Contabilidad y Finanzas.

Asignatura: Estadística Matemática **Año: 2do.**

3er. Semestre CRD.

Tema # 2 Probabilidades

Sumario.

Tema 2. Probabilidades y Distribución teórica de probabilidades.

2.1. Fenómeno aleatorio. Espacio muestral y sucesos.

2.2. Definición clásica de probabilidad. Definición estadística o frecuencial. Definición matemática. Axiomas y teoremas.

2.3. Probabilidad condicional.

2.4. Independencia de sucesos. Regla del producto o multiplicación y de la Suma o adición.

2.5. Distribuciones Teóricas de probabilidad. Definición de Variable Aleatoria. Definición de Función de Probabilidad. Caso discreto y continuo. Propiedades

2.6. Función de Distribución. Características numéricas de una variable aleatoria. Valor Esperado de una variable aleatoria.

EJERCITACIÓN.

Objetivos: Que el alumno sea capaz de:

- Aplicar e interpretar los fundamentos de la teoría de las probabilidades en la solución de problemas relacionados con el perfil profesional.
- Calcular la probabilidad de ocurrencia de un suceso utilizando la definición clásica, la estadística y probabilidad condicional.
- Método:
- Expositivo.

Medios:

- Tiza y pizarra, Libro de texto.
- Forma de enseñanza: Conferencia

Bibliografía:

- Estadística Dra Caridad Bustillo y otros
- Laboratorio de Estadística Matemática I (1ra y 2da parte).
- Materiales entregados y elaborados por el profesor

Comienza la clase puntualizando el nuevo tema que se estudiará que es **Probabilidades**. que es la base de la Inferencia Estadística.

2.1. FENÓMENO ALEATORIO. ESPACIO MUESTRAL Y SUCESOS.

EXPERIMENTO DETERMINISTA, cuando se puede predecir con total exactitud el resultado del experimento.
EXPERIMENTO ALEATORIO, cuando no se puede predecir con exactitud su resultado antes de realizarlo pero si los posibles resultados.
SUCESO O EVENTO Cualquier característica observada del resultado de un experimento. Es aleatorio si como resultado del experimento él puede ocurrir o no ocurrir.

ESPACIO MUESTRAL. Es el conjunto formado por todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Se representa por "S"

Ej. Lanzamiento de un dado .....S:[1, 2, 3, 4, 5, 6].
Nacimiento de un bebe S[f,m].

El espacio muestral puede ser finito o infinito según el conjunto tenga un número finito o infinito de elementos.

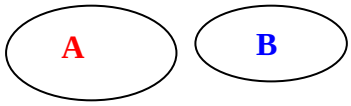
PUNTOS MUESTRALES. Cada uno de los resultados posibles de un experimento aleatorio.

Los sucesos pueden ser:
Sucesos Simple. Son aquellos que tienen un solo punto muestral.
Sucesos Compuesto. Son aquellos que tienen dos o más puntos muestrales.
Sucesos seguro o cierto: Un suceso A definido en S es seguro o cierto, si dado un conjunto de condiciones su ocurrencia es inevitable. Ej Se lanza un dado, suceso salir un número mayor que cero y menor que 7
Suceso imposible o nulo. Un suceso A es imposible si definido un espacio muestral y dado un conjunto de condiciones, su ocurrencia es imposible. Ej. Se lanza un dado, suceso A: salir el número 7 (que se representa por el conjunto vacío o nulo).
Subevento: A es un subevento de B si $A \subset B$; en tal caso cada vez que ocurra A ocurrirá B.
Ej. Se lanza un dado.
A ... Salir número impar [1, 3, 5] Recuerden los números impares
B ... Salir número del 1 al 6 [1, 2, 3, 4, 5, 6]
Suceso complementario: Un suceso A es complementario si su complemento viene dado por todos los puntos donde no ocurre A y se denota por A^c ó $\overline{A}$ ó A' indistintamente
Ej. Se lanza un dado.

A ... Salir número impar S:[1, 3, 5]
A'... No salir número impar S:[2, 4, 6]

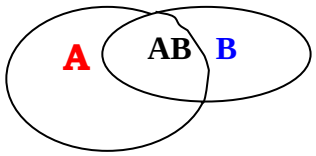
(el símbolo (') está indicando negación hay libros que pone en vez de este símbolo una pequeña c en la parte derecha superior ó una barrita encima de la letra tal como se mostró anteriormente)

Suceso Mutuamente Excluyentes. En un mismo experimento aleatorio dos sucesos A y B se dice que son mutuamente excluyentes, si la ocurrencia de uno excluye la ocurrencia del otro.
Ej. Si se lanza una moneda, la ocurrencia de que caiga cara, excluye la ocurrencia de que caiga escudo.
Ej. El nacimiento de una hembra, excluye el nacimiento de un varón. Por tanto cuando dos sucesos son mutuamente excluyentes, no tienen elementos comunes, gráficamente:



Por lo tanto si cada circulo representa a A Y B no existe la intersección de AB sino que esta es igual al conjunto vacío.

Si los sucesos fueran, ***no excluyentes,*** gráficamente: estos círculos se verían uno montado en una parte del otro.



OPERACION ENTRE EVENTOS.

OPERACIÓN Intersección:

Se llama intersección o producto de A y B, Al suceso que consiste en la ocurrencia simultánea de A y B. Se denota por AB, A ∩ B, A.B
Ej. Se lanza un dado. A: número primo [1,2,3,5]
B: número impar [1, 3, 5], por tanto AB: [1, 3, 5], esto es los elementos comunes en ambos sucesos.

OPERACION UNION:

El suceso A unión B, es el que consiste en la ocurrencia de A ó B se denota por A ∪ B; A+B (esto indica que ocurra al menos uno de los dos, que ocurra A ó que ocurra B, también la palabra al menos uno está indicando que ocurra uno ó que ocurran los dos).
Ej. Se lanza un dado
A: Que salgan los 4 primeros números [1,2,3,4]
B: Que salgan los 3 últimos números [4,5,6]
Así A ∪ B = [1, 2, 3, 4, 5, 6]

DEBE QUEDAR CLARO QUE CUANDO SE DICE QUE OCURRA "A y B" ESTAN PIDIENDO INTERSECCION (producto) Y CUANDO SE DICE QUE OCURRA "A ó B" ó "Al menos uno" ESTAN PIDIENDO UNION (suma)

2.2. DEFINICIÓN CLÁSICA DE PROBABILIDAD. DEFINICIÓN ESTADÍSTICA O FRECUENCIAL. DEFINICIÓN MATEMÁTICA. AXIOMAS Y TEOREMAS.

DEFINICIÓN CLÁSICA DE PROBABILIDAD.
La definición clásica de probabilidad se formula por Laplace en el siglo XIX, concretamente en el año 1812 y descansa en la equiprobabilidad. Y en la misma se plantea:

Si S, es un espacio muestral finito y equiprobable entonces la probabilidad de ocurrencia de cualquier suceso A definido en S estará dado por la relación:

$$P(A) = N(A)/N(S)$$

dónde N(A)= casos favorables al suceso A y N(S)= casos totales posibles.

Ejemplo. La probabilidad de obtener el número 4 al lanzar un dado será
P(A) = 1/6 Siendo el suceso A: sacar el número 6

Ejemplo. La probabilidad de sacar un As de un juego de cartas será
P(A) = 4/52 Siendo el suceso A: sacar un As.

PROPIEDADES:

$P(A) \geq 0$ $P(S) = 1$ LO QUE IMPLICA $0 \leq P(A) \leq 1$

DEFINICION ESTADISTICA DE PROBABILIDAD.

Debido a las limitaciones que confronta la definición clásica de probabilidad, se comenzaron a realizar experimentos con los juegos de azar, surgiendo el concepto de **REGULARIDAD ESTADISTICA**.
QUE NO ES MAS QUE LA ESTABILIDAD QUE PRESENTAN LAS FRECUENCIAS RELATIVAS AL CONSIDERAR UN GRAN NUMERO DE VECES UN EXPERIMENTO BAJO LAS MISMAS CONDICIONES.
Ej. Lanzamiento de una moneda "n" veces, ya a partir del lanzamiento 400 y hasta el 1000, el comportamiento de que caiga cara es de 0.40, 0.505, 0502 ... es decir se estabiliza.
Otro ejemplo, es el nacimiento de niños y niñas, que cuando se ve en un número grande de veces, este se estabiliza.
que plantea:

Si n tiende a infinito la frecuencia relativa $f(A)$, alcanza un cierto valor límite o ideal, y entonces puede asociarse a un número P(A) tal que $f(A)$, sea iguala P(A) si:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} f(A)$$

La definición estadística, también muestra sus limitaciones, ya que existen experimentos que no se pueden repetir un número grande de veces y mucho menos, bajo las mismas condiciones, como para que se conozca la probabilidad.

DEFINICIÓN AXIOMÁTICA

Es por ello que en 1933 se axiomatiza la probabilidad y se parte de 3 axiomas básicos, para su desarrollo.
Si S es un espacio muestral y A un suceso definido en S, se dirá, que TODO SUCESO "A" DEFINIDO EN "S" ESTA ASOCIADO A UN NUMERO REAL LLAMADO PROBABILIDAD DE "A", EL CUAL CUMPLIRA CON LOS SIGUIENTES AXIOMAS:

1.- $P(A) \geq 0$
2.- $P(S) = 1$
3.- $P(A1 \cup A2 \cup A3 \cup ... \cup Ak) = P(A1) + P(A2) + ... + P(Ak)$ si los k sucesos, son mutuamente excluyentes o lo que es lo mismo si para cada par AiAj = conjunto vacío siendo i diferente de j.

Propiedades.

Propiedad #1 La probabilidad de un suceso imposible o nulo es cero:

$P(\varnothing) = 0$ $\quad A \cup \varnothing = A$

De esta propiedad y de los axiomas 1 y 2 se evidencia que:

$0 \leq P(A) \leq 1$

Propiedad #2

La probabilidad del suceso complementario al suceso A es igual a 1 menos la probabilidad de que ocurra A.

P(A') = 1 - P (A)

Propiedad #3

Si A y B son dos sucesos definidos en S, la probabilidad de que ocurra A y no ocurra B será:

P(AB') = P(A) - P(AB)

Propiedad #4

Si A y B son dos sucesos definidos en S entonces:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Propiedad #5

Si A es un subconjunto de

P(B) > P(A)

Propiedad #6

Si A, B, y C son sucesos definidos en S, entonces:

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$

2.3. PROBABILIDAD CONDICIONAL.

En contraposición a este concepto se estudiará ahora la ***PROBABILIDAD CONDICIONAL***, que como su nombre lo indica será la posibilidad de que ocurra un suceso, bajo la ocurrencia de otro.
Esto implica una referencia, no al espacio muestral en su totalidad, sino a otro suceso o subconjunto del espacio muestral; esto es al suceso al que esté condicionada.
Se representa esta probabilidad utilizando el símbolo **"/"** que se lee como "dado que" y después de él se plantea la condición; así será:

Se define la probabilidad condicional, como la probabilidad de la intersección de los sucesos, partido la condición. Así:

$$P(A/B) = P(AB)/P(B)$$

P(A/B) QUE SE LEE LA PROBABILIDAD DE "A" "DADO QUE" "B" YA *OCURRIO es decir condiciona la probabilidad de la ocurrencia de A, a que B ya tiene que haber ocurrido.*

Se debe reafirmar que la condición es el suceso que está después **(del símbolo "/")** de "dado qué"
Ejemplo. En un aula se forman 4 brigadas de estudiantes con la siguiente composición:

Brig.	V	H	total
1	5	5	10
2	6	4	10
3	3	8	11
4	7	3	10
	21	20	41

a.- ¿Cuál es la probabilidad, si se selecciona un estudiante al azar, de que sea hembra?

b.- ¿Cuál es la probabilidad de que se seleccione un estudiante al azar, y sea hembra de la brigada #2?

a.- P(H) = 20/41 = 0.448

b.- $P(H/B_2) = 4/10 = 0.4$ ó $[N(HB_2)/N(S)]/[N(B_2)/N(S)=$
$[4/41]/[10/41]= 4/10 = 0.4$

Fíjense que el inciso "a" se trata de una probabilidad total, se refiere a la totalidad de las hembras, mientras que en el inciso "b" están pidiendo la probabilidad de las hembras pero "condicionada" a que sea de la brigada 2, es decir hay una condición por tanto es una probabilidad condicionada.
Se debe señalar que también es posible encontrar la probabilidad condicional no solo de dos sucesos sino de combinaciones de dos o más sucesos. Y aunque se emplee la definición clásica ésta se cumple también aplicando la definición estadística.

2.4. INDEPENDENCIA DE SUCESOS. DE LA SUMA O ADICIÓN Y REGLA DEL PRODUCTO O MULTIPLICACIÓN.

REGLA DE LA ADICION O SUMA DE PROBABILIDAD

Si se tienen dos sucesos A y B, definidos en S, la probabilidad de A U B se expresa como:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Pero si A y B son mutuamente excluyentes entonces P(AB) = 0 por tal razón

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Y esto indica "al menos uno", es decir la probabilidad de A ó B ó de ambos AB.

SUCESOS INDEPENDIENTES.

Dos sucesos A y B se llaman independientes, cuando la probabilidad de ocurrencia de uno de ellos, no depende de la ocurrencia o no del otro, lo cuál puede ser expresada de la siguiente forma:
Dos sucesos son independientes si:

$$P(A/B) = P(A) \quad ó \quad P(B/A) = P(B)$$

Si son independientes se cumple que:

$$P(AB) = P(A)\,P(B)$$

Se debe aclarar que sólo se puede comprobar independencia a través de esta última fórmula si se tienen las 3 probabilidades y comprobar si la intersección es igual al producto de la probabilidad de ambos sucesos. Ejemplo de independencia:
Si se lanza una moneda dos veces, la probabilidad de que salga cara en el primer lanzamiento, no depende de que salga cara o no en el segundo lanzamiento.

REGLA DEL PRODUCTO O MULTIPLICACIÓN

Los sucesos No Excluyentes (tienen elementos comunes)

$$P(AB) \neq 0$$

y los sucesos A y B pueden ser independientes o dependientes.

Eventos Independientes: $P(AB) = P(A).P(B)$

Eventos Dependiente: $P(AB) \neq P(A).P(B)$

$$P(AB) = P(A).P(B/A)$$

Luego la regla del producto expresa la probabilidad de que ocurra A y B en un orden determinado: P(AB)=P(A)P(B/A) que primero salga A y en segundo lugar salga B ó P(AB)=P(B)P(A/B) que primero salga B y en segundo lugar A

Si no interesa el orden, sino que salga una vez A y una vez B, entonces se tienen que expresar las dos combinaciones posibles que hay: $P(AB) = P(A_1 B_2) + P(B_1 A_2)$

2.5. DISTRIBUCIONES TEÓRICAS DE PROBABILIDAD. DEFINICIÓN DE VARIABLE ALEATORIA. DEFINICIÓN DE FUNCIÓN DE PROBABILIDAD UNIVARIADA. CASO DISCRETO Y CONTINUO. PROPIEDADES

Se pudiera decir que una variable aleatoria es un fenómeno de interés cuyas respuestas o resultados se pueden expresar numéricamente.

Ejemplo. Experimento: lanzar una moneda dos veces.

Si lo que interesa es conocer la cantidad de caras que pueden aparecer. ¿Cuál será el espacio muestral?

S:[CC EE CE EC] X: número de caras que aparecen. X= 0, 1, 2

S	cantidad caras X	P(x)
EE	0	1/4
CE	1	2/4
EC		
CC	2	1/4
4		1

La fi (frecuencia relativa Tema 1) tiene analogía con distribución teórica de probabilidades

Las variables aleatorias se pueden clasificar en: discreta y continua

DISCRETA: Si toma un conjunto finito o infinito numerables de valores.

CONTINUA: Si toma cualquier valor real de un intervalo. Ej posible crecimiento de una planta.

FUNCION DE PROBABILIDAD. **Es la correspondencia que hay entre el valor de la variable y la probabilidad de ocurrencia de cada valor. Se denota por f (x).**

Si la función de probabilidad [f (x)] es discreta se le denomina **Función de Cuantía**. Para que sea una función de probabilidad, la función de cuantía, debe cumplir las siguientes propiedades

1.- $f(x) \geq 0$ 2.- $\sum_{i=1}^{n} f(x) = 1$

Debemos señalarse que hay autores que la función de cuantía la representan por p(x).

Ahora bien, si la función de probabilidad [f (x)] es continua se le denomina **Función de densidad**.

2.6. FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN. CARACTERÍSTICAS NUMÉRICAS DE UNA VARIABLE ALEATORIA. VALOR ESPERADO DE UNA VARIABLE ALEATORIA.

Existe una función que está íntimamente relacionada con f (x), la cual se denota por F(x) y se denomina Función de Distribución, y se define como:

La probabilidad de que "x" tome valores menores o iguales a un valor determinado (X_k). Es decir acumula hasta un valor determinado:

$$F(x) = P(X \leq X_k)$$

Equivalente a la distribución acumulada estudiada en el Tema 1

CARACTERISTICAS NUMERICAS DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Las características numéricas son medidas que permiten sintetizar la información de forma tal que ofrecen las características generales del fenómeno en estudio, es decir, sus rasgos principales. También se conocen como parámetros de las variables aleatorias.

Las características fundamentales que se estudiarán son: Media y Varianza

El valor medio de una Variable aleatoria, se denomina valor esperado ó esperanza matemática se denota por E (x).

El valor esperado de una variable aleatoria se puede considerar como su promedio ponderado sobre todos los resultados posibles siendo las "ponderaciones" la probabilidad relacionada con cada uno de los resultados.

El cálculo del valor esperado está en dependencia si se está trabajando con variables aleatorias discretas o continuas. En el caso de las variables aleatorias discreta, esta medida de resumen se puede obtener multiplicando cada resultado posible de xi por su probabilidad correspondiente P(xi) y después sumando los productos resultantes. Por lo tanto el valor esperado de la variable aleatoria discreta xi se puede expresar de la siguiente forma:

$$\mu = E(x) = \sum_{i=1}^{N} xi\, f(x)$$

Ejemplo: experimento del lanzamiento dos veces de una moneda que anteriormente se estudio si lo que interesa la cantidad de caras que pueden aparecer el espacio muestral es

S:[CC EE CE EC] X: número de caras que aparecen. X= 0, 1, 2

S	cantidad caras X	P(x)
EE	0	1/4
CE	1	2/4
EC		
CC	2	1/4
4		1

El valor esperado de la variable x se calculará según:

$$\mu = E(x) = \sum_{i=1}^{N} xi\, f(x)$$

E(X) = (0 . 1/4) + (1 . 2/4) + (2 . 1/4) = 1/2 +1/2 = 1

Interpretación: al lanzar dos veces una moneda se espera como promedio obtener 1 cara
En el caso de las variables aleatorias continuas, esta medida de resumen se obtiene integrando desde x_0 hasta x_n el producto de la variable x por su función de probabilidad. Por lo tanto el valor esperado de la variable aleatoria continua xi se puede expresar de la siguiente forma:

$$\mu = E(x) = \int_{x0}^{xn} xf(x)dx$$

VARIANZA

La varianza es igual a la esperanza de las desviaciones con respecto a la media, al cuadrado: $V(x) = E(x - \mu)^2$

También se simboliza por σ^2(sigma al cuadrado, letra griega). Haciendo transformaciones matemáticas se puede llegar a obtener una fórmula de cálculo para la varianza que es mucho más cómoda.
$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$ en el caso de la variable discreta

CONCLUSIONES

- ***Propiedad #1*** La probabilidad de un suceso imposible o nulo es cero:

  $P(\varnothing) = 0 \quad \leq P(A) \leq 1$

- ***Propiedad #2***

  La probabilidad del suceso complementario al suceso A es igual a 1 menos la probabilidad de que ocurra A.

  P(A') = 1 - P (A)

- ***Propiedad #3***

  Si A y B son dos sucesos definidos en S, la probabilidad de que ocurra A y no ocurra B será:

P(AB') = P(A) - P(AB)

- ***Propiedad #4***

Si A y B son dos sucesos definidos en S entonces:

P(A ∪ B) = P(A) + P(B) - P(AB)

- **La Probabilidad Condicional es la probabilidad que ocurra A dado que ya ocurrio B y es igual a P(A/B) = P(AB) / P(B)**
- **Eventos Independientes: P(AB) = P(A).P(B)**
  Eventos Dependiente: P(AB) ≠ P(A).P(B)

- **Las variables aleatorias pueden ser discretas y continuas.**

El valor esperado de una variable aleatoria discreta es $\mu = E(x) = \sum xi\ f(x)$

- **Función de Distribución F(x) = P ($X \leq X_k$) Equivalente a la distribución acumulada estudiada en el Tema 1.**

ESTUDIO INDEPENDIENTE

Ejercicio.

- En una SUM se realiza un estudio con 100 estudiantes los que son clasificados por el sexo y por la manifestación deportiva que practican.
A partir de los resultados que se recogieron en la tabla que se muestra a continuación

Manif. Deportiva	**Varones**	**Hembras**
Voleibol	40	**20**
Baloncesto	**30**	**10**

Responda:

a) Calcular e interprete la probabilidad de que al seleccionar un estudiante al azar estos sean Varones o practique voleibol.

b) Calcular e interprete la probabilidad de que al seleccionar un estudiante al azar estos sean Hembras, dado que practican baloncesto.

c) Justificar si los sucesos definidos en el inciso a) son independientes y mutuamente excluyentes.

- ***RESOLVER*** *los ejercicios del libro de texto Estadística 21, 22, 23 y 28, de la página 85 y 86.*