CARRERA INGENIERÍA INDUSTRIAL

ASIGNATURA: INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES II

Tema 2. Programación Dinámica.
2.1. Introducción.
2.2. Características de los problemas de programación dinámica.
2.3. Estrategias de solución.
2.4. Resolución de problema de programación dinámica
2.5. Ejemplo de Programación Dinámica Determinística.
2.6. Ejemplo de Programación Dinámica Probabilística

Objetivos: Que el alumno se capaz de:

- **Resolver problemas de Programación Dinámica Determinística y Probabilística, representativos de distintas situaciones utilizando diferentes algoritmos,**

Método: Clase Encuentro.

Medios: Tiza y pizarra, Libro de texto, MDD, PV.

Tipo de clase: Conferencia

Bibliografía: introducción a la Investigación de Operaciones.

Materiales Didácticos Digitales entregados por el profesor.

DESARROLLO

2.1. INTRODUCCIÓN.

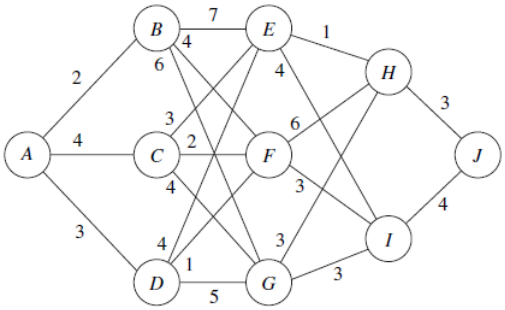
En los años posteriores a la guerra se abrieron nuevos temas de investigación y se plantearon diversos problemas, que fueron abordados desde una perspectiva matemática. Entre estos nuevos temas se encontraba la Teoría de los Procesos de Decisión en Múltiples Pasos, que Richard Bellman (1920 - 1984) abordaba alrededor de 1952 y para los cuales fue pensada la programación dinámica.
La programación dinámica es una técnica, que tiene como finalidad encontrar una solución de un problema de optimización en forma secuencial. A diferencia de la programación lineal, la programación dinámica no es un algoritmo de solución única, sino más bien **es un método para resolver un problema grande y único en una secuencia de problemas más pequeños (ETAPAS)**, sin importar el número de ellas. La programación dinámica permite resolver un problema que depende del tiempo en forma de una continuidad de problemas de un sólo periodo, en donde los parámetros de cada periodo dependen del periodo que se considera; es posible que no se conozca la cuantificación de cada periodo sino hasta que éste llega.

EJEMPLO PROTOTIPO DE PROGRAMACIÓN DINÁMICA

EJEMPLO 1. PROBLEMA DE LA DILIGENCIA. Se construyó por el profesor Harvey M. Wagner cuando estaba en Stanford University, especialmente para ilustrar las características e introducir la terminología de la programación dinámica (PD).

Este paradigma se refiere a un caza fortunas mítico de Missouri que decide ir al oeste a sumergirse en la fiebre del oro que surgió en California a mediados del siglo xix. Tiene que hacer el viaje en diligencia a través de territorios sin ley, donde existen

serios peligros de ser atacado por merodeado res. A pesar de que su punto de partida y su destino son fijos, tiene muchas opciones en cuanto a qué estados o territorios debe elegir como puntos intermedios.
En la figura se muestran posibles rutas a seguir en las que cada estado se muestra con círculos con una letra; además la dirección del viaje es siempre de izquierda a derecha. Como se puede observar se requieren 4 etapas o sea jornadas diarias en diligencias para viajar desde el punto de partida en el estado A (Missouri) a su destino en el estado J (California).
Este caza fortuna es un hombre prudente de su seguridad. Después de reflexionar un poco ideo una manera bastante ingeniosa para determinar la ruta más segura. Se ofrecen pólizas de seguro a los pasajeros de la diligencia. Como el costo de la póliza de cualquier jornada estaba basada en una evaluación cuidadosa de la seguridad del recorrido, la ruta más segura debe ser cuya póliza representa el menor costo total
Estos costos se muestran en la figura. La atención se centrará en la pregunta:
¿Cuál es la ruta que minimiza el costo total de la póliza?



	B	C	D
A	2	4	3

	E	F	G
B	7	4	6
C	3	2	4
D	4	1	5

	H	I
E	1	4
F	6	3
G	3	3

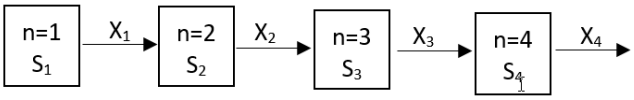
	J
H	3
I	4

2.2. CARACTERÍSTICAS DE LOS PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN DINÁMICA.

- Puede utilizarse en problemas lineales y no lineales, determinísticos o probabilísticos (estocásticos), univariado o multivariados.
- La PD no tiene formulación matemática a diferencia de la PL.
- Útil para resolver un problema donde se debe tomar una serie de decisiones interrelacionadas.
- Se puede dividir en **etapas (n),** cada una de las cuales requiere de una política de decisión para pasar a la próxima etapa. En el problema de la diligencia cada jornada se puede considerar una etapa, como son 4 jornadas la **cantidad de etapas total (N)** es N=4.
- Cada etapa tiene cierto número de **estados (Sn)** asociado con su inicio. En el problema de la diligencia son los territorios o estados a los que se puede dirigir en cada etapa. En general, los estados son las distintas *condiciones posibles* en las que se puede encontrar el sistema en cada etapa del problema. El número de estados puede ser finito como en el problema de la diligencia o infinito como en otros problemas.
- La **variable de decisión (Xn)** permite tomar la política de decisión de cada etapa y pasar a una nueva etapa, en el caso de la diligencia es disminuir los riesgos, la menor póliza de seguro.
- Existe una **función de recurrencia** que describe el comportamiento del sistema en función de los estados y las variables de decisión. Cada etapa tiene su propia función de recurrencia: **fn (Sn, Xn).** Para el problema de la diligencia será la suma acumulada de las pólizas de seguro de cada etapa

- Las políticas de decisión de cada etapa son independientes unas de otras. Dado el estado actual, una política óptima para las etapas restantes es independiente de la política adoptada en etapas anteriores.
- La solución del problema se fundamente en el principio de optimalidad que plantea "***dada una secuencia optima de decisiones, todas las subsecuencias de ella, es a la vez, óptima***"

Ejemplo: para el problema de la diligencia sería:



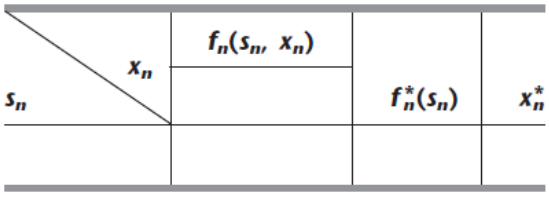
N = número de etapas.
n = etiqueta de la etapa actual (*n* = 1, 2, 3, 4).
Sn = *estado* actual de la etapa *n*.
Xn = variable de decisión de la etapa *n*.
Xn * = valor óptimo de *Xn* (dado *Sn*).
fn(*Sn*, *Xn*) = contribución de los estados *n*, *n* + 1, . . . , *N* a la función objetivo si el sistema se encuentra en el estado *Sn* en la etapa *n*, la decisión inmediata es *Xn*, y en adelante se toman decisiones óptimas.

$$f^*n(Sn) = fn(Sn, Xn^*).$$

La relación cursiva siempre tendrá la forma:

$f\,n^*(Sn) = \text{máx}\,\{fn(Sn, Xn)\}$ o $f\,n^*(Sn) = \text{mín}\,\{fn(Sn, Xn)\}$,

En todo problema de programación dinámica se obtiene una tabla asi



2.3. ESTRATEGIAS DE SOLUCION.

Enumeración exhaustiva: enumerar todas las rutas posibles, calcular su valor y elegir el de menos valor para este caso de la diligencia son 18 rutas (muy laborioso).
Optimización por etapas: elegir la ruta de menos valor de cada etapa. Esta solución no conduce al optimo global porque un pequeño sacrificio en una etapa podría permitir mayores ahorros más adelante. Con esta estrategia se puede alcanzar una solución buena para iniciar, pero no necesariamente tiene que ser la solución óptima.

Programación Dinámica: un problema complejo se divide en problemas simples que se resuelven etapas por etapas. En el caso de la diligencia un problema simple sería analizar que le pasaría al viajero si solo le faltara una etapa, teniendo en cuenta el valor acumulado.

La Programación Dinámica tiene dos campos.

Programación Dinámica Determinística: En estos problemas no existe incertidumbre a la hora de calcular las soluciones óptimas, etapa a etapa.

Programación Dinámica Probabilística o Estocástica: en estos problemas habrá cierta incertidumbre sobre los resultados obtenidos en cada etapa, ya que existe una distribución de probabilidad para determinar cual será el siguiente estado. Esta distribución de probabilidad está determinada por el estado y la variable de decisión de la etapa actual.

2.4. RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN DINÁMICA

La programación dinámica se aplica, generalmente, para resolver problemas de optimización, como por ejemplo:

- El problema de la ruta más corta
- Asignación de recursos
- El problema de la mochila
- El problema del camino de mínimo costo
- Planificación de trabajos

Los problemas se puede resolver de dos formas:

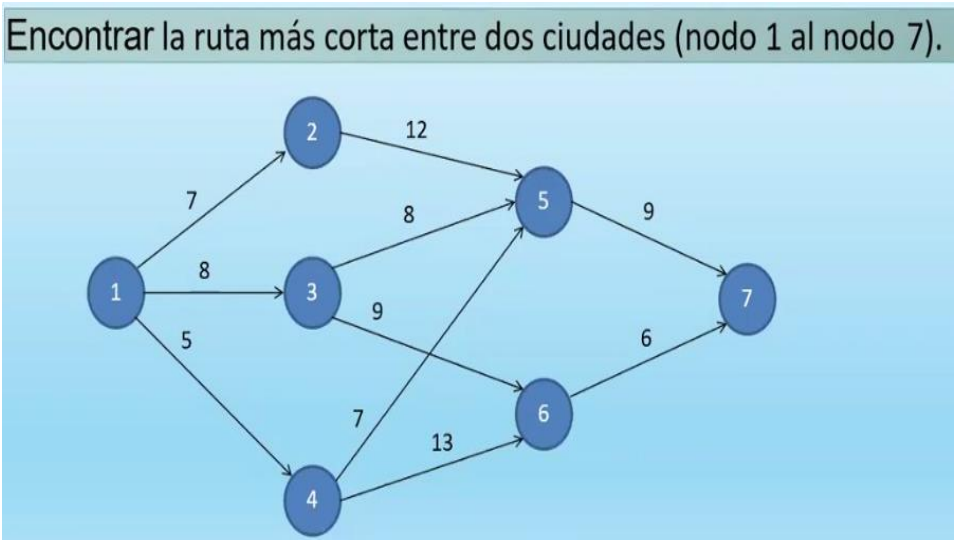
- En retrocesos, de atrás hacia adelante, de la última etapa a la primera.
- En avance de la primera etapa a la última.

Solucionar un problema de programación dinámica requiere tener en cuenta tres pasos claves como son:

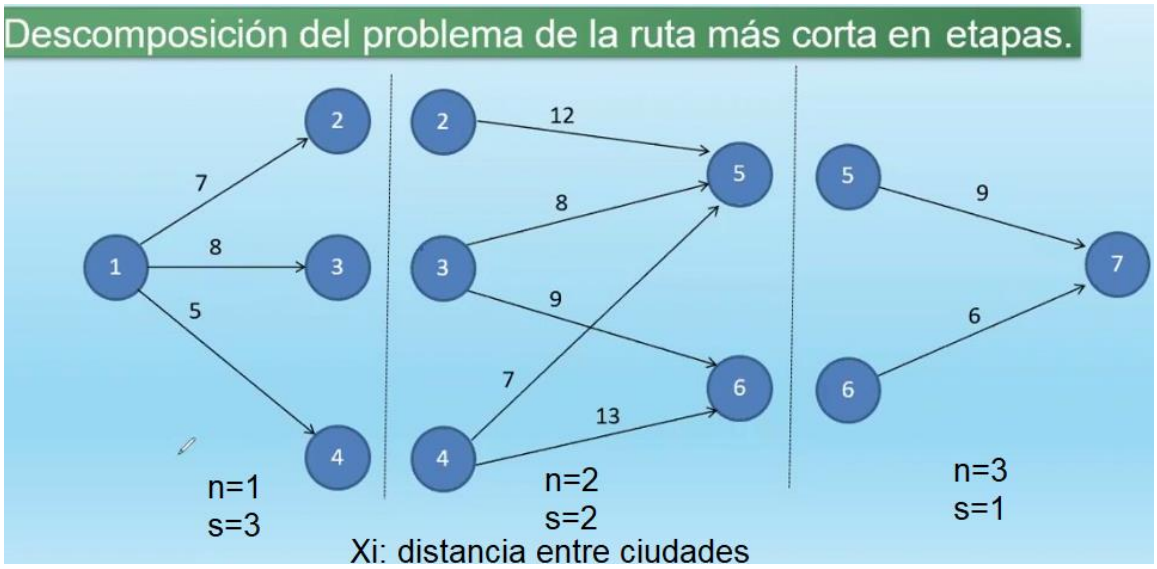
1. **Identificar etapas, estados y variable de decisión.**
2. **Describir las funciones o ecuaciones de recurrencia.**
3. **Resolver (análisis etapa a etapa; decisión combinando las soluciones de cada etapa.**

2.5. PROGRAMACIÓN DINÁMICA DETERMINÍSTICA.

EJEMPLO 1



1. **Identificar etapas, estados y variable de decisión.**



2. Describir las funciones o ecuaciones de recurrencia

La ecuación recursiva en reversa para el ejemplo es:

$$f_i(x_i) = \min_{\substack{\text{todas las rutas} \\ \text{viables } (x_i, x_{i+1})}} \left\{ d(x_i, x_{i+1}) + f_{i+1}^*(x_{i+1}) \right\}, \qquad i = 1, 2, 3$$

donde:

$f_4(x_4) = 0$ para $x_4 = 7$. El orden asociado de cálculo es

$$f_3 \rightarrow f_2 \rightarrow f_1$$

3. Resolver (análisis de cada etapa).

Etapa 3: (n=3)

$S \backslash X_4$	$X_4 = 7$	F_3^* (costo óptimo)	x^* (decisión óptima)
5	9	9	7
6	6	6	7

Etapa 2: n=2

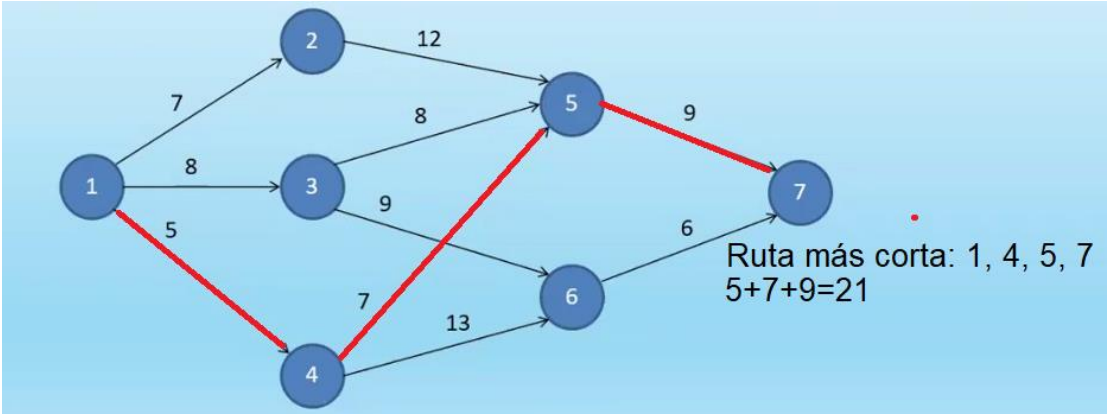
$S\backslash X_3$	$X_3 = 5$	$X_3 = 6$	F_2^* (costo óptimo)	$\bar{x}^*$ (decisión óptima)
2	12 + 9 = **21**	–	21	5
3	8 + 9 =17	9 + 6 =**15**	15	6
4	7 + 9 =**16**	13 + 6 = 19	16	5

Etapa 1: (n=1)

$S\backslash X_2$	$X_2 = 2$	$X_2 = 3$	$X_2 = 4$	F_2^* (costo óptimo)	$\bar{x}^*$ (decisión óptima)
1	7 + 21 =28	8 + 15 =23	5 + 16 =**21**	21	4

La ruta óptima es: $1 \xrightarrow{5} 4 \xrightarrow{7} 5 \xrightarrow{9} 7$

Decisión:



2.6. PROGRAMACIÓN DINÁMICA PROBABILÍSTICA (PDP).

En la Programación Dinámica Probabilística hay incertidumbre sobre los resultados obtenidos en cada etapa, ya que existe una distribución de probabilidad para determinar cuál será el siguiente estado.

EJEMPLO 2 PDP(Asignación)

Un proyecto de investigación sobre cierto problema de ingeniería tiene 3 equipos de investigadores que tratan de resolver el problema desde 3 puntos de vistas diferentes. Se estima que en las circunstancias actuales la probabilidad de que los equipos A, B, C, fracasen es de 0.40, 0.60, 0.80 respectivamente. Así la probabilidad de que los tres fracasen es de (0.40)(0.60)(0.80) = 0.192 (19.2%). El objetivo es minimizar la probabilidad de fracaso de los 3 equipos y por ello se asignan al proyecto 2 nuevos científicos de alto nivel.

Según la asignación a los equipos la probabilidad de fracaso cambia según lo indica la siguiente tabla.

Según la asignación a los equipos la probabilidad de fracaso cambia según lo indica la siguiente tabla

Número de científicos	Equipos		
	A	B	C
0	0.4	0.6	0.8
1	0.2	0.4	0.5
2	0.15	0.2	0.3

Solución

Datos:

Etapas: N= 3 (n=1 Equipo A) ; (n=2 Equipo B) ; (n=3 Equipo C)

Estados: Número de científicos pendientes por asignar en la etapa n.

Variable de decisión (Xn) : número de científicos a asignar en la etapa n

Función recursiva: Minimizar probabilidad de fracaso

$$f_n^*(S) = \min.(f_n(S, X_n))$$

$$f_n^*(S) = \min.(D_{i,\,xn} + f^*_{n-1}(S - X_n))$$

donde

$P_{i,\,xn}$: probabilidad de fracaso i en la etapa n cuando se le asignan Xn brigadas

Xn : 0, 1, 2,

etapa n=3	Posibles soluciones equipo C			Solución optima	
X_3	$F_3(S,X_3) = P_3,X_3$			Valor $f_3^*(S_3)$	Solución X_3^*
S	0	1	2		
0	0.8			0.8	0
1		0.5		0.5	1
2			0.3	0.3	2

cientificos sin asignar

Científicos sin asignar

etapa n=2	Posibles soluciones equipo B			Solución optima	
X_2	$f_2(S,X_2) = P_2,X_2 * F^*_3(S-X_3)$			$F_2^*(S_2)$	X_2^*
S	0	1	2		
0	B0+C0 0.6*0.8= 0.48			0.48	0
1	B0+C1 0.6*0.5= 0.30	B1+C0 0.4*0.8= 0.32		0.3	0
2	B0+C2 0.6*0.3= 0.18	B1+C1 0.4*0.5= 0.20	B2+C0 0.2*0.8= 0.16	0.16	2

brigadas sin asignar

etapa n= 1	Posibles soluciones equipo A			Solución optima	
X3	$F_1(S,X_1) = P_1,X_1 * F^*_2(S.X_2)$			$F_1^*(S_1)$	X_1^*
S	0	1	2		
2	A0+B2+C0 0.4*0.16= 0.064	A1+B0+C1 0.2*0.3= 0.06	A2+B0+C0 0.15*0.48= 0.072	0.06	1

Respuesta:

La solución óptima en la primera etapa es integrar un científico al equipo A, quedando otro para integrarlo a uno de los dos equipos restantes; en la segunda etapa lo óptimo es no integra científico al equipo B y en la última etapa se integra el científico al equipo C (A=1; C=1)

CONCLUSIONES:

La programación dinámica es una técnica, que tiene como finalidad **resolver un problema grande y único en una secuencia de problemas más pequeños (ETAPAS)**, sin importar el número de ellas.

La Programación Dinámica tiene dos campos: Programación Dinámica Determinística: En estos problemas no existe incertidumbre a la hora de calcular las soluciones óptimas, etapa a etapa y **Programación Dinámica Probabilística o Estocástica:** en estos problemas habrá cierta incertidumbre sobre los resultados obtenidos en cada etapa.

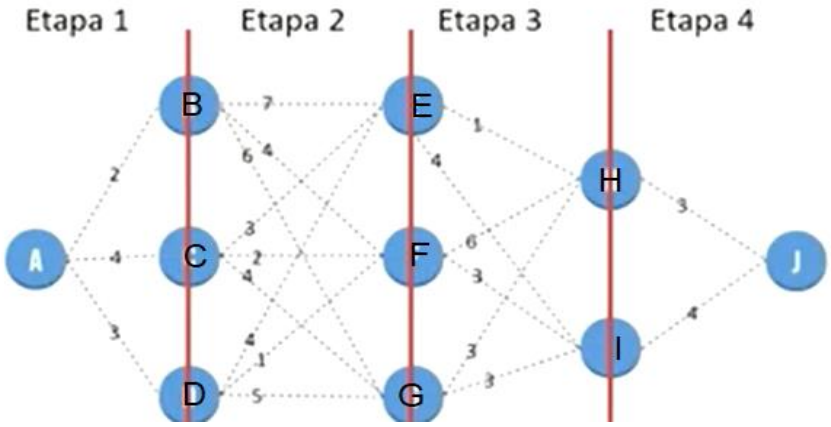
Tiene como conceptos básicos: las etapas (n), los estados (s), las variables de decisión (x) y la ecuación recursiva.

Para solucionar un problema de programación dinámica requiere tener en cuenta tres pasos claves como son: **Identificar etapas, estados y variable de decisión; describir las funciones o ecuaciones de recurrencia; resolver el problema (análisis etapa a etapa y decisión combinando las soluciones de las etapas).**

ESTUDIO INDIVIDUAL.

EJERCICIO 1

Aplicaremos la solución tabular y para ello es necesario reconocer, en primera instancia, las etapas en las que se dividen el problema



Activa
Ve a Cor

EJERCICIO 2

En la provincia de Artemisa hay 3 obras de construcción (A, B, C) que se desean terminar lo más rápido posible. La empresa constructora encargada de las obras dispone de 4 brigadas especializadas y quiere determinar la forma óptima de asignarlas a cada obra.

Los datos estimados de los días que dura cada obra de acuerdo al número de brigadas que se asignen se muestra en la siguiente tabla.

Número de Brigadas	Objetos de obras		
	A	B	C
0	260	230	270
1	220	200	235
2	190	180	200
3	150	170	180
4	120	150	150

Determine como deben asignarse las brigadas a las obras para minimizar los días de ejecución de los tres objetos de obras

EJERCICIO 3.
Un grupo de especialistas en Proyectos está evaluando la posibilidad de construcción de una nueva planta. La decisión a tomar debe tener en cuenta 2 situaciones:

a) Se puede construir una planta grande o una pequeña.

b) Si se opta por construir inicialmente una planta pequeña debe considerarse la posibilidad de ampliar o no la planta si las circunstancias lo justifican.

Lo anterior debe estar en función del comportamiento de la demanda, la cual como no se conoce con exactitud se ha decidido clasificarla en alta, media y baja, estimándose probabilidades de ocurrencia de 0.4, 0.4, y 0.2 respectivamente. El grupo de especialistas ha elaborado la siguiente información:

Si se construye una planta grande, esta será adecuada para hacer frente a cualquier demanda posible y no se considerará la necesidad de ampliación. Las ganancias estimadas de acuerdo con los niveles de demanda son de 10 MM USD para una demanda alta, 5 MMUSD para una demanda media y 0 MMUSD para una demanda baja.

Si se decide construir una planta pequeña solo se considerará la posibilidad de ampliación si la demanda resulta ser alta o media. Si la demanda es alta se puede seleccionar una ampliación grande, o una pequeña, o no ampliar. Si se considera una ampliación grande para un nivel de demanda alto, se estima que podría obtenerse una ganancia de 8 MMUSD. Si la ampliación fuese pequeña se obtendrían 9 MMUSD y si se opta por no ampliar entonces se obtendrían 4 MMUSD.

Si la demanda es media entonces solo deben considerarse como alternativas una ampliación pequeña o no ampliar. La planta ampliada generaría una ganancia que se calcula en 9 MMUSD mientras que la decisión de no ampliar reportaría una ganancia de solo 4 MMUSD.

Si la demanda es baja se calcula una ganancia de 4 MMUSD. En estas condiciones el grupo de Proyectos debe determinar cual debe ser la mejor decisión a tomar si el criterio económico a utilizar es el de hacer máxima la ganancia.