

# ÍNDICE

|                                                       |    |
|-------------------------------------------------------|----|
| CAPÍTULO 1: CONCEPTOS INICIALES                       | 1  |
| Objetivos                                             | 1  |
| 1.1 Introducción                                      | 1  |
| ¿Qué es la Matemática Numérica?                       | 1  |
| Una breve historia                                    | 2  |
| 1.2 Fuentes de error en la solución de un problema    | 3  |
| La modelación y los errores de modelación             | 3  |
| Métodos computacionales y errores de truncamiento     | 4  |
| Errores en el proceso de cálculo                      | 5  |
| Ejercicios                                            | 10 |
| 1.3 Medidas del error                                 | 10 |
| El mínimo error absoluto máximo                       | 13 |
| Relación entre $E_m(x)$ y $e_m(x)$                    | 14 |
| Hallando aproximaciones por defecto y por exceso      | 15 |
| Ejercicios                                            | 16 |
| 1.4 Cifras significativas y cifras exactas            | 17 |
| La notación científica                                | 20 |
| Cifra exacta                                          | 20 |
| Contando las cifras exactas                           | 22 |
| El redondeo                                           | 23 |
| Cifras decimales exactas y error absoluto             | 24 |
| Cifras exactas y error relativo                       | 24 |
| Ejercicios                                            | 26 |
| 1.5 Los números en la computadora                     | 27 |
| Representación de números enteros                     | 27 |
| Representación de números reales                      | 28 |
| Recomendaciones                                       | 30 |
| 1.6 Propagación del error                             | 30 |
| Una ley general                                       | 30 |
| Propagación del error en sumas y diferencias          | 32 |
| Propagación del error en el producto                  | 34 |
| Propagación del error en el cociente                  | 35 |
| Propagación del error en la potencia y la exponencial | 37 |
| Ejercicios                                            | 39 |
| 1.7 Errores e inestabilidad                           | 40 |
| Problemas estables y problemas inestables             | 40 |
| Pérdida de significación                              | 42 |
| Métodos inestables para problemas estables            | 44 |
| Ejercicios                                            | 47 |
| 1.8 Seudo código para la escritura de algoritmos      | 48 |
| El operador de asignación                             | 48 |
| La estructura alternativa                             | 48 |
| Estructuras repetitivas                               | 49 |
| Ejercicios                                            | 52 |
| Otras lecturas recomendadas                           | 53 |
| Principales ideas del capítulo                        | 53 |
| Auto examen                                           | 55 |

|                                                             |     |
|-------------------------------------------------------------|-----|
| CAPÍTULO 2: RAÍCES DE ECUACIONES                            | 57  |
| Objetivos                                                   | 57  |
| 2.1 Introducción                                            | 57  |
| El problema que se resolverá                                | 57  |
| 2.2 Separación de raíces                                    | 62  |
| Dos etapas                                                  | 62  |
| Separación gráfica de raíces                                | 62  |
| Algunos resultados importantes para ecuaciones algebraicas  | 63  |
| Regla de Descartes                                          | 64  |
| La fórmula de Lagrange para acotar raíces                   | 64  |
| Análisis de las raíces negativas de una ecuación algebraica | 66  |
| Combinando las técnicas                                     | 66  |
| Ejercicios                                                  | 70  |
| 2.3 El método de la bisección                               | 72  |
| Hipótesis                                                   | 72  |
| El método                                                   | 72  |
| Convergencia del método                                     | 73  |
| Condición de terminación                                    | 74  |
| Algoritmo en pseudo código                                  | 75  |
| Comentarios finales                                         | 75  |
| Ejercicios                                                  | 77  |
| 2.4 El método Regula Falsi                                  | 80  |
| Hipótesis                                                   | 81  |
| El método                                                   | 81  |
| Convergencia del método                                     | 82  |
| El error del método                                         | 84  |
| Rapidez de la convergencia                                  | 86  |
| Algoritmo en pseudo código                                  | 87  |
| Comentarios finales                                         | 87  |
| Ejercicios                                                  | 90  |
| 2.5 El método de Newton – Raphson                           | 93  |
| El método iterativo en general                              | 93  |
| El método de Newton – Raphson                               | 97  |
| Interpretación geométrica                                   | 98  |
| Convergencia del método de Newton – Raphson                 | 99  |
| El error en el Método de Newton – Raphson                   | 103 |
| Algoritmo en pseudo código                                  | 106 |
| Comentarios finales                                         | 106 |
| Ejercicios                                                  | 110 |
| 2.6 El método de las secantes                               | 113 |
| Convergencia del método de las secantes                     | 115 |
| El error en el método de las secantes                       | 116 |
| Algoritmo en pseudo código                                  | 117 |
| Comentarios finales                                         | 118 |
| Ejercicios                                                  | 122 |
| 2.7 Extensiones del método de Newton – Raphson              | 125 |
| El método de Newton – Raphson para sistemas de ecuaciones   | 125 |
| Algoritmo en pseudo código                                  | 127 |
| El método de Newton – Bairstow                              | 130 |
| Algoritmo en pseudo código                                  | 135 |
| Ejercicios                                                  | 136 |

|                                                                        |            |
|------------------------------------------------------------------------|------------|
| Otras lecturas recomendadas                                            | 139        |
| Principales ideas del capítulo                                         | 139        |
| Auto examen                                                            | 140        |
| <b>CAPÍTULO 3: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y MATRICES</b>          | <b>142</b> |
| Objetivos                                                              | 142        |
| 3.1 Introducción                                                       | 143        |
| Problemas a resolver                                                   | 145        |
| Métodos directos y métodos iterativos                                  | 146        |
| Normas matriciales y vectoriales                                       | 147        |
| 3.2 El método de Gauss                                                 | 149        |
| Proceso directo                                                        | 150        |
| Proceso inverso                                                        | 151        |
| Estrategias de pivote                                                  | 151        |
| Algoritmo en pseudo código                                             | 155        |
| Cantidad de operaciones del método de Gauss                            | 157        |
| Ejercicios                                                             | 159        |
| 3.3 Consecuencias del método de Gauss                                  | 160        |
| El método de Gauss para sistemas tridiagonales                         | 161        |
| Algoritmo en pseudo código para sistemas tridiagonales                 | 164        |
| Cálculo de determinantes                                               | 165        |
| Algoritmo para calcular determinantes                                  | 167        |
| Inversión de matrices mediante el método de Gauss                      | 167        |
| Algoritmo para invertir una matriz mediante el método de Gauss         | 169        |
| Ejercicios                                                             | 170        |
| 3.4 Sistemas mal condicionados                                         | 172        |
| Una medida del mal condicionamiento                                    | 174        |
| ¿Qué hacer?                                                            | 177        |
| Ejercicios                                                             | 178        |
| 3.5 Métodos iterativos para sistemas lineales                          | 178        |
| El método de Jacobi                                                    | 179        |
| Convergencia del método de Jacobi                                      | 182        |
| El error en el método de Jacobi                                        | 187        |
| Algoritmo del método de Jacobi                                         | 189        |
| El método de Seidel                                                    | 193        |
| Convergencia del método de Seidel                                      | 195        |
| Comparación entre la convergencia de los métodos de Jacobi y de Seidel | 198        |
| Algoritmo del método de Seidel                                         | 200        |
| Comentarios finales sobre los métodos iterativos                       | 203        |
| Ejercicios                                                             | 206        |
| 3.6 Cálculo de valores y vectores propios                              | 207        |
| Sub espacios propios                                                   | 210        |
| Polinomio característico                                               | 211        |
| El caso especial de las matrices simétricas                            | 211        |
| Localización de los valores propios                                    | 212        |
| Gráfica del polinomio característico                                   | 213        |
| Solución numérica de la ecuación característica                        | 215        |
| Transformación de la matriz en una similar                             | 215        |
| El método de la potencia                                               | 215        |
| Ejercicios                                                             | 218        |

|                                                             |            |
|-------------------------------------------------------------|------------|
| Otras lecturas recomendadas                                 | 220        |
| Principales ideas del capítulo                              | 220        |
| Auto examen                                                 | 221        |
| <b>CAPÍTULO 4: APROXIMACIÓN DE FUNCIONES</b>                | <b>223</b> |
| Objetivos                                                   | 223        |
| 4.1 Introducción                                            | 223        |
| El problema de la aproximación funcional                    | 223        |
| Conceptos básicos                                           | 227        |
| 4.2 Interpolación polinomial                                | 228        |
| Existencia y unicidad del polinomio interpolador            | 228        |
| Error del polinomio interpolador                            | 232        |
| 4.3 El método de Lagrange                                   | 237        |
| Algoritmo en pseudo código                                  | 239        |
| Ejercicios                                                  | 243        |
| 4.4 El método de Newton                                     | 245        |
| Estimación del error de interpolación                       | 248        |
| Relación entre diferencias y derivadas                      | 251        |
| Algoritmo en pseudo código                                  | 252        |
| Ejercicios                                                  | 253        |
| 4.5 Interpolación mediante splines                          | 256        |
| El problema de la interpolación global                      | 256        |
| Funciones spline                                            | 257        |
| El spline cúbico de interpolación                           | 257        |
| El spline natural                                           | 261        |
| Algoritmo en pseudo código para el spline cúbico natural    | 263        |
| El spline cúbico anclado                                    | 265        |
| Algoritmo en pseudo código para el spline cúbico anclado    | 266        |
| El spline cúbico periódico                                  | 267        |
| Algoritmo en pseudo código para el spline cúbico periódico  | 270        |
| Ejercicios                                                  | 274        |
| 4.6 Ajuste de curvas                                        | 277        |
| El problema del ajuste de curvas                            | 278        |
| Modelos lineales                                            | 279        |
| Algoritmo en pseudo código para ajustar modelos lineales    | 282        |
| Ajuste de modelos no lineales mediante cambios de variables | 287        |
| Ajuste numérico de modelos no lineales                      | 290        |
| Ejercicios                                                  | 291        |
| Otras lecturas recomendadas                                 | 295        |
| Principales ideas del capítulo                              | 296        |
| Auto examen                                                 | 299        |
| <b>CAPÍTULO 5: INTEGRACIÓN NUMÉRICA</b>                     | <b>300</b> |
| Objetivos                                                   | 300        |
| 5.1 Introducción                                            | 300        |
| 5.2 El método de los trapecios                              | 303        |
| Algoritmo en pseudo código                                  | 306        |
| El error de truncamiento en el método de los trapecios      | 307        |
| Una fórmula asintótica para el error de truncamiento        | 310        |
| Estimación del error de truncamiento por doble cálculo      | 311        |
| El error de redondeo en la fórmula de los trapecios         | 313        |

|                                                                            |         |
|----------------------------------------------------------------------------|---------|
| 5.3 El método de Simpson                                                   | 314     |
| Algoritmo en pseudo código                                                 | 318     |
| Error de truncamiento en el método de Simpson                              | 319     |
| Una fórmula asintótica para el error de truncamiento del método de Simpson | 321     |
| Estimación del error de truncamiento por doble cálculo                     | 322     |
| Fórmulas de Newton – Cotes                                                 | 323     |
| Ejercicios                                                                 | 324     |
| 5.4 El método de Gauss                                                     | 327     |
| Los polinomios de Legendre                                                 | 329     |
| Una base para el espacio $P_5$                                             | 330     |
| Generalización para cualquier $m$                                          | 332     |
| Generalización para cualquier intervalo                                    | 332     |
| Algoritmo en pseudo código                                                 | 334     |
| El error en el método de Gauss                                             | 335     |
| Ejercicios                                                                 | 336     |
| 5.5 El método de Romberg                                                   | 339     |
| Algoritmo en pseudo código                                                 | 343     |
| Ejercicios                                                                 | 344     |
| 5.6 Cálculo numérico de integrales dobles                                  | 346     |
| Cálculo de integrales dobles por el método de Gauss                        | 347     |
| Algoritmo en pseudo código del método de Gauss para integrales dobles      | 348     |
| Cálculo de integrales dobles por el método de Simpson                      | 350     |
| Algoritmo en pseudo código del método de Simpson para integrales dobles    | 352     |
| Estimación del error                                                       | 353     |
| Ejercicios                                                                 | 356     |
| Otras lecturas recomendadas                                                | 358     |
| Principales ideas del capítulo                                             | 358     |
| Auto examen                                                                | 361     |
| <br>CAPÍTULO 6: OPTIMIZACIÓN NUMÉRICA                                      | <br>364 |
| Objetivos                                                                  | 364     |
| 6.1 Introducción                                                           | 364     |
| Problemas de optimización                                                  | 364     |
| Funciones unimodales de una variable                                       | 366     |
| Propiedad básica de la optimización unidimensional                         | 368     |
| Clasificación de los métodos de búsqueda unidimensional                    | 368     |
| 6.2 Optimización unidimensional sin restricciones                          | 369     |
| Búsqueda simultánea                                                        | 369     |
| Búsqueda secuencial uniforme                                               | 369     |
| Algoritmo en pseudo código                                                 | 370     |
| Selección del sentido de la búsqueda                                       | 374     |
| Ejercicios                                                                 | 375     |
| 6.3 Optimización en un intervalo                                           | 376     |
| El método de bisección                                                     | 376     |
| Algoritmo en pseudo código                                                 | 378     |
| El método de Fibonacci                                                     | 380     |
| El método de la sección de oro                                             | 382     |
| Algoritmo en pseudo código del método de la sección de oro                 | 384     |

|                                                             |     |
|-------------------------------------------------------------|-----|
| Refinamiento del resultado mediante interpolación           | 386 |
| Ejercicios                                                  | 388 |
| 6.4 Conceptos básicos para la optimización multidimensional | 389 |
| Notación y representación gráfica                           | 390 |
| Trayectoria lineal en $R^n$                                 | 391 |
| Función linealmente unimodal                                | 393 |
| Funciones cuadráticas de $n$ variables                      | 394 |
| Matrices positivas definidas y negativas definidas          | 396 |
| Algoritmo para hallar el óptimo en una dirección            | 400 |
| 6.5 El método de búsqueda por coordenadas                   | 401 |
| Algoritmo en pseudo código                                  | 402 |
| Ejercicios                                                  | 406 |
| 6.6 El método del gradiente                                 | 408 |
| Algoritmo en pseudo código                                  | 409 |
| Ejercicios                                                  | 412 |
| 6.7 El método de Powell                                     | 415 |
| Interpretación geométrica                                   | 416 |
| Propiedades fundamentales de las direcciones conjugadas     | 417 |
| Método de las tangentes paralelas                           | 420 |
| El método de Powell                                         | 421 |
| Algoritmo en pseudo código                                  | 423 |
| Ejercicios                                                  | 426 |
| 6.8 El método del simplex secuencial                        | 428 |
| El simplex                                                  | 428 |
| El método del simplex para funciones de dos variables       | 429 |
| Cálculo del simplex inicial                                 | 432 |
| Determinación de los vértices de un nuevo simplex           | 434 |
| Algoritmo en pseudo código                                  | 436 |
| Ejercicios                                                  | 442 |
| Otras lecturas recomendadas                                 | 444 |
| Principales ideas del capítulo                              | 444 |
| Auto examen                                                 | 446 |
| <b>CAPÍTULO 7: ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS</b>      | 447 |
| Objetivos                                                   | 447 |
| 7.1 Introducción                                            | 447 |
| Conceptos iniciales                                         | 447 |
| Tipos de solución                                           | 448 |
| Condiciones iniciales y de frontera                         | 449 |
| Limitaciones de los métodos analíticos                      | 450 |
| Ejercicios                                                  | 454 |
| 7.2 Ecuaciones diferenciales de primer orden                | 456 |
| El campo de direcciones                                     | 457 |
| Isoclinas                                                   | 462 |
| La estabilidad de las ecuaciones diferenciales              | 464 |
| Ecuación estable modelo                                     | 467 |
| Ejercicios                                                  | 467 |
| 7.3 Métodos de paso simple                                  | 469 |
| Dos tipos de métodos                                        | 469 |
| El método de Euler                                          | 469 |
| Algoritmo en pseudo código                                  | 471 |

|                                                                          |     |
|--------------------------------------------------------------------------|-----|
| Error en el método de Euler                                              | 473 |
| Estimación del error por doble cálculo                                   | 475 |
| Estabilidad del método de Euler                                          | 477 |
| Los métodos de Taylor                                                    | 479 |
| Error en el método de Taylor                                             | 481 |
| Método de Runge - Kutta de orden dos                                     | 482 |
| Interpretación geométrica de RK-2                                        | 483 |
| Algoritmo en pseudo código para RK2                                      | 484 |
| Estimación del error en RK2                                              | 486 |
| Estabilidad de RK2                                                       | 487 |
| Método de Runge - Kutta de orden cuatro                                  | 489 |
| Algoritmo en pseudo código para RK4                                      | 489 |
| Ejercicios                                                               | 491 |
| 7.4 Métodos de paso múltiple                                             | 494 |
| Comparación entre los métodos de paso simple y paso múltiple             | 494 |
| Los métodos de Adams – Bashforth                                         | 494 |
| Algoritmo en pseudo código para AB4                                      | 498 |
| Los métodos de Adams – Moulton                                           | 499 |
| Métodos predictor – corrector                                            | 502 |
| Algoritmo en pseudo código para el método predictor – corrector de Adams | 505 |
| Estabilidad de los métodos de Adams                                      | 506 |
| Ejercicios                                                               | 509 |
| 7.5 Ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales                   | 511 |
| Problema de Cauchy de orden $m$                                          | 511 |
| Transformación de una ecuación de orden $m$ en un problema de Cauchy     | 512 |
| Solución numérica de un problema de Cauchy                               | 517 |
| El método RK2 para un problema de Cauchy de orden $m$                    | 517 |
| Algoritmo en pseudo código                                               | 520 |
| Estimación del error por doble cálculo                                   | 521 |
| El método RK4 para un problema de Cauchy de orden $m$                    | 522 |
| Algoritmo en pseudo código                                               | 525 |
| Estimación del error por doble cálculo                                   | 525 |
| Ejercicios                                                               | 528 |
| 7.6 Ecuaciones diferenciales con condiciones de frontera                 | 531 |
| El método de los disparos                                                | 532 |
| Ejercicios                                                               | 539 |
| Otras lecturas recomendadas                                              | 540 |
| Principales ideas del capítulo                                           | 540 |
| Auto examen                                                              | 543 |
| Respuestas a los ejercicios                                              | 544 |