realiza el proceso iterativo $x_{n+1} = g(x_n) \quad x_0 \in R \quad (10)$

Para que el proceso (10) converja, es suficiente que $|g'(x)| \leq K < 1$ en un entorno de la solución que incluya a x_0 . En el caso de la ecuación (8), la incógnita es y_{n+1} , así que la solución ya está escrita en la forma adecuada para iterar:

$$y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \frac{h}{24} [9f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)}) + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}] \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Para que el proceso iterativo converja, es suficiente que:

$$\left| \frac{\partial}{\partial y_{n+1}} \left[y_n + \frac{h}{24} [9f(x_{n+1}, y_{n+1}) + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}] \right] \right| \leq K < 1$$

o sea: $\left| \frac{9h}{24} \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq K < 1$

Como se observa, ya que h es un valor reducido, la condición de convergencia se satisface sin dificultad; es más, la cantidad

$$\left| \frac{9h}{24} \frac{\partial f}{\partial y} \right|$$

es, usualmente, próxima a cero, lo cual garantiza una rápida convergencia del proceso iterativo. Nótese, sin embargo, que este proceso iterativo converge a la solución de la ecuación (8), no a la solución exacta $y(x_{n+1})$ de la ecuación diferencial.

De forma análoga al caso de orden cuatro, se pueden deducir otras fórmulas de Adams – Moulton. Las más usadas se resumen a continuación:

Método	Fórmula	Error local	Error total
AM2	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f_{n+1} + f_n)$	$-\frac{1}{12} y^{(3)}(c) h^3$	$O(h^2)$
AM3	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12} (5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1})$	$-\frac{1}{24} y^{(4)}(c) h^4$	$O(h^3)$
AM4	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2})$	$-\frac{19}{720} y^{(5)}(c) h^5$	$O(h^4)$

Métodos predictor – corrector

Los métodos predictor – corrector están constituidos por un método implícito de buena exactitud (que se llama *ecuación correctora*) y un método explícito (*ecuación predictora*) que aporta una aproximación inicial adecuada de y_{n+1} para el proceso iterativo del método implícito.

Los algoritmos de Adams – Bashforth y de Adams – Moulton suelen emplearse para formar pares predictor – corrector. Para ello se seleccionan métodos del mismo orden, de modo que la aproximación inicial sea suficientemente buena para que la ecuación correctora no haya que aplicarla más de una o dos veces.

Como ilustración, y por ser uno de los más empleados, se verá a continuación el método predictor – corrector de Adams de orden cuatro (ABM4):

Ecuación predictor: AB4

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$$

Ecuación correctora: AM4

$$y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \frac{h}{24}[9f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)}) + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}] \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Si ya han sido calculados $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ con la exactitud requerida, el cálculo de y_{n+1} requerirá evaluar la función f una vez para hallar $y_{n+1}^{(0)}$ y tantas veces como se utilice la ecuación correctora implícita. Si se requiere aplicar el proceso corrector tres o más veces, entonces cada nuevo punto de la solución necesitará cuatro o más evaluaciones de f y se perderá la principal ventaja del método AM4 sobre RK4, que requiere cuatro evaluaciones de f por cada paso. El método predictor de Adams de orden cuatro se aplica de la siguiente forma:

Se selecciona un paso h suficientemente pequeño para que el proceso corrector converja rápidamente, de manera que solo se requiera aplicar una vez la ecuación correctora. Si esto se consigue, entonces $y_{n+1}^{(1)}$ se puede tomar como la solución de la ecuación correctora, de modo que su error será:

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1}^{(1)} = -\frac{19}{720}h^5 y^{(5)}(\tau) \quad (11)$$

Como se ve, se ha supuesto que $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ poseen un error muy pequeño, de manera que el error total de $y_{n+1}^{(1)}$ puede estimarse como su error local. Por otra parte, el error total de $y_{n+1}^{(0)}$ puede estimarse como el error local de AB4, es decir:

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1}^{(0)} = \frac{251}{720}h^5 y^{(5)}(c) \quad (12)$$

Tomando aproximadamente $y^{(5)}(\tau) = y^{(5)}(c) = y^v$ y restando la ecuación (11) de la (12), se tiene:

$$y_{n+1}^{(1)} - y_{n+1}^{(0)} \approx \left(\frac{251}{720} + \frac{19}{720}\right)h^5 y^v = \frac{3}{8}h^5 y^v$$

Este resultado permite estimar el producto $h^5 y^v$:

$$h^5 y^v \approx \frac{8}{3}[y_{n+1}^{(1)} - y_{n+1}^{(0)}]$$

Sustituyendo ahora en la ecuación (11):

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1}^{(1)} \approx -\frac{19}{720} \cdot \frac{8}{3}[y_{n+1}^{(1)} - y_{n+1}^{(0)}] = -\frac{19}{270}[y_{n+1}^{(1)} - y_{n+1}^{(0)}]$$

Como $\frac{270}{19} = 14,2105$, se acostumbra a tomar:

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1}^{(1)} \approx -\frac{1}{14} [y_{n+1}^{(1)} - y_{n+1}^{(0)}] \quad (13)$$

La fórmula (13) significa que el paso h debe seleccionarse de modo que se cumplan dos requisitos:

1. El proceso corrector converge en un paso.
2. El error introducido en un paso, que puede estimarse como $-\frac{1}{14} [y_{n+1}^{(1)} - y_{n+1}^{(0)}]$ es aceptable de acuerdo con el error total que se puede acumular en la región solución.

Si alguna de estas condiciones no se cumple, debe tomarse un valor menor de h .

Ejemplo 2

Resuelva el problema de Cauchy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}y \quad y(0) = 0,5$$

en el intervalo $0 \leq x \leq 2$ mediante el método predictor corrector de Adams de orden cuatro (ABM4), con paso $h = 0,2$. Obtenga aproximadamente el error introducido en cada paso y verifique mediante el cálculo exacto del error. La solución exacta es

$$y = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$$

Solución:

En la tabla 2 se muestran los resultados. Observe como el error obtenido en cada paso puede estimarse del orden de $-0,2 \cdot 10^{-6}$, lo cual hace prever que en siete pasos del método predictor – corrector el error total estará entre $-0,000001$ y $-0,000002$. Nótese que en la realidad, el error total acumulado no sobrepasa $-0,000001$.

n	x_n	$y_n^{(0)}$	$y_n^{(1)}$	$-\frac{1}{14}(y_n^{(1)} - y_n^{(0)})$	$y(x_n)$	Error total real
0	0,0		0,500000		0,500000	0,000001
1	0,2		0,552585		0,552585	0,000000
2	0,4		0,610701		0,610701	0,000000
3	0,6		0,674929		0,674929	0,000000
4	0,8	0,745910	0,745912	$-0,00000014$	0,745912	0,000000
5	1,0	0,824358	0,824361	$-0,00000021$	0,824361	0,000000
6	1,2	0,911057	0,911060	$-0,00000021$	0,911059	$-0,000001$
7	1,4	1,006874	1,006877	$-0,00000021$	1,006876	$-0,000001$
8	1,6	1,112768	1,112771	$-0,00000021$	1,112770	$-0,000001$
9	1,8	1,229799	1,229802	$-0,00000021$	1,229801	$-0,000001$
10	2,0	1,359138	1,359142	$-0,00000029$	1,359141	$-0,000001$

Tabla 2

Algoritmo en pseudo código para el método predictor – corrector de Adams

El algoritmo que sigue obtiene la solución aproximada del problema de Cauchy

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$
$$y(x_0) = y_0$$

en un intervalo $x_0 \leq x \leq x_F$ con paso $h > 0$. Se suponen conocidos: la función $f(x, y)$, las condiciones iniciales (x_0, y_0) el valor final x_F y el paso h .

```
for  $n = 0$  to 2    {Mediante RK4 se hallan los primeros tres puntos de la solución}
     $(x_n, y_n)$  es un punto de la solución aproximada
     $f_n := f(x_n, y_n)$ 
     $K_1 := hf_n$ 
     $K_2 := hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}K_1)$ 
     $K_3 := hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}K_2)$ 
     $K_4 := hf(x_n + h, y_n + K_3)$ 
     $y_{n+1} := y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$ 
     $x_{n+1} := x_n + h$ 
end
 $n := 3$ 
 $f_n := f(x_n, y_n)$ 
do while  $x_n < x_F$ 
     $(x_n, y_n)$  es un punto de la solución aproximada
     $y_{n+1}^{(0)} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$ 
     $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}[9f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)}) + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}]$ 
     $x_{n+1} := x_n + h$ 
     $n := n + 1$ 
     $f_n := f(x_n, y_n)$ 
end
Terminar
```

El método predictor – corrector de Adams de orden cuatro se compara muy bien con RK4 en cuanto a exactitud y estabilidad. En el ejemplo que sigue, se compara la exactitud de ambos procedimientos en la solución de una ecuación diferencial inestable.

Ejemplo 3

Resuelva el problema de Cauchy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}y \quad y(0) = 0,5$$

en el intervalo $0 \leq x \leq 5$, con paso $h = 0,2$, mediante los métodos RK4 y predictor – corrector ABM4 . Compare la exactitud de ambos resultados.

Solución:

En la tabla 3 se muestran, para $x = 0, 1, 2, 3, 4$ y 5 los resultados obtenidos con cada método y sus respectivos errores calculados por comparación con la solución exacta.

x	Solución de RK4	Solución de ABM4	Solución Exacta	Error de RK4	Error de ABM4
0	0,500000	0,500000	0,500000	0,000000	0,000000
1	0,824360	0,824361	0,824361	0,000001	0,000000
2	1,359140	1,359142	1,359141	0,000001	- 0,000001
3	2,240842	2,240847	2,240845	0,000003	- 0,000002
4	3,694522	3,694535	3,694528	0,000006	- 0,000007
5	6,091235	6,091263	6,091247	0,000012	- 0,000015

Tabla 3

Como se aprecia, los resultados poseen una exactitud similar. No obstante, el método predictor – corrector requirió la mitad de las evaluaciones de f (2 por cada paso) que RK4 (4 por cada paso)

Estabilidad de los métodos de Adams

Al aplicar a la ecuación diferencial modelo estable:

$$\frac{dy}{dx} = -Ay \quad A > 0$$

el método de AB4: $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$

se obtiene, puesto que $f_i = -Ay_i$ para $i = n, n-1, n-2$ y $n-3$,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(-55Ay_n + 59Ay_{n-1} - 37Ay_{n-2} + 9Ay_{n-3})$$

es decir: $y_{n+1} = y_n + \frac{hA}{24}(-55y_n + 59y_{n-1} - 37y_{n-2} + 9y_{n-3})$ (14)

Se trata de una ecuación en diferencias lineal y homogénea, cuyas soluciones son del tipo:

$$y_i = \beta^i$$

Los valores de β se obtienen sustituyendo en (14):

$$\beta^{n+1} = \beta^n + \frac{hA}{24}(-55\beta^n + 59\beta^{n-1} - 37\beta^{n-2} + 9\beta^{n-3})$$

Dividiendo por β^{n-3} y trasponiendo:

$$\beta^4 - \beta^3 + \frac{hA}{24}(55\beta^3 - 59\beta^2 + 37\beta - 9) = 0 \quad (15)$$

La ecuación en diferencias (14) es estable si y solo si todas las raíces (reales e imaginarias) de la ecuación característica (15) tienen valor absoluto menor que 1. Dado que la ecuación (15) es de cuarto grado, es muy engorroso obtener una expresión analítica de sus raíces en términos de hA , pero puede ser resuelta numéricamente para diferentes valores de hA . La tabla (4) muestra las cuatro raíces β_1 , β_2 , β_3 y β_4 de (15) para valores de hA con incremento 0,05. Nótese como, a partir de $hA > 0,3$ aparece una raíz β_2 con módulo mayor que 1.

hA	β_1	β_2	β_3, β_4
0,05	0,9512	-0,3713	$0,1527 \pm 0,1725 i$
0,10	0,9048	-0,5234	$0,1947 \pm 0,2032 i$
0,15	0,8697	-0,6530	$0,2242 \pm 0,2232 i$
0,20	0,8189	-0,7729	$0,2479 \pm 0,2389 i$
0,25	0,7792	-0,8879	$0,2679 \pm 0,2525 i$
0,30	0,7418	-1,0000	$0,2853 \pm 0,2650 i$
0,35	0,7069	-1,1104	$0,3007 \pm 0,2771 i$
0,40	0,6745	-1,2198	$0,3143 \pm 0,2890 i$

Tabla 4

De este análisis se concluye que el método de Adams – Bashforth de orden cuatro es inestable para la ecuación estable modelo para valores de hA por encima de 0,3. Como se ve, valores de h relativamente pequeños pueden dar lugar a la inestabilidad del método AB4. Por suerte, el método de Adams – Moulton presenta una mayor estabilidad. En efecto, la ecuación AM4:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2})$$

aplicada a la ecuación diferencial modelo:

$$\frac{dy}{dx} = -Ay \quad A > 0$$

da lugar al problema:
$$y_{n+1} = y_n + \frac{hA}{24}(-9y_{n+1} - 19y_n + 5y_{n-1} - y_{n-2}) \quad (16)$$

que es una ecuación en diferencias lineal y homogénea de tercer orden. Sus soluciones, del tipo $y_i = \beta^i$ se obtienen, igual que antes, sustituyendo en la última ecuación:

$$\beta^{n+1} = \beta^n + \frac{hA}{24}(-9\beta^{n+1} - 19\beta^n + 5\beta^{n-1} - \beta^{n-2})$$

Dividiendo por β^{n-2} y trasponiendo:

$$\beta^3 - \beta^2 + \frac{hA}{24}(9\beta^3 + 19\beta^2 - 5\beta + 1) = 0 \quad (17)$$

La ecuación (16) es estable si las raíces de la ecuación característica (17) son menores que 1 en valor absoluto. La tabla 5 muestra las tres raíces de la ecuación (17) para valores de hA tomados con incremento 0,5. A partir de $hA = 3$ comienza la zona de inestabilidad del método de AM4.

hA	β_1	β_2	β_3
0,0	1,0000	0,0000	0,0000
0,5	0,6058	0,1285	-0,2255
1,0	0,3333	0,2240	-0,6530
1,5	0,2309 + 0,1242 i	0,2309 - 0,1242 i	-0,5819
2,0	0,2039 + 0,1505 i	0,2039 - 0,1505 i	-0,7412
2,5	0,1874 + 0,1611 i	0,1874 + 0,1611 i	-0,8801
3,0	0,1765 + 0,1664 i	0,1765 - 0,1664 i	-1,0000
3,5	0,1688 + 0,1693 i	0,1688 - 0,1693 i	-1,1033
4,0	0,1631 + 0,1711 i	0,1631 - 0,1711 i	-1,1929

Tabla 5

Al aplicar el método predictor – corrector de Adams de orden 4, puesto que la ecuación predictora se utiliza solamente para hallar una aproximación inicial para comenzar el proceso iterativo de Adams – Moulton, la inestabilidad viene determinada por este último algoritmo y no por la ecuación de Adams – Bashforth.

Ejemplo 4

Resuelva el problema de Cauchy:

$$\frac{dy}{dx} = -y \quad y(0) = 1$$

con paso $h = 0,5$ en el intervalo $0 \leq x \leq 7$ utilizando a) El método de Adams – Bashforth de orden cuatro; b) El método predictor – corrector de Adams de orden cuatro. Compare con la solución exacta $y = e^{-x}$.

Solución:

La tabla 6 muestra todos los resultados obtenidos. En ambos casos, los tres primeros puntos de la solución numérica fueron calculados con RK4. El método predictor – corrector (ABM4) se aplicó utilizando, en cada paso, una sola vez la ecuación correctora de Adams – Moulton. Como se ve, el método de Adams – Bashforth presenta inestabilidad ($hA = 0,5 > 0,3$) lo cual se manifiesta en errores que crecen con gran rapidez hasta el punto de que ya el tercer punto de la solución hallado por AB4 no tienen ninguna cifra significativa exacta (el error alterna su signo debido a que la raíz

de la ecuación característica con módulo mayor que 1 es negativa). El método de Adams – Moulton, por el contrario, se encuentra en su zona de estabilidad ($hA = 0,5 < 3$) y por ello, se obtiene la solución con tres cifras decimales exactas, a pesar de que el paso tomado es mucho mayor que lo recomendable para este ejemplo.

x	$y(x)$	AB4	Error en AB4	ABM4	Error en ABM4
0,0	1,000000	1,000000	0,000000	1,000000	0,000000
0,5	0,606531	0,606771	-0,000240	0,606771	-0,000240
1,0	0,367879	0,368171	-0,000292	0,368171	-0,000292
1,5	0,223130	0,223395	-0,000265	0,223395	-0,000265
2,0	0,135335	0,139746	-0,004411	0,134476	-0,000859
2,5	0,082085	0,084182	-0,002097	0,080918	-0,001167
3,0	0,049787	0,056326	-0,006539	0,048806	-0,000981
3,5	0,030197	0,029425	0,000772	0,029382	-0,000815
4,0	0,018316	0,026255	-0,007939	0,017672	-0,000944
4,5	0,011109	0,004706	0,006403	0,010642	-0,000437
5,0	0,006738	0,019464	-0,012726	0,006407	-0,000331
5,5	0,004087	-0,011755	0,015842	0,003855	-0,000232
6,0	0,002479	0,026937	-0,024458	0,002320	-0,000159
6,5	0,001503	-0,032523	0,034026	0,001397	-0,000106
7,0	0,000912	0,050579	-0,049667	0,000841	-0,000071

Tabla 6

Ejercicios

1. Dada la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - y^2 \quad y(1) = 0,8$$

Obtenga su solución en el intervalo $1 \leq x \leq 3$ mediante el método de Adams – Bashforth con 4 cifras decimales exactas.

2. Dada la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \quad y(1) = 0,8$$

Obtenga su solución en el intervalo $1 \leq x \leq 1,5$ mediante el método de Adams – Bashforth con error absoluto menor que 0,0001. Compare con el resultado del ejercicio anterior y explique.

3. Resuelva la ecuación diferencial

$$(e^x + y)dx - (y^2 + 1)dy = 0 \quad y(0) = 1$$

utilizando el método predictor – corrector de Adams de orden 4. Obtenga la solución con cuatro cifras decimales exactas en el intervalo $0 \leq x \leq 2$.

4. Se sabe que las variables ρ y θ están ligadas por la ecuación:

$$\rho^2 \cos \theta d\theta + (\rho + \theta)e^\theta d\rho = 0$$

y que para $\theta = \pi/6$ la variable ρ toma el valor 2. Determine, con cuatro cifras decimales exactas el valor que toma ρ para $\theta = \pi/4$. Utilice el método predictor – corrector de Adams de orden 4.

5. Un cubito de azúcar de 10 g se coloca en un gran recipiente de agua. Se quiere conocer su velocidad al cabo de dos segundos, sabiendo que la fuerza de empuje es 0,4 veces la fuerza peso, que la fuerza resistiva es proporcional a la velocidad (coeficiente 0,8) y que la masa del cubito disminuye a razón de dos gramos por segundo debido a la disolución del azúcar en el agua. Obtenga la respuesta en cm/s mediante el método predictor – corrector de Adams de orden cuatro con dos cifras decimales exactas. Nota: La segunda ley de Newton para la Mecánica, en su forma general, establece que

$$F = \frac{d(mv)}{dt}$$

6. Una curva pasa por el punto (1, 2). Se sabe, además, que esta curva posee la propiedad de que la recta tangente a ella en un punto cualquiera P corta al eje x en un punto A y al eje y en un punto B tales que, P es el punto medio del segmento AB . Se quiere conocer en que punto esta curva corta a la recta $x = 3$. Obtenga la solución con cuatro cifras decimales exactas mediante el método predictor – corrector de Adams de orden cuatro.
7. Elabore un algoritmo en pseudo código para el método predictor – corrector tomando como ecuación predictora la de Adams – Bashforth de orden 2 y como ecuación correctora la de Adams – Moulton de orden 2.

7.5 Ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales

En esta sección se trata acerca de la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior y de otros problemas equivalentes a ellas. Para resolver estas ecuaciones se requiere conocer tantos valores de la variable dependiente como orden posee la ecuación. Si todas las condiciones vienen dadas para el mismo valor de la variable independiente, este valor se toma como *inicial* y el problema se llama *de condiciones iniciales*. Este será el caso que será tratado ahora.

La estrategia que se sigue para resolver numéricamente este tipo de problema es transformarlo en un cierto tipo de sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden con condiciones iniciales, el cual, después, se resuelve aplicando cualquiera de los métodos numéricos desarrollados en las secciones anteriores, a los cuales se les modifica ligeramente. Por esta razón se verá a continuación que características deben poseer estos sistemas y cómo una ecuación diferencial de orden superior se puede transformar en tal sistema.

Problema de Cauchy de orden m

Considérese el sistema de m ecuaciones diferenciales del siguiente tipo:

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{dx} &= f_1(x, u_1, u_2, \dots, u_m) \\ \frac{du_2}{dx} &= f_2(x, u_1, u_2, \dots, u_m) \\ &\vdots \\ \frac{du_m}{dx} &= f_m(x, u_1, u_2, \dots, u_m)\end{aligned}$$

con las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}u_1(x_0) &= u_{10} \\ u_2(x_0) &= u_{20} \\ &\vdots \\ u_m(x_0) &= u_{m0}\end{aligned}$$

donde $u_1, u_2, \dots, u_m$ son funciones desconocidas de la variable independiente x mientras que $x_0, u_{10}, u_{20}, \dots, u_{m0}$ son números reales conocidos. Observe que no se trata de un sistema cualquiera de ecuaciones diferenciales; debe tener las siguientes características:

- El sistema contiene tantas ecuaciones diferenciales como variables dependientes.
- Existe solamente una variable independiente.
- Todas las ecuaciones son de primer orden.
- En la ecuación número i existe una sola derivada que corresponde a la variable u_i .
- La derivada que contiene cada ecuación aparece despejada en uno de los miembros de la ecuación.
- Para un valor x_0 de la variable independiente se conoce el valor que toman todas las variables dependientes.

A un sistema de ecuaciones diferenciales con todas estas características se le llamará un *problema de Cauchy de orden m* .

Ejemplo 1

De los siguientes sistemas de ecuaciones, diga cuáles son problemas de Cauchy y cuáles no. Cuando no lo sea, analice si se puede transformar en un problemas de Cauchy.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{dx}{dt} &= x - ty + 2 & x(3) &= 0 \\ \frac{dy}{dt} &= xy - e^t \cos xy - y & y(3) &= -1,8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{dv_1}{dx} &= v_1 v_3 + x & v_1(0) &= 2 \\ \frac{dv_2}{dx} &= v_1 - 2 & v_2(0) &= 5 \\ \frac{dv_3}{dx} &= x^2 - v_3 & v_3(0,4) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{dy}{dx} + 4 \frac{dz}{dx} &= 3xy - z & y(1) &= 3 \\ \frac{dz}{dx} - \frac{dy}{dx} &= \tan x & z(1) &= 4 \end{aligned}$$

Solución:

- a) Se trata de un problema de Cauchy de orden 2. Las variables dependientes son x y y mientras la variable independiente es t . El valor inicial de la variable independiente es $t_0 = 3$.
- b) No es un problema de Cauchy porque no satisface la condición de que los valores conocidos de las tres variables dependientes ocurran para el mismo valor inicial de la variable independiente. Si se pudiera conocer el valor de $v_3(0)$ se tendría un problema de Cauchy de orden 3.
- c) No es un problema de Cauchy, aunque es un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden con condiciones iniciales. Las ecuaciones no tienen la forma requerida ya que en ellas aparece más de una derivada. Sin embargo, el sistema se puede convertir en un problema de Cauchy de la siguiente forma:

Sumando miembro a miembro ambas ecuaciones, se obtiene:

$$5 \frac{dz}{dx} = 3xy - z + \tan x$$

Es decir:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{3xy - z + \tan x}{5} \quad (1)$$

Restando a la primera ecuación, 4 veces la segunda, resulta:

$$5 \frac{dy}{dx} = 3xy - z - 4 \tan x$$

o, lo que es igual:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3xy - z - 4 \tan x}{5} \quad (2)$$

El sistema formado por (1) y (2) con las condiciones iniciales dadas:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{3xy - z - 4 \tan x}{5} \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{3xy - z + \tan x}{5} \\ y(1) &= 3 \\ z(1) &= 4\end{aligned}$$

es un problema de Cauchy de orden 2, equivalente al sistema original.

Transformación de una ecuación de orden m en un problema de Cauchy

Casi todas las ecuaciones diferenciales de orden m con condiciones iniciales pueden ser transformadas en problemas de Cauchy de orden m . Todo lo que se requiere es que la ecuación diferencial pueda ser expresada en la forma que sigue:

$$\begin{aligned}\frac{d^m y}{dx^m} &= G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}\right) \\ y(x_0) &= c_1 \\ y'(x_0) &= c_2 \\ &\vdots \\ y^{(m-1)}(x_0) &= c_m\end{aligned}\tag{3}$$

lo cual se puede resumir en dos características:

- La ecuación posee condiciones iniciales.
- La derivada de mayor orden (m) puede ser despejada.

Para transformar una ecuación del tipo (3) en un problema de Cauchy de orden m se introducen m nuevas variables $u_1, u_2, \dots, u_m$ definidas como sigue:

$$\begin{aligned}u_1 &= y \\ u_2 &= \frac{dy}{dx} \\ u_3 &= \frac{d^2 y}{dx^2} \\ &\vdots \\ u_m &= \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}\end{aligned}\tag{4}$$

Derivando respecto a x en ambos miembros de la primera ecuación y teniendo en cuenta la segunda, se tiene:

$$\frac{du_1}{dx} = u_2\tag{5}$$

Derivando respecto a x en ambos miembros de la segunda ecuación de (4) y teniendo en cuenta la tercera, se tiene:

$$\frac{du_2}{dx} = u_3 \quad (6)$$

Este procedimiento se repite hasta derivar en ambos miembros la penúltima de las ecuaciones (4) tomando en cuenta la última, para obtener:

$$\frac{du_{m-1}}{dx} = u_m \quad (7)$$

Ahora, se deriva en ambos miembros la última de las ecuaciones (4) y resulta:

$$\frac{du_m}{dx} = \frac{d^m y}{dx^m}$$

y, utilizando la ecuación diferencial (3), se puede escribir:

$$\frac{du_m}{dx} = G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}\right)$$

La función G puede expresarse en términos de las nuevas variables $u_1, u_2, \dots, u_m$ definidas en (4) y se tiene:

$$\frac{du_m}{dx} = G(x, u_1, u_2, u_3, \dots, u_m) \quad (8)$$

Las ecuaciones (5), (6), ..., (7), (8) forman el sistema:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dx} &= u_2 \\ \frac{du_2}{dx} &= u_3 \\ &\vdots \\ \frac{du_{m-1}}{dx} &= u_m \\ \frac{du_m}{dx} &= G(x, u_1, u_2, \dots, u_m) \end{aligned} \quad (9)$$

Por su parte, las condiciones iniciales del problema original, dan lugar, teniendo presentes de nuevo las fórmulas (4), en condiciones iniciales para las variables $u_1, u_2, \dots, u_m$:

$$\begin{aligned} u_1(x_0) &= c_1 \\ u_2(x_0) &= c_2 \\ &\vdots \\ u_m(x_0) &= c_m \end{aligned} \quad (10)$$

Es evidente que el sistema (9) con las condiciones iniciales (10) forman un problema de Cauchy de orden m .

Ejemplo 2

Transforme la siguiente ecuación diferencial con condiciones iniciales en un problema de Cauchy.

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + e^x \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{dy}{dx} - x \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)^2 = \cos y - 4xy$$

$$y(2) = 1,5$$

$$y'(2) = 3,1$$

$$y''(2) = -0,8$$

$$y'''(2) = 3,7$$

Solución:

A pesar de que se trata de una ecuación diferencial no lineal de gran complejidad, cuya solución analítica resulta imposible, es fácil expresarla en la forma requerida, pues la cuarta derivada puede ser despejada sin dificultad:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \cos y - 4xy - e^x \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{dy}{dx} + x \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)^2$$

Las nuevas variables u_1, u_2, u_3, u_4 se definen como:

$$u_1 = y$$

$$u_2 = y'$$

$$u_3 = y''$$

$$u_4 = y'''$$

Derivando en ambos miembros de cada una de estas ecuaciones y tomando en cuenta la ecuación siguiente y la propia ecuación diferencial, se obtiene el nuevo sistema:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dx} &= u_2 \\ \frac{du_2}{dx} &= u_3 \\ \frac{du_3}{dx} &= u_4 \\ \frac{du_4}{dx} &= \cos u_1 - 4xu_1 - e^x u_2 u_3 + x(u_4)^2 \end{aligned} \quad (11)$$

con las condiciones iniciales:

$$u_1(2) = 1,5$$

$$u_2(2) = 3,1$$

$$u_3(2) = -0,8$$

$$u_4(2) = 3,7$$

(12)

El sistema (11) con las condiciones iniciales (12) constituyen un problema de Cauchy de cuarto orden. ■

No solo las ecuaciones diferenciales de orden superior con condiciones iniciales pueden ser transformadas en problemas de Cauchy, en muchos casos también puede hacerse con sistemas de ecuaciones diferenciales de orden superior con condiciones iniciales, como se indica en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3

Transforme en un problema de Cauchy el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}y'''(t) + z'(t)y''(t) &= z(t)y(t) + t^3 y'(t) \\ z''(t)y''(t) &= y'(t)z'(t) + y(t)\ln t\end{aligned}$$

$$y(1,5) = 3$$

$$y'(1,5) = 2$$

$$y''(1,5) = -1$$

$$z(1,5) = 0$$

$$z'(1,5) = 1$$

Solución:

Despejando $y'''(t)$ en la primera ecuación y $z''(t)$ en la segunda, el sistema queda:

$$y'''(t) = z(t)y(t) + t^3 y'(t) - z'(t)y''(t)$$

$$z''(t) = \frac{y'(t)z'(t) + y(t)\ln t}{y''(t)}$$

Sean u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 , definidas como:

$$u_1 = y$$

$$u_2 = y'$$

$$u_3 = y''$$

$$u_4 = z$$

$$u_5 = z'$$

Ahora se deriva en ambos miembros de cada ecuación y, teniendo en cuenta o bien la ecuación siguiente o una de las ecuaciones del sistema, resulta:

$$\begin{aligned}
\frac{du_1}{dt} &= u_2 \\
\frac{du_2}{dt} &= u_3 \\
\frac{du_3}{dt} &= u_1 u_4 + t^3 u_2 - u_3 u_5 \\
\frac{du_4}{dt} &= u_5 \\
\frac{du_5}{dt} &= \frac{u_2 u_5 + u_1 \ln t}{u_3}
\end{aligned}$$

Con las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}
u_1(1,5) &= 3 \\
u_2(1,5) &= 2 \\
u_3(1,5) &= -1 \\
u_4(1,5) &= 0 \\
u_5(1,5) &= 1
\end{aligned}$$

que es un problema de Cauchy de orden cinco.

Solución numérica de un problema de Cauchy

Cualquiera de los métodos estudiados para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden puede ser adaptado para resolver problemas de Cauchy de orden m , solamente hay que realizar el siguiente cambio. Si el método que se va a emplear consta de varias etapas en cada paso (por ejemplo, RK2 consta de tres etapas en cada paso: calcular K_1 , calcular K_2 y hallar y_{n+1}) entonces en cada paso de la solución del problema de Cauchy, se aplica la etapa 1 a las m ecuaciones, después, la etapa 2 a todas las ecuaciones, etc. hasta aplicar la última etapa a todas las ecuaciones y con esto queda terminado un paso.

Debido a que poseen una estructura más simple, aquí solamente serán empleados los métodos de Runge – Kutta de orden 2 y 4 para la solución de problemas de Cauchy de orden m , que son los más frecuentemente usados.

El método RK2 para un problema de Cauchy de orden m

Sea el problema de Cauchy:

$$\begin{aligned}
\frac{du_1}{dx} &= f_1(x, u_1, u_2, \dots, u_m) & u_1(x_0) &= u_{10} \\
\frac{du_2}{dx} &= f_2(x, u_1, u_2, \dots, u_m) & u_2(x_0) &= u_{20} \\
&\vdots & & \vdots \\
\frac{du_m}{dx} &= f_m(x, u_1, u_2, \dots, u_m) & u_m(x_0) &= u_{m0}
\end{aligned}$$

Suponga que las variables $u_1, u_2, \dots, u_m$, han sido calculadas hasta el paso número n , es decir que se conocen los valores $u_{1n}, u_{2n}, \dots, u_{mn}$ y se trata de determinar $u_{1,n+1}, u_{2,n+1}, \dots, u_{m,n+1}$ mediante un paso del método RK2. Este paso consta de tres etapas:

Etapla 1: Calcular las K_1 :

$$\begin{aligned} K_{11} &= hf_1(x_n, u_{1n}, u_{2n}, \dots, u_{mn}) \\ K_{12} &= hf_2(x_n, u_{1n}, u_{2n}, \dots, u_{mn}) \\ &\vdots \\ K_{1m} &= hf_m(x_n, u_{1n}, u_{2n}, \dots, u_{mn}) \end{aligned}$$

Etapla 2: Calcular las K_2 :

$$\begin{aligned} K_{21} &= hf_1(x_n + h, u_{1n} + K_{11}, u_{2n} + K_{12}, \dots, u_{mn} + K_{1m}) \\ K_{22} &= hf_2(x_n + h, u_{1n} + K_{11}, u_{2n} + K_{12}, \dots, u_{mn} + K_{1m}) \\ &\vdots \\ K_{2m} &= hf_m(x_n + h, u_{1n} + K_{11}, u_{2n} + K_{12}, \dots, u_{mn} + K_{1m}) \end{aligned}$$

Etapla 3: Hallar la solución en x_{n+1} :

$$\begin{aligned} u_{1,n+1} &= u_{1n} + \frac{1}{2}(K_{11} + K_{21}) \\ u_{2,n+1} &= u_{2n} + \frac{1}{2}(K_{12} + K_{22}) \\ &\vdots \\ u_{m,n+1} &= u_{mn} + \frac{1}{2}(K_{1m} + K_{2m}) \end{aligned}$$

Ejemplo 4

Dado el problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dx} &= x + u_2 - u_1 u_3 & u_1(1,4) &= 3 \\ \frac{du_2}{dx} &= x u_3 & u_2(1,4) &= 1,7 \\ \frac{du_3}{dx} &= u_1 + u_2 - u_3 & u_3(1,4) &= 2,5 \end{aligned}$$

Calcule dos pasos de la solución mediante RK2 tomando $h = 0,2$.

Solución:

$$x_0 = 1,4; \quad u_{10} = 3; \quad u_{20} = 1,7; \quad u_{30} = 2,5$$

Paso 1

Etapla 1: Calcular las K_1 :

$$\begin{aligned} K_{11} &= hf_1(x_0, u_{10}, u_{20}, u_{30}) = hf_1(1,4; 3; 1,7; 2,5) = 0,2(1,4 + 1,7 - (3)(2,5)) = -0,88 \\ K_{12} &= hf_2(x_0, u_{10}, u_{20}, u_{30}) = hf_2(1,4; 3; 1,7; 2,5) = 0,2(1,4)(2,5) = 0,7 \\ K_{13} &= hf_m(x_0, u_{10}, u_{20}, u_{30}) = hf_3(1,4; 3; 1,7; 2,5) = 0,2(3 + 1,7 - 2,5) = 0,44 \end{aligned}$$

Etapa 2: Calcular las K_2 :

$$\begin{aligned} K_{21} &= hf_1(x_0 + h, u_{10} + K_{11}, u_{20} + K_{12}, u_{30} + K_{13}) = hf_1(1,6; 2,12; 2,4; 2,94) = \\ &= 0,2(1,6 + 2,4 - (2,12)(2,94)) = -0,4466 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{22} &= hf_2(x_0 + h, u_{10} + K_{11}, u_{20} + K_{12}, u_{30} + K_{13}) = hf_2(1,6; 2,12; 2,4; 2,94) = \\ &= 0,2(1,6)(2,94) = 0,9408 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{23} &= hf_3(x_0 + h, u_{10} + K_{11}, u_{20} + K_{12}, u_{30} + K_{13}) = hf_3(1,6; 2,12; 2,4; 2,94) = \\ &= 0,2(2,12 + 2,4 - 2,94) = 0,316 \end{aligned}$$

Etapa 3: Hallar la solución en x_1 :

$$\begin{aligned} u_{11} &= u_{10} + \frac{1}{2}(K_{11} + K_{21}) = 3 + \frac{1}{2}(-0,88 - 0,4466) = 2,3367 \\ u_{21} &= u_{20} + \frac{1}{2}(K_{12} + K_{22}) = 1,7 + \frac{1}{2}(0,7 + 0,9408) = 2,5204 \\ u_{31} &= u_{30} + \frac{1}{2}(K_{13} + K_{23}) = 2,5 + \frac{1}{2}(0,44 + 0,316) = 2,8780 \end{aligned}$$

$$x_1 = 1,6; \quad u_{11} = 2,3367; \quad u_{21} = 2,5204; \quad u_{31} = 2,8780$$

Paso 2

Etapa 1: Calcular las K_1 :

$$\begin{aligned} K_{11} &= hf_1(x_1, u_{11}, u_{21}, u_{31}) = hf_1(1,6; 2,3367; 2,5204; 2,878) = \\ &= 0,2(1,6 + 2,5204 - (2,3367)(2,878)) = -0,5209 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{12} &= hf_2(x_1, u_{11}, u_{21}, u_{31}) = hf_2(1,6; 2,3367; 2,5204; 2,878) = \\ &= 0,2(1,6)(2,878) = 0,9210 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{13} &= hf_m(x_1, u_{11}, u_{21}, u_{31}) = hf_3(1,6; 2,3367; 2,5204; 2,878) = \\ &= 0,2(2,3367 + 2,5204 - 2,878) = 0,3958 \end{aligned}$$

Etapa 2: Calcular las K_2 :

$$\begin{aligned} K_{21} &= hf_1(x_1 + h, u_{11} + K_{11}, u_{21} + K_{12}, u_{31} + K_{13}) = hf_1(1,8; 1,8158; 3,4414; 3,2738) = \\ &= 0,2(1,8 + 3,4414 - (1,8158)(3,2738)) = -0,1406 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{22} &= hf_2(x_1 + h, u_{11} + K_{11}, u_{21} + K_{12}, u_{31} + K_{13}) = hf_2(1,8; 1,8158; 3,4414; 3,2738) = \\ &= 0,2(1,8)(3,2738) = 1,1786 \end{aligned}$$

$$K_{23} = hf_3(x_1 + h, u_{11} + K_{11}, u_{21} + K_{12}, u_{31} + K_{13}) = hf_3(1,8; 1,8158; 3,4414; 3,2738) =$$

$$= 0,2(1,8158 + 3,4414 - 3,2738) = 0,3967$$

Etapla 3: Hallar la solución en x_2 :

$$u_{12} = u_{11} + \frac{1}{2}(K_{11} + K_{21}) = 2,3367 + \frac{1}{2}(-0,5209 - 0,1406) = 2,0060$$

$$u_{22} = u_{21} + \frac{1}{2}(K_{12} + K_{22}) = 2,5204 + \frac{1}{2}(0,9210 + 1,1786) = 3,5702$$

$$u_{32} = u_{31} + \frac{1}{2}(K_{13} + K_{23}) = 2,878 + \frac{1}{2}(0,3958 + 0,3967) = 3,2742$$

$$x_2 = 1,8; \quad u_{12} = 2,0060; \quad u_{22} = 3,5702; \quad u_{32} = 3,2742$$

La solución manual de este ejercicio solo tiene un propósito didáctico pues, como se aprecia, los cálculos son voluminosos pero el algoritmo es sencillo, condiciones ideales para utilizar un programa de computadora.

Algoritmo en pseudo código

El algoritmo que sigue obtiene la solución aproximada del problema de Cauchy

$$\begin{array}{ll} \frac{du_1}{dx} = f_1(x, u_1, u_2, \dots, u_m) & u_1(x_0) = u_{10} \\ \frac{du_2}{dx} = f_2(x, u_1, u_2, \dots, u_m) & u_2(x_0) = u_{20} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{du_m}{dx} = f_m(x, u_1, u_2, \dots, u_m) & u_m(x_0) = u_{m0} \end{array}$$

en un intervalo $x_0 \leq x \leq x_F$ con paso $h > 0$ mediante el método RK2. Se suponen conocidos: las funciones $f_1(x, u_1, u_2, \dots, u_m), f_2(x, u_1, u_2, \dots, u_m), \dots, f_m(x, u_1, u_2, \dots, u_m)$, las condiciones iniciales $(x_0, u_{10}, u_{20}, \dots, u_{m0})$ el valor final x_F y el paso h .

```

n := 0
do while  $x_n < x_F$ 
     $(x_n, u_{1n}, u_{2n}, \dots, u_{mn})$  es un punto de la solución aproximada
    for i = 1 to m
         $K_{1i} := hf_i(x_n, u_{1n}, u_{2n}, \dots, u_{mn})$ 
    end
    for i = 1 to m
         $K_{2i} := hf_i(x_n + h, u_{1n} + K_{11}, u_{2n} + K_{12}, \dots, u_{mn} + K_{1m})$ 
    end
    for i = 1 to m
         $u_{i,n+1} := u_{i,n} + \frac{1}{2}(K_{1i} + K_{2i})$ 
    end
     $x_{n+1} := x_n + h$ 
    n := n + 1
end
Terminar

```

Estimación del error por doble cálculo

La expresión obtenida para hallar el error por doble cálculo en el caso de una ecuación diferencial de primer orden

$$e_h \approx \frac{y_h - y_{2h}}{2^p - 1}$$

puede ser extendida al problema de Cauchy de orden m . Los detalles de la deducción serán omitidos. Sea $\mathbf{u}_h$ el vector de soluciones obtenidos para un cierto valor x utilizando paso h con un método de orden p (en el caso de RK2, $p = 2$) y sea $\mathbf{u}_{2h}$ el vector de soluciones correspondiente al mismo valor x pero calculado con paso $2h$, entonces, si $\mathbf{e}_h$ representa al vector de errores correspondiente a $\mathbf{u}_h$, puede probarse que

$$\|\mathbf{e}_h\| \approx \frac{\|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_{2h}\|}{2^p - 1} \quad (13)$$

donde, como se recordará de la sección 3.1, la notación $\|\mathbf{x}\|$ significa la norma del vector $\mathbf{x}$, es decir, el mayor valor absoluto de las componentes del vector $\mathbf{x}$.

Observe que la fórmula (13) establece una manera de estimar la mayor componente del vector de errores, esto significa que se obtiene realmente una cota superior para los errores de las variables $u_1, u_2, \dots, u_m$.

Para el método RK2, como $p = 3$, la fórmula (13) resulta:

$$\|\mathbf{e}_h\| \approx \frac{\|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_{2h}\|}{3} \quad (14)$$

Ejemplo 5

Resuelva el problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dx} &= x + u_2 - u_1 u_3 & u_1(1,4) &= 3 \\ \frac{du_2}{dx} &= x u_3 & u_2(1,4) &= 1,7 \\ \frac{du_3}{dx} &= u_1 + u_2 - u_3 & u_3(1,4) &= 2,5 \end{aligned}$$

En el intervalo $1,4 \leq x \leq 3$ con pasos $h = 0,1$ y $h = 0,2$. Muestre las soluciones obtenidas y una cota del error para $x = 1,8; 2,0; 2,2; 2,4; 2,6; 2,8$ y $3,0$.

Solución:

En la tabla 1 se muestran los resultados pedidos. Aparecen marcados con * los valores de las variables que sirvieron para calcular la cota del error debido a que con ellos se obtiene la máxima diferencia entre las soluciones halladas.

x	$h = 0,1$			$h = 0,2$			Cota del error
	u_1	u_2	u_3	u_1	u_2	u_3	
1,4	3,0000	1,7000	2,5000	3,0000	1,7000	2,5000	0,0000
1,6	2,3114*	2,5141	2,8959	2,3367*	2,5204	2,8780	0,0084
1,8	1,9608*	3,5671	3,2985	2,0059*	3,5702	3,2742	0,0150
2,0	1,8524*	4,9132	3,8073	1,9014*	4,9065	3,7825	0,0163
2,2	1,8859*	6,6498	4,4981	1,9256*	6,6282	4,4726	0,0132
2,4	1,9819	8,9240*	5,4392	2,0055	8,8815*	5,4084	0,0142
2,6	2,0889	11,9441*	6,7064	2,0958	11,8706*	6,6628	0,0245
2,8	2,1830	15,9991*	8,4002	2,1751	15,8775*	8,3341	0,0405
3,0	2,2597	21,4922*	10,6629	2,2360	21,2944*	10,5611	0,0659

Tabla 1

El método RK4 para un problema de Cauchy de orden m

Se trata de nuevo del problema de Cauchy:

$$\begin{aligned}
 \frac{du_1}{dx} &= f_1(x, u_1, u_2, \dots, u_m) & u_1(x_0) &= u_{10} \\
 \frac{du_2}{dx} &= f_2(x, u_1, u_2, \dots, u_m) & u_2(x_0) &= u_{20} \\
 &\vdots & &\vdots \\
 \frac{du_m}{dx} &= f_m(x, u_1, u_2, \dots, u_m) & u_m(x_0) &= u_{m0}
 \end{aligned}$$

Se supone que las variables $u_1, u_2, \dots, u_m$, han sido calculadas hasta el paso número n , es decir que se conocen los valores $u_{1n}, u_{2n}, \dots, u_{mn}$ y se trata de determinar $u_{1,n+1}, u_{2,n+1}, \dots, u_{m,n+1}$ mediante un paso del método RK4. Este paso consta de cinco etapas:

Etapas 1: Calcular las K_1 :

$$\begin{aligned}
 K_{11} &= hf_1(x_n, u_{1n}, u_{2n}, \dots, u_{mn}) \\
 K_{12} &= hf_2(x_n, u_{1n}, u_{2n}, \dots, u_{mn}) \\
 &\vdots \\
 K_{1m} &= hf_m(x_n, u_{1n}, u_{2n}, \dots, u_{mn})
 \end{aligned}$$

Etapas 2: Calcular las K_2 :

$$\begin{aligned}
 K_{21} &= hf_1(x_n + \frac{1}{2}h, u_{1n} + \frac{1}{2}K_{11}, u_{2n} + \frac{1}{2}K_{12}, \dots, u_{mn} + \frac{1}{2}K_{1m}) \\
 K_{22} &= hf_2(x_n + \frac{1}{2}h, u_{1n} + \frac{1}{2}K_{11}, u_{2n} + \frac{1}{2}K_{12}, \dots, u_{mn} + \frac{1}{2}K_{1m}) \\
 &\vdots \\
 K_{2m} &= hf_m(x_n + \frac{1}{2}h, u_{1n} + \frac{1}{2}K_{11}, u_{2n} + \frac{1}{2}K_{12}, \dots, u_{mn} + \frac{1}{2}K_{1m})
 \end{aligned}$$

Etapla 3: Calcular las K_3 :

$$\begin{aligned} K_{31} &= hf_1(x_n + \frac{1}{2}h, u_{1n} + \frac{1}{2}K_{21}, u_{2n} + \frac{1}{2}K_{22}, \dots, u_{mn} + \frac{1}{2}K_{2m}) \\ K_{32} &= hf_2(x_n + \frac{1}{2}h, u_{1n} + \frac{1}{2}K_{21}, u_{2n} + \frac{1}{2}K_{22}, \dots, u_{mn} + \frac{1}{2}K_{2m}) \\ &\vdots \\ K_{3m} &= hf_m(x_n + \frac{1}{2}h, u_{1n} + \frac{1}{2}K_{21}, u_{2n} + \frac{1}{2}K_{22}, \dots, u_{mn} + \frac{1}{2}K_{2m}) \end{aligned}$$

Etapla 4: Calcular las K_4 :

$$\begin{aligned} K_{41} &= hf_1(x_n + h, u_{1n} + K_{31}, u_{2n} + K_{32}, \dots, u_{mn} + K_{3m}) \\ K_{42} &= hf_2(x_n + h, u_{1n} + K_{31}, u_{2n} + K_{32}, \dots, u_{mn} + K_{3m}) \\ &\vdots \\ K_{4m} &= hf_m(x_n + h, u_{1n} + K_{31}, u_{2n} + K_{32}, \dots, u_{mn} + K_{3m}) \end{aligned}$$

Etapla 5: Hallar la solución en x_{n+1} :

$$\begin{aligned} u_{1,n+1} &= u_{1n} + \frac{1}{6}(K_{11} + 2K_{21} + 2K_{31} + K_{41}) \\ u_{2,n+1} &= u_{2n} + \frac{1}{6}(K_{12} + 2K_{22} + 2K_{32} + K_{42}) \\ &\vdots \\ u_{m,n+1} &= u_{mn} + \frac{1}{6}(K_{1m} + 2K_{2m} + 2K_{3m} + K_{4m}) \end{aligned}$$

Ejemplo 6

Dado el problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dx} &= x + u_2 - u_1 u_3 & u_1(1,4) &= 3 \\ \frac{du_2}{dx} &= x u_3 & u_2(1,4) &= 1,7 \\ \frac{du_3}{dx} &= u_1 + u_2 - u_3 & u_3(1,4) &= 2,5 \end{aligned}$$

Calcule un paso de la solución mediante RK4 tomando $h = 0,2$.

Solución:

$$x_0 = 1,4; \quad u_{10} = 3; \quad u_{20} = 1,7; \quad u_{30} = 2,5$$

Etapla 1: Calcular las K_1 :

$$\begin{aligned} K_{11} &= hf_1(x_0, u_{10}, u_{20}, u_{30}) = hf_1(1,4; 3; 1,7; 2,5) = 0,2(1,4 + 1,7 - (3)(2,5)) = -0,88 \\ K_{12} &= hf_2(x_0, u_{10}, u_{20}, u_{30}) = hf_2(1,4; 3; 1,7; 2,5) = 0,2(1,4)(2,5) = 0,7 \\ K_{13} &= hf_3(x_0, u_{10}, u_{20}, u_{30}) = hf_3(1,4; 3; 1,7; 2,5) = 0,2(3 + 1,7 - 2,5) = 0,44 \end{aligned}$$

Etapla 2: Calcular las K_2 :

$$K_{21} = hf_1(x_0 + \frac{1}{2}h, u_{10} + \frac{1}{2}K_{11}, u_{20} + \frac{1}{2}K_{12}, u_{30} + \frac{1}{2}K_{13}) = hf_1(1,5; 2,56; 2,05; 2,72) =$$

$$= 0,2(1,5 + 2,05 - (2,56)(2,72)) = -0,6826$$

$$K_{22} = hf_2(x_0 + \frac{1}{2}h, u_{10} + \frac{1}{2}K_{11}, u_{20} + \frac{1}{2}K_{12}, u_{30} + \frac{1}{2}K_{13}) = hf_2(1,5; 2,56; 2,05; 2,72) =$$

$$= 0,2(1,5)(2,72) = 0,816$$

$$K_{23} = hf_3(x_0 + \frac{1}{2}h, u_{10} + \frac{1}{2}K_{11}, u_{20} + \frac{1}{2}K_{12}, u_{30} + \frac{1}{2}K_{13}) = hf_3(1,5; 2,56; 2,05; 2,72) =$$

$$= 0,2(2,56 + 2,05 - 2,72) = 0,378$$

Etapla 3: Calcular las K_3 :

$$K_{31} = hf_1(x_0 + \frac{1}{2}h, u_{10} + \frac{1}{2}K_{21}, u_{20} + \frac{1}{2}K_{22}, u_{30} + \frac{1}{2}K_{23}) = hf_1(1,5; 2,6587; 2,108; 2,689) =$$

$$= 0,2(1,5 + 2,108 - (2,6587)(2,689)) = -0,7082$$

$$K_{32} = hf_2(x_0 + \frac{1}{2}h, u_{10} + \frac{1}{2}K_{21}, u_{20} + \frac{1}{2}K_{22}, u_{30} + \frac{1}{2}K_{23}) = hf_2(1,5; 2,6587; 2,108; 2,689) =$$

$$= 0,2(1,5)(2,689) = 0,8067$$

$$K_{33} = hf_3(x_0 + \frac{1}{2}h, u_{10} + \frac{1}{2}K_{21}, u_{20} + \frac{1}{2}K_{22}, u_{30} + \frac{1}{2}K_{23}) = hf_3(1,5; 2,6587; 2,108; 2,689) =$$

$$= 0,2(2,6587 + 2,108 - 2,689) = 0,4155$$

Etapla 4: Calcular las K_4 :

$$K_{41} = hf_1(x_0 + h, u_{10} + K_{31}, u_{20} + K_{32}, u_{30} + K_{33}) = hf_1(1,6; 2,2918; 2,5067; 2,9155) =$$

$$= 0,2(1,6 + 2,5067 - (2,2918)(2,9155)) = -0,5150$$

$$K_{42} = hf_2(x_0 + h, u_{10} + K_{31}, u_{20} + K_{32}, u_{30} + K_{33}) = hf_2(1,6; 2,2918; 2,5067; 2,9155) =$$

$$= 0,2(1,6)(2,9155) = 0,9333$$

$$K_{43} = hf_3(x_0 + h, u_{10} + K_{31}, u_{20} + K_{32}, u_{30} + K_{33}) = hf_3(1,6; 2,2918; 2,5067; 2,9155) =$$

$$= 0,2(2,2918 + 2,5067 - 2,9155) = 0,3766$$

Etapla 5: Hallar la solución en x_1 :

$$u_{11} = u_{10} + \frac{1}{6}(K_{11} + 2K_{21} + 2K_{31} + K_{41}) = 2,3039$$

$$u_{21} = u_{20} + \frac{1}{6}(K_{12} + 2K_{22} + 2K_{32} + K_{42}) = 2,5131$$

$$u_{31} = u_{30} + \frac{1}{6}(K_{13} + 2K_{23} + 2K_{33} + K_{43}) = 2,9006$$

$$x_1 = 1,8; \quad u_{11} = 2,3039; \quad u_{21} = 2,5131; \quad u_{31} = 2,9006$$

Algoritmo en pseudo código

El algoritmo que sigue obtiene la solución aproximada del problema de Cauchy

$$\begin{array}{ll} \frac{du_1}{dx} = f_1(x, u_1, u_2, \dots, u_m) & u_1(x_0) = u_{10} \\ \frac{du_2}{dx} = f_2(x, u_1, u_2, \dots, u_m) & u_2(x_0) = u_{20} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{du_m}{dx} = f_m(x, u_1, u_2, \dots, u_m) & u_m(x_0) = u_{m0} \end{array}$$

en un intervalo $x_0 \leq x \leq x_F$ con paso $h > 0$ mediante el método RK4. Se suponen conocidos: las funciones $f_1(x, u_1, u_2, \dots, u_m), f_2(x, u_1, u_2, \dots, u_m), \dots, f_m(x, u_1, u_2, \dots, u_m)$, las condiciones iniciales $(x_0, u_{10}, u_{20}, \dots, u_{m0})$ el valor final x_F y el paso h .

```

n := 0
do while  $x_n < x_F$ 
     $(x_n, u_{1n}, u_{2n}, \dots, u_{mn})$  es un punto de la solución aproximada
    for i = 1 to m
         $K_{1i} := hf_i(x_n, u_{1n}, u_{2n}, \dots, u_{mn})$ 
    end
    for i = 1 to m
         $K_{2i} := hf_i(x_n + \frac{1}{2}h, u_{1n} + \frac{1}{2}K_{11}, u_{2n} + \frac{1}{2}K_{12}, \dots, u_{mn} + \frac{1}{2}K_{1m})$ 
    end
    for i = 1 to m
         $K_{3i} := hf_i(x_n + \frac{1}{2}h, u_{1n} + \frac{1}{2}K_{21}, u_{2n} + \frac{1}{2}K_{22}, \dots, u_{mn} + \frac{1}{2}K_{2m})$ 
    end
    for i = 1 to m
         $K_{4i} := hf_i(x_n + h, u_{1n} + K_{31}, u_{2n} + K_{32}, \dots, u_{mn} + K_{3m})$ 
    end
    for i = 1 to m
         $u_{i,n+1} := u_{i,n} + \frac{1}{6}(K_{1i} + 2K_{2i} + 2K_{3i} + K_{4i})$ 
    end
     $x_{n+1} := x_n + h$ 
    n := n + 1
end
Terminar

```

Estimación del error por doble cálculo

Como RK4 es un método de orden 4 ($p = 4$), la fórmula (13) resulta en:

$$\|e_h\| \approx \frac{\|u_h - u_{2h}\|}{15} \quad (15)$$

cuyos términos poseen el mismo significado que en la fórmula (14).

Ejemplo 7

Resuelva el problema de Cauchy

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{dx} &= x + u_2 - u_1 u_3 & u_1(1,4) &= 3 \\ \frac{du_2}{dx} &= x u_3 & u_2(1,4) &= 1,7 \\ \frac{du_3}{dx} &= u_1 + u_2 - u_3 & u_3(1,4) &= 2,5\end{aligned}$$

En el intervalo $1,4 \leq x \leq 3$ con pasos $h = 0,1$ y $h = 0,2$. Muestre las soluciones obtenidas y una cota del error para $x = 1,8; 2,0; 2,2; 2,4; 2,6; 2,8$ y $3,0$. Compare con los resultados obtenidos utilizando RK2 (Ejemplo 5).

Solución:

La tabla 2 muestra los resultados pedidos. Aparecen marcados con * los valores de las variables que sirvieron para calcular la cota del error debido a que con ellos se obtiene la máxima diferencia entre las soluciones halladas.

x	$h = 0,1$			$h = 0,2$			Cota del error
	u_1	u_2	u_3	u_1	u_2	u_3	
1,4	3,00000	1,70000	2,50000	3,00000	1,70000	2,50000	0,00000
1,6	2,30398	2,51286*	2,90072	2,30387	2,51306*	2,90061	0,00002
1,8	1,94825	3,56751*	3,30503	1,94848	3,56788*	3,30471	0,00003
2,0	1,83980*	4,91718	3,81401	1,84042*	4,91762	3,81360	0,00005
2,2	1,87693*	6,65901	4,50568	1,87771*	6,65943	4,50532	0,00006
2,4	1,97788*	8,94079	5,44932	1,97839*	8,94112	5,44914	0,00004
2,6	2,08906*	11,97229	6,72194	2,08872*	11,97251	6,72190	0,00003
2,8	2,18545*	16,04538	8,42471	2,18360*	16,04549	8,42480	0,00013
3,0	2,26299*	21,56742	10,70128	2,25883*	21,56736	10,70144	0,00028

Tabla 2

Si se comparan los errores de la tabla 2 con los obtenidos en la tabla 1, se verá que, ahora se han obtenido resultados mucho más exactos. Mientras en RK2 (vea la tabla 1) la mayor parte de los resultados solo tenían una cifra decimal exacta, en RK4 se obtuvo tres y hasta cuatro cifras decimales exactas. Por supuesto, debe tenerse en cuenta que el método RK4 requiere dos veces más cálculos que RK2.

Ejemplo 8

Según se estudió en la sección 7.1 (ejemplo 3) cuando un péndulo ideal de longitud L se mueve, lo hace de acuerdo con la ecuación diferencial:

$$-g \sin \theta = L \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

donde g es la aceleración producida por la fuerza de gravedad y θ es el ángulo de deflexión (en radianes) respecto a la posición de equilibrio (vea la figura 1). Un péndulo de $L = 0,5 \text{ m}$ se desplaza 45° de la vertical y se suelta. Halle su posición al cabo de dos segundos con un error menor que $0,0001$ radian. Utilice el método RK4. Suponga $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Compare gráficamente con la solución que se obtendría tomando la aproximación $\sin \theta \approx \theta$ que se hace frecuentemente para convertir la ecuación en lineal.

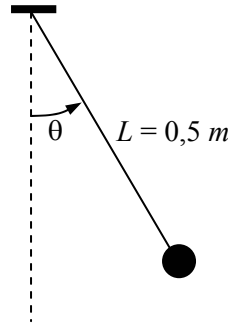


Figura 1

Solución:

Además de la ecuación diferencial, se requieren las condiciones iniciales del problema que, de acuerdo con el enunciado, son: posición inicial: $\theta = 45^\circ = \pi/4 \text{ Rad.} = 0,785398$ y velocidad angular inicial: cero. Por tanto, el problema a resolver es:

$$\begin{aligned} -9,8 \sin \theta &= 0,5 \frac{d^2 \theta}{dt^2} \\ \theta(0) &= 0,785398 \\ \theta'(0) &= 0 \end{aligned}$$

y se desea determinar $\theta(2)$ con error menor que $0,0001$.

Primero, el problema se debe transformar en un problema de Cauchy de orden 2. Para ello, se introducen las nuevas variables u_1 y u_2 definidas como:

$$\begin{aligned} u_1 &= \theta \\ u_2 &= \theta' \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= u_2 & u_1(0) &= 0,785398 \\ \frac{du_2}{dt} &= -19,6 \sin u_1 & u_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

En la tabla 3 se muestran los valores de u_1 y u_2 para $t = 2$, obtenidos con diferentes pasos, así como los errores estimados mediante doble cálculo.

h	$u_1(2)$	$u_2(2)$	Cota del error
0,2	-0,461014	-2,612360	
0,1	-0,484048	-2,637867	0,001700
0,05	-0,485493	-2,636478	0,000097

Tabla 3

Como se ve, al cabo de dos segundos el péndulo se encuentra formando un ángulo de 0,48549 radianes con la vertical y del lado opuesto (negativo) al lado en que se soltó. Como la variable u_2 coincide con θ' (velocidad angular), en el instante $t = 2$ el péndulo se está moviendo hacia la izquierda (contrario al sentido positivo de referencia de la figura 1) con una velocidad de 2,63648 radianes por segundo. En la figura 2 se encuentran, en un mismo sistema de ejes, la gráfica de $u_1(t)$ en el intervalo $0 \leq t \leq 2$ (con puntos más pequeños), construida a partir de los resultados numéricos obtenidos y la gráfica de la solución $u_1(t)$ (con puntos mayores) si se hubiera hecho la aproximación usual de $\sin \theta \approx \theta$ en el modelo del péndulo. Obsérvese que la diferencia entre ambos resultados es muy significativa.

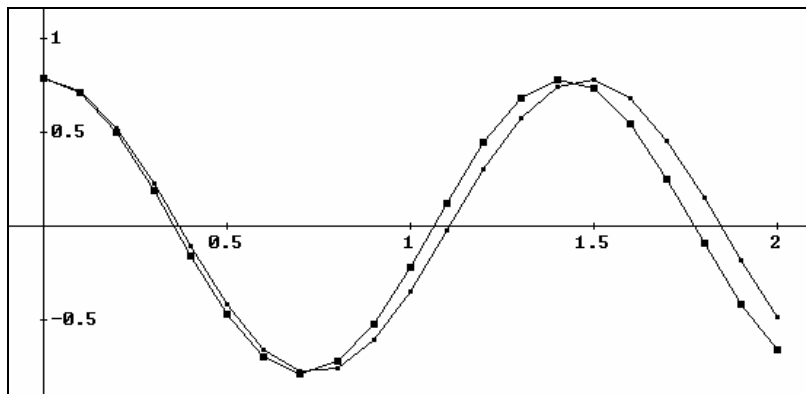


Figura 3

Ejercicios

1. Dado el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= x - w & v(0) &= 0 \\ \frac{dw}{dx} &= v & w(0) &= 1 \end{aligned}$$

Halle $v(0,6)$ y $w(0,6)$ con paso $h = 0,1$ mediante RK4 y estime el error cometido.

2. Dado el sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= x^2 + yt - 2 & x(1) &= 3 \\ \frac{dx}{dt} &= \operatorname{sen} x - xy & y(1) &= 2,5 \end{aligned}$$

Halle $x(2)$ y $y(2)$ con cuatro cifras decimales exactas.

3. Dada la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y \frac{dy}{dx} - x^2 y = x e^x \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 1,45$$

Halle la solución en el intervalo $[0, 1]$ de modo que $y(1)$ tenga tres cifras decimales exactas.

4. Resuelva la siguiente ecuación diferencial en el intervalo $1 \leq x \leq 3$. Muestre la solución en 1,5; 2,0; 2,5 y 3,0. La solución debe poseer cuatro cifras decimales exactas.

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + y \frac{dy}{dx} = x \quad y(1) = 2; \quad y'(1) = 3; \quad y''(1) = 1$$

5. Halle la solución de la ecuación diferencial:

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + 3xy \frac{dy}{dx} - \frac{d^2 y}{dx^2} = \operatorname{sen} x \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0; \quad y''(0) = 2$$

en el intervalo $[0, 2]$ con cuatro cifras decimales exactas.

6. Dado el sistema:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} + z \frac{dy}{dx} - \cos y &= e^{-z} & y(1,2) &= 1 \\ \frac{dz}{dx} - x \frac{dy}{dx} &= xyz & y'(1,2) &= 2 \\ & & z(1,2) &= 0,5 \end{aligned}$$

Halle la solución con tres cifras decimales exactas en el intervalo $[1,2; 2,1]$.

7. En el ejemplo 5 de la sección 7.1 se llegó al siguiente modelo matemático para el movimiento de un planeta alrededor del sol.

$$\begin{cases} -\frac{km_s x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{d^2 x}{dt^2} \\ -\frac{km_s y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{d^2 y}{dt^2} \end{cases} \quad \begin{aligned} x(0) &= r_0 \\ y(0) &= 0 \\ v_x(0) &= v_{0x} \\ v_y(0) &= v_{0y} \end{aligned}$$

donde m_s es la masa del sol, k es la constante de gravitación universal y v_x y v_y son las componentes de la velocidad del planeta en el instante inicial. Transforme este sistema en un problema de Cauchy.

8. En el ejemplo 4 de la sección 7.1, se mostró el modelo de Lotka – Volterra para dos poblaciones $x(t)$ de presas y $y(t)$ de depredadores:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases}$$

Suponga que en una isla hay un área protegida donde habitan lobos y alces. Los alces se alimentan del bosque y los lobos se alimentan de los alces. A partir de datos históricos se han determinado las constantes del modelo para esta situación específica: $a = 0,3$; $b = 0,01111$; $c = 0,2106$; $d = 0,00002632$. Se sabe, por un censo realizado este año, que existen en la isla 577 alces y 50 lobos. Haga una predicción de cuantos alces y lobos habrá dentro de 15 años y dentro de 28 años.

9. Un bloque de masa 1 Kg se encuentra sobre un piso horizontal. Entre el bloque y la pared hay un resorte ($k = 10$ newton/m). En el instante $t = 0$ el bloque es desplazado de manera que el muelle se comprime 20 cm y entonces se suelta el bloque. Suponga que la fuerza resistiva del medio es proporcional al cuadrado de la velocidad (coeficiente 0,3). Halle cuánto se ha desplazado el bloque al cabo de un segundo y cuál es su velocidad en ese instante. Obtenga su respuesta con tres cifras decimales exactas.
10. El algoritmo en pseudo código que sigue es una variación al mostrado en esta sección para el método RK4 para problemas de Cauchy de orden m . Explique por que este algoritmo no funciona.

```

n := 0
do while  $x_n < x_F$ 
    ( $x_n, u_{1n}, u_{2n}, \dots, u_{mn}$ ) es un punto de la solución aproximada
    for i = 1 to m
         $K_{1i} := hf_i(x_n, u_{1n}, u_{2n}, \dots, u_{mn})$ 
         $K_{2i} := hf_i(x_n + \frac{1}{2}h, u_{1n} + \frac{1}{2}K_{11}, u_{2n} + \frac{1}{2}K_{12}, \dots, u_{mn} + \frac{1}{2}K_{1m})$ 
         $K_{3i} := hf_i(x_n + \frac{1}{2}h, u_{1n} + \frac{1}{2}K_{21}, u_{2n} + \frac{1}{2}K_{22}, \dots, u_{mn} + \frac{1}{2}K_{2m})$ 
         $K_{4i} := hf_i(x_n + h, u_{1n} + K_{31}, u_{2n} + K_{32}, \dots, u_{mn} + K_{3m})$ 
         $u_{i,n+1} := u_{i,n} + \frac{1}{6}(K_{1i} + 2K_{2i} + 2K_{3i} + K_{4i})$ 
    end
     $x_{n+1} := x_n + h$ 
    n := n + 1
end
Terminar

```

7.6 Ecuaciones diferenciales con condiciones de frontera

Cuando las condiciones que determinan la solución de una ecuación diferencial de orden mayor que 1, vienen especificadas para valores diferentes de la variable independiente, se dice que se trata de un problema con condiciones de frontera. Son, por lo general, problemas más difíciles que los de condiciones iniciales estudiados en la sección 7.5 y aquí solo se hará una breve introducción al tema, analizando un método de solución sumamente elemental pero que, en algunos casos, resulta aplicable. El lector interesado en ampliar acerca del asunto puede consultar la bibliografía que se recomienda al final de este capítulo.

La primera dificultad surge en cuanto a la existencia y unicidad de la solución. No todo problema con condiciones de frontera tiene solución y, cuando la solución existe, puede no ser única. En lo que sigue siempre se supondrá que los problemas planteados poseen una y solo una solución que satisface las condiciones de frontera dadas.

Los ejemplos que siguen son problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones de frontera, los cuales serán resueltos posteriormente.

Ejemplo 1

Plantee el modelo matemático del siguiente problema. Un péndulo de longitud $0,5\text{ m}$ se encuentra en la posición de equilibrio y se le imprime una cierta velocidad angular, de tal modo que en $0,35$ segundos alcanza una deflexión de 45° . Se desea conocer la posición en cada instante en el intervalo $0 \leq t \leq 0,35$ y, además, cuál fue la velocidad angular inicial.

Solución:

Como se sabe la ecuación diferencial que rige el movimiento de un péndulo simple (vea el ejemplo 8 de la sección 7.5) es:

$$-g \sin \theta = L \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

Como $L = 0,5\text{ m}$ y tomando $g = 9,8\text{ m/s}^2$, la ecuación queda como:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -19,6 \sin \theta$$

Las condiciones conocidas del problema son:

$$\begin{aligned}\theta(0) &= 0 \\ \theta(0,35) &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Se quiere conocer $\theta'(0)$ y $\theta(t)$ para $0 \leq t \leq 2$. Como se ve, se trata de un problema de condiciones de frontera.

Ejemplo 2

Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + y \frac{dy}{dx} - y^2 = 0$$

con las condiciones:

$$y(0) = 1$$

$$y(2) = 7$$

$$y'(0) = 2$$

El método de los disparos

Cuando en un problema de orden m con condiciones de frontera, se tienen $m - 1$ condiciones conocidas para el mismo valor de la variable independiente y una que corresponde a otro valor, el problema puede resolverse por un procedimiento de prueba y error. El método debe su nombre al hecho de que la forma de proceder recuerda la manera en que los artilleros realizan la corrección del tiro de mortero (figura 1).

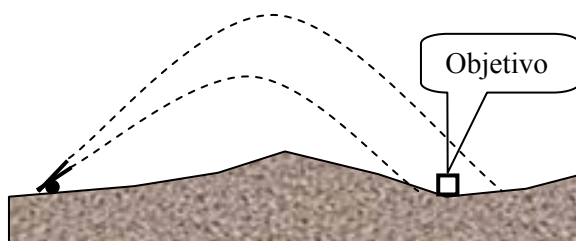


Figura 1

Considérese la ecuación de orden m :

$$\frac{d^m y}{dx^m} = G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}\right)$$

con

$m - 1$ condiciones conocidas en x_0

1 condición conocida en x_F

La idea general del método es:

1. Suponer un valor arbitrario para la condición que no se conoce en x_0
2. Resolver el problema resultante de condiciones iniciales hasta x_F
3. Determinar si en x_F se satisface la condición conocida en x_F . Si es así, el problema está resuelto.
4. Si la condición conocida en x_F no se satisface, modificar adecuadamente el valor supuesto y regresar a 2.

Naturalmente que, cuando se tiene una idea del significado físico o geométrico de las variables que intervienen en la ecuación diferencial, será más simple tomar una aproximación inicial adecuada y realizar la corrección en cada paso. En cualquier caso, suponiendo que el resultado en x_F es una

función continua del valor tomado en x_0 , puede comenzarse tratando de hallar dos valores de la condición supuesta que produzcan errores de diferente signo en la condición desconocida en x_F .

Ejemplo 3

Resuelva, por el método de los disparos, el problema de condiciones de frontera del ejemplo 1. Utilice el algoritmo RK4 y obtenga las aproximaciones con tres cifras decimales exactas.

Solución:

Se trata del problema:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -19,6 \sin \theta \quad \begin{aligned} \theta(0) &= 0 \\ \theta(0,35) &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

El cual puede reformularse del siguiente modo:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -19,6 \sin \theta \quad \begin{aligned} \theta(0) &= 0 \\ \theta'(0) &= \omega \end{aligned} \quad (1)$$

Hallar ω de manera que $\theta(0,35) = \pi/4$

El problema (1) se transforma fácilmente en un problema de Cauchy de orden dos. Para ello, se define:

$$u_1 = \theta \quad \text{y} \quad u_2 = \theta'$$

y resulta:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= u_2 & u_1(0) &= 0 \\ \frac{du_2}{dt} &= -19,6 \sin u_1 & u_2(0) &= \omega \end{aligned}$$

y se trata de encontrar el valor de ω para el cual es $u_1(0,35) = \pi/4 = 0,78540$

Disparo 1: Sea $\omega = 2$ (radian/s).

Aplicando RK4 con $h = 0,05$ (con este paso la cota del error es suficientemente pequeña), se obtienen los resultados que muestra la tabla 1.

t	$u_1(t)$	$u_2(t)$
0,00	0,00000	2,00000
0,05	0,09918	1,95124
0,10	0,19354	1,80779
0,15	0,27851	1,57778
0,20	0,35008	1,27371
0,25	0,40491	0,91116
0,30	0,44051	0,50776
0,35	0,45530	0,08169

Tabla 1

Como se aprecia, con esta velocidad angular, al cabo de los 0,35 segundos el péndulo está a punto de detenerse (u_2 está aproximándose a cero) y el ángulo de deflexión es de solo 0,45530 radianes en lugar de los 0,7854 que se desea. Estas circunstancias aconsejan aumentar la velocidad angular inicial.

Disparo 2: Sea $\omega = 3$ (radian/s).

La tabla 2 muestra los resultados obtenidos. Nótese que ahora el péndulo avanza con más rapidez, pero para $t = 0,35$ el ángulo de deflexión θ solo es de 0,68977 radianes en lugar de 0,7854 que se precisan. Es aconsejable aumentar aun más la velocidad angular inicial.

t	$u_1(t)$	$u_2(t)$
0,00	0,00000	3,00000
0,05	0,14878	2,92693
0,10	0,29033	2,71282
0,15	0,41794	2,37190
0,20	0,52575	1,92506
0,25	0,60908	1,39670
0,30	0,66448	0,81214
0,35	0,68997	0,19619

Tabla 2

Disparo 3: Sea $\omega = 4$ (radian/s).

En la tabla 3 se encuentran los resultados en este caso. Ahora la velocidad inicial es más alta de lo requerido pues, como se aprecia, para $t = 0,35$ el péndulo ha alcanzado un ángulo de 0,93238, mayor que lo que se necesita. Es evidente que el verdadero valor de ω se halla entre 3 y 4 radianes por segundo.

t	$u_1(t)$	$u_2(t)$
0,00	0,00000	4,00000
0,05	0,19837	3,90272
0,10	0,38715	3,61920
0,15	0,55755	3,17223
0,20	0,70217	2,59358
0,25	0,81529	1,91770
0,30	0,89286	1,17702
0,35	0,93238	0,39986

Tabla 3

A partir de aquí, podría utilizarse el sencillo algoritmo de bisección, haciendo el próximo disparo con $\omega = 3,5$. Sin embargo, si se tiene en cuenta lo ineficiente de dicho algoritmo, es preferible seguir otra estrategia. Llamando $H(\omega)$ a la discrepancia entre la deflexión obtenida al cabo de 0,35 segundos para la velocidad angular ω y el valor deseado, $\pi/4$, esto es:

$$H(\omega) = u_1(0,35) - 0,78540$$

los resultados obtenidos en los tres primeros disparos permiten escribir:

$$\begin{aligned}H(2) &= 0,45530 - 0,78540 = -0,33010 \\H(3) &= 0,68997 - 0,78540 = -0,09543 \\H(4) &= 0,93238 - 0,78540 = 0,14698\end{aligned}$$

Como lo que se requiere es hallar una solución de la ecuación

$$H(\omega) = 0$$

puede emplearse algún método más eficiente que bisección, por ejemplo el de las secantes. La ecuación del proceso iterativo del método de las secantes (Sección 2.6, fórmula (2)) es:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})} f(x_{n-1})$$

La cual, adaptada a la notación de este problema, se transforma en:

$$\omega_n = \omega_{n-1} - \frac{\omega_{n-1} - \omega_{n-2}}{H(\omega_{n-1}) - H(\omega_{n-2})} H(\omega_{n-1}) \quad (2)$$

Según la ecuación (2) se tomará:

$$\begin{aligned}\omega_4 &= \omega_3 - \frac{\omega_3 - \omega_2}{H(\omega_3) - H(\omega_2)} H(\omega_3) \\&= 4 - \frac{4 - 3}{H(4) - H(3)} H(4) = 4 - \frac{1}{0,14698 - (-0,09543)} (0,14698) \\ \omega_4 &= 3,39367\end{aligned}$$

Disparo 4: Sea $\omega = 3,39367$ (radian/s).

Se obtiene, para $t = 0,35$, los valores $u_1(0,35) = 0,78416$ y $u_2(0,35) = 0,26403$. Con ello se tiene:

$$H(3,39367) = 0,78416 - 0,78540 = -0,00124$$

Aplicando de nuevo la fórmula (2) de las secantes se calcula la nueva velocidad angular inicial:

$$\begin{aligned}\omega_5 &= \omega_4 - \frac{\omega_4 - \omega_3}{H(\omega_4) - H(\omega_3)} H(\omega_4) \\&= 3,39367 - \frac{3,39367 - 4}{-0,00124 - 0,14698} (-0,00124) \\&= 3,39874\end{aligned}$$

Disparo 5: Sea $\omega = 3,39874$ (radian/s).

Se obtiene, para $t = 0,35$, los valores $u_1(0,35) = 0,78539$ y $u_2(0,35) = 0,26501$. Con ello se tiene:

$$H(3,39874) = 0,78539 - 0,78540 = -0,00001$$

Aproximación suficiente, ya que solamente se necesitan 3 cifras decimales exactas en los resultados. Se concluye entonces que:

La velocidad angular inicial fue 3,39874 radian/s. La tabla 4 muestra los resultados finales en el intervalo pedido.

t	$u_1(t)$	$u_2(t)$
0,00	0,00000	3,39847
0,05	0,16855	3,31601
0,10	0,32893	3,07404
0,15	0,47358	2,69017
0,20	0,59599	2,18926
0,25	0,69102	1,59956
0,30	0,75494	0,94930
0,35	0,78539	0,26501

Tabla 4

Ejemplo 4

Resuelva la ecuación diferencial del ejemplo 2 mediante el método de los disparos utilizando el algoritmo RK4 en el intervalo $0 \leq x \leq 2$ con tres cifras decimales exactas.

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + y \frac{dy}{dx} - y^2 = 0$$

$$y(0) = 1$$

con las condiciones:

$$y(2) = 7$$

$$y'(0) = 2$$

Solución:

El problema puede plantearse del siguiente modo:

Dada la ecuación diferencial:

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + y \frac{dy}{dx} - y^2 = 0$$

con las condiciones iniciales:

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 2$$

$$y''(0) = k$$

Halle k de manera que $y(2) = 7$.

La ecuación se puede transformar en un problema de Cauchy de orden 3, haciendo:

$$u_1 = y$$

$$u_2 = y'$$

$$u_3 = y''$$

y resulta:

$$\frac{du_1}{dx} = u_2$$

$$u_1(0) = 1$$

$$\frac{du_2}{dx} = u_3$$

$$u_2(0) = 2$$

$$\frac{du_3}{dx} = (u_1)^2 - u_1 u_2$$

$$u_3(0) = k$$

La función $H(k)$ se define como la discrepancia entre el valor $u_1(2)$ obtenido tomando $u_3(0) = k$ y el valor requerido, $u_1(2) = 7$, esto es:

$$H(k) = u_1(2) - 7$$

y el propósito que se persigue es determinar el valor de k tal que $H(k) = 0$.

Disparo 1: $k = 2$

Tomando paso $h = 0,1$ se obtiene: $u_1(2) = 8,50538$; $u_2(2) = 7,20606$; $u_3(2) = 8,16104$

Tomando paso $h = 0,05$ se: $u_1(2) = 8,50537$; $u_2(2) = 7,20610$; $u_3(2) = 8,16111$

De donde queda claro que puede utilizarse como paso $h = 0,05$ con entera confianza en todo lo que sigue. En cuanto a la función H :

$$H(2) = 8,50537 - 7 = 1,50537$$

Disparo 2: $k = 3$

Se obtienen como resultados en $t = 2$:

$$u_1(2) = 9,76862$$

de modo que:

$$H(3) = 9,76862 - 7 = 2,76862$$

En lugar de continuar el proceso de tanteo, el próximo valor de k se buscará mediante la fórmula de las secantes (2):

$$k_3 = k_2 - \frac{k_2 - k_1}{H(k_2) - H(k_1)} H(k_2)$$

$$= 3 - \frac{3 - 2}{H(3) - H(2)} H(3)$$

$$= 3 - \frac{3-2}{2,76862-1,50537}(2,76862)$$

$$k_3 = 0,80834$$

Disparo 3: $k = 0,80834$

Se obtiene: $u_1(2) = 6,89796$

de modo que: $H(0,80834) = 6,89796 - 7 = -0,10204$

Aplicando de nuevo la fórmula de las secantes para determinar el próximo valor de k :

$$\begin{aligned} k_4 &= k_3 - \frac{k_3 - k_2}{H(k_3) - H(k_2)} H(k_3) \\ &= 0,80834 - \frac{0,80834 - 3}{H(0,80834) - H(3)} H(0,80834) \\ &= 0,80834 - \frac{0,80834 - 3}{-0,10204 - 2,76862} (-0,10204) \end{aligned}$$

$$k_4 = 0,88624$$

Disparo 4: $k = 0,88624$

Resulta: $u_1(2) = 7,00684$

De donde: $H(0,88624) = 7,00684 - 7 = 0,00684$

Como el valor de $H(k_4)$ es todavía mayor de lo permisible, se aplica la fórmula (2) de las secantes para determinar el próximo valor de k :

$$\begin{aligned} k_5 &= k_4 - \frac{k_4 - k_3}{H(k_4) - H(k_3)} H(k_4) \\ &= 0,88624 - \frac{0,88624 - 0,80834}{H(0,88624) - H(0,80834)} H(0,88624) \\ &= 0,88624 - \frac{0,88624 - 0,80834}{0,00684 - (-0,10204)} (0,00684) \end{aligned}$$

$$k_5 = 0,88135$$

Disparo 4: $k = 0,88135$

Se obtuvo: $u_1(2) = 7,00002$

De donde:

$$H(0,88135) = 7,00002 - 7 = 0,00002$$

Como la discrepancia es menor que 0,0005 (tres cifras decimales exactas), se toma como resultado final. De manera que:

$$y''(0) = k = 0,88135$$

En la tabla 5 se muestran los resultados obtenidos para valores de $x = 0; 0,4; 0,8; 1,2; 1,6; 2,0$.

x	$u_1(x)$	$u_2(x)$	$u_3(x)$
0,0	1,00000	2,0000	0,88135
0,4	1,85945	2,27023	0,48087
0,8	2,80160	2,43956	0,48087
1,2	3,83411	2,78820	1,46372
1,6	5,11757	3,77662	3,67029
2,0	7,00002	5,84088	6,73486

Tabla 5

Ejercicios

1. Dada la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y \sin x = 1 \quad \begin{array}{l} y(1) = 0 \\ y'(2) = 2 \end{array}$$

halle la solución en el intervalo $[0, 2]$ con tres cifras decimales exactas.

2. Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y^2 = e^x \quad \begin{array}{l} y(0) = 1 \\ y(2) = 2 \end{array}$$

en el intervalo $[1, 2]$ con tres cifras decimales exactas.

3. Dada la ecuación diferencial

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + x \frac{dy}{dx} = y \cos x \quad \begin{array}{l} y(2) = 7 \\ y'(0) = 3 \\ y''(0) = 1 \end{array}$$

halle $y'(2)$ con tres cifras decimales exactas.

4. Mediante un instrumento de precisión se determinó que un péndulo de dos metros de longitud demoró exactamente medio segundo en pasar desde la posición vertical hasta un ángulo de deflexión de 30° . Determine, con tres cifras decimales exactas, la posición del péndulo en cada décima de segundo en ese intervalo de tiempo. La ecuación diferencial correspondiente aparece en el ejemplo 1 de esta sección.

5. En el ejemplo 4 de la sección 7.1, se mostró el modelo de Lotka – Volterra para dos poblaciones $x(t)$ de presas y $y(t)$ de depredadores:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases}$$

Suponga que en una isla hay un área protegida donde habitan lobos y alces. Los alces se alimentan del bosque y los lobos se alimentan de los alces. A partir de datos históricos se han determinado las constantes del modelo para esta situación específica: $a = 0,3$; $b = 0,01111$; $c = 0,2106$; $d = 0,00002632$. Se sabe, por un censo realizado hace 15 años, que en aquella época había en la isla 500 alces y una cantidad indeterminada de lobos. Después de disminuir drásticamente, la población de alces comenzó a crecer y hoy ya hay 600 de ellos. Determine, a partir de esta información, cuántos lobos había hace 15 años y cuántos debe haber ahora.

Otras lecturas recomendadas

El tema de ecuaciones diferenciales es uno de los más amplios dentro de la Matemática Numérica y por ello, existen obras completas dedicadas solamente al mismo. En este libro, el análisis se ha limitado a las ecuaciones diferenciales ordinarias. El tema de las ecuaciones diferenciales parciales resulta tan abundante en métodos y resultados que se ha preferido no tratarlo ni siquiera en forma elemental. El lector interesado en este importante asunto, puede consultar las obras clásicas: “Finite Difference methods for partial differential equations” de Forsythe y Wasow y o “Métodos en diferencias para las ecuaciones elípticas” de Samarski y Andréiev. En la extensa obra “Computing Methods” de Berezin y Zhidkov se dedican unas 400 páginas al tratamiento del tema de las ecuaciones diferenciales (ordinarias y parciales) y el lector puede allí encontrar algunas demostraciones y muchos métodos que en este texto no ha sido posible contemplar.

Principales ideas del capítulo

- Una ecuación diferencial es aquella en la que aparecen derivadas. Cuando hay una sola variable independiente respecto a la cual se plantean todas las derivadas, entonces las derivadas se llaman ordinarias y también la ecuación diferencial.
- Cuando se requiere más de una condición particular para determinar la solución que se desea, pueden darse dos situaciones muy diferentes: Que se especifiquen todas las condiciones particulares para un mismo valor de la variable independiente (*condiciones iniciales*) o que se incluyan condiciones particulares que deberá satisfacer la solución para dos o más valores de la variable independiente (*condiciones de frontera*).
- Las principales limitaciones de los métodos analíticos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias son que cada método analítico se ocupa de un tipo especial de ecuación diferencial ordinaria y es inaplicable en otros casos y que, a pesar de la diversidad de métodos analíticos, la mayoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias no puede resolverse por esta vía.
- El campo de direcciones brinda una idea cualitativa muy abarcadora acerca de cómo se comportarán las soluciones de una ecuación diferencial de primer orden. Si $y = y(x)$ es una solución particular de la ecuación diferencial, entonces cuando su gráfica pase por un punto del campo de direcciones, lo hará en la dirección del segmento que corresponde a ese punto.
- En el campo de las ecuaciones diferenciales, se considerará que el problema de Cauchy:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0$$

es inestable si pequeños cambios en y_0 producen grandes cambios en la solución de la ecuación para valores de x alejados de x_0 .

- La estabilidad de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

dependen del signo de $f_y(x, y)$ en la región considerada del plano xy . El problema es estable cuando esta derivada es negativa en toda la región considerada.

- La ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = -Ay$ con $A > 0$ se llama *ecuación estable modelo*.
- El método de Euler para resolver una ecuación diferencial de primer orden consiste en las ecuaciones: $x_{n+1} = x_n + h$; $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ para $n = 0, 1, 2, \dots$
- El método de Euler posee un error local de orden h^2 y un error total de orden h , por lo cual se dice que es de primer orden.
- El error total de un algoritmo de orden p puede estimarse mediante la fórmula $e_h = \frac{y_h - y_{2h}}{2^p - 1}$.
- El método de Euler es estable con la ecuación modelo, si se toma un paso h tal que $hA < 2$.
- Las fórmulas de Runge - Kutta de orden dos (RK2) son:

$$\text{RK2:} \quad \begin{cases} K_1 = hf(x_n, y_n) \\ K_2 = hf(x_n + h, y_n + K_1) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

- El método RK2 es estable con la ecuación modelo, si se toma un paso h tal que $hA < 2$
- Las fórmulas de Runge - Kutta de orden cuatro (RK4) son:

$$\text{RK4:} \quad \begin{cases} K_1 = hf(x_n, y_n) \\ K_2 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}K_1) \\ K_3 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}K_2) \\ K_4 = hf(x_n + h, y_n + K_3) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

- Si se usa los últimos $p + 1$ valores de la solución: $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-p}$, para hallar y_{n+1} , se dice que se trata de un método de paso $p + 1$, que se simboliza: $y_{n+1} = G(y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-p})$
- Como en los métodos de paso múltiple se utiliza una mayor cantidad de información acerca de la solución ya calculada, se logra una mayor eficiencia computacional, en el sentido de una menor cantidad de operaciones para obtener una exactitud similar.
- Un método de paso $p + 1$ no puede funcionar mientras no se conozcan $p + 1$ valores de la solución: $y_0, y_1, y_2, \dots, y_p$. Por esto se dice que los métodos de paso múltiple no son capaces de “arrancar”.
- El método de Adams – Bashforth de orden 4 consiste en la fórmula

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$$

y es un método de paso cuádruple.

- El método de Adams – Moulton de orden 4 consiste en la fórmula

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2})$$

y es un método de paso triple e implícito.

- Los métodos de Adams – Bashforth y de Adams – Moulton se usan frecuentemente como una pareja predictor – corrector donde

Ecuación predictora: AB4 $y_{n+1}^{(0)} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$

Ecuación correctora: AM4 $y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \frac{h}{24}[9f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)}) + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}]$

- El método de Adams – Bashforth de orden cuatro es inestable para la ecuación estable modelo, para valores de hA por encima de 0,3 mientras que, a partir de $hA = 3$ comienza la zona de inestabilidad del método de AM4.
- A un sistema de ecuaciones diferenciales se llama un *problema de Cauchy de orden m* cuando presenta las siguientes características: El sistema contiene tantas ecuaciones diferenciales como variables dependientes; existe solamente una variable independiente; todas las ecuaciones son de primer orden; en la ecuación número i existe una sola derivada que corresponde a la variable u_i ; la derivada que contiene cada ecuación aparece despejada en uno de los miembros de la ecuación; para un valor x_0 de la variable independiente se conoce el valor que toman todas las variables dependientes.
- Para transformar una ecuación de orden m con condiciones iniciales, en un problema de Cauchy de orden m se introducen m nuevas variables $u_1, u_2, \dots, u_m$ definidas como sigue:

$$u_1 = y; \quad u_2 = \frac{dy}{dx}; \quad u_3 = \frac{d^2y}{dx^2}; \dots; u_m = \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$$

- Cualquiera de los métodos estudiados para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden puede ser adaptado para resolver problemas de Cauchy de orden m , solamente hay que realizar el siguiente cambio. Si el método que se va a emplear consta de varias etapas en cada paso, entonces en cada paso de la solución del problema de Cauchy, se aplica la etapa 1 a las m ecuaciones, después, la etapa 2 a todas las ecuaciones, etc. hasta aplicar la última etapa a todas las ecuaciones y con esto queda terminado un paso.
- Si $\mathbf{u}_h$ es el vector de soluciones de un problema de Cauchy obtenido para un cierto valor x utilizando paso h con un método de orden p y $\mathbf{u}_{2h}$ el vector de soluciones correspondiente al mismo valor x pero calculado con paso $2h$, entonces, si $\mathbf{e}_h$ representa al vector de errores correspondiente a $\mathbf{u}_h$, se cumple que

$$\|\mathbf{e}_h\| \approx \frac{\|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_{2h}\|}{2^p - 1}$$

- La idea general del método de los disparos para resolver una ecuación diferencial con condiciones de frontera consiste en: 1) Suponer un valor arbitrario para la condición que no se conoce en x_0 ; 2) Resolver el problema resultante de condiciones iniciales hasta x_F ; 3) Determinar si en x_F se satisface la condición conocida en x_F . Si es así, el problema está resuelto; 4) Si la condición conocida en x_F no se satisface, modificar adecuadamente el valor supuesto y regresar a 2).

Auto examen

1. Muestre dos ejemplos de ecuaciones diferenciales: uno de condiciones iniciales y el otro con condiciones de frontera.
2. Cite tres diferencias importantes entre los métodos analíticos y los numéricos que se utilizan para resolver ecuaciones diferenciales.
3. ¿A qué se llama campo de direcciones de una ecuación diferencial de primero orden y para qué sirve?
4. Analice el campo de direcciones de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = x^2 - y^2$ y diga algunas de las propiedades que poseen sus soluciones.
5. ¿Cuándo se dice que una ecuación diferencial es estable?
6. ¿Cuál es la interpretación geométrica de los métodos de Euler y de Runge – Kutta orden 2?
7. Dada la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{y+1}$; $y(1) = 2,5$; obtenga su solución en el intervalo $[1, 3]$ mediante los métodos RK2 y RK4 con 3 cifras decimales exactas y compare la cantidad de evaluaciones de la función que fueron necesarias en cada caso.
8. Resuelva mediante el método predictor – corrector de Adams de orden 4 el ejercicio anterior.
9. ¿Por qué se dice que los métodos de Adams – Bashforth son poco estables? ¿A qué se debe esta poca estabilidad?
10. Un bloque de hielo con una masa de 10 Kg, se deja caer desde una gran altura. Desprecie la resistencia del aire y determine su posición durante los primeros cinco segundos de la caída si, debido a la temperatura, el bloque va perdiendo masa a razón de 5 g/s. Obtenga la solución con error menor que un milímetro.
11. Resuelva la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy = e^x \quad \begin{matrix} y(1) = 2 \\ y(2) = 4,5 \end{matrix}$$

en el intervalo $[1, 2]$ con tres cifras decimales exactas.