UNIVERSIDAD DE ARTEMISA

FOLLETO DE CLASES PARA LA ASIGNATURA DE INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES II

CARRERA DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

AUTOR: M.Sc. ING. RODOLFO PÉREZ LEÓN

AÑO 2025

ÍNDICE

TEMA 1. TEORÍA DE LAS DECISIONES **1**

TEMA 2. PROGRAMACIÓN DINÁMICA **16**

TEMA 3. SISTEMAS DE SERVICIO **26**

TEMA 4. SIMULACIÓN **38**

Ingeniería Industrial
Asignatura: Investigación de operaciones II Año: 4to. Semestre CRD.

Tema 1. Teoría de la Decisión.
1.1. Introducción.
1.2. Conceptos Básicos.
1.3. Ambientes en que se desarrolla la toma de decisión.
1.4. Matriz de Decisión.
1.5. Toma de Decisión en condiciones de incertidumbre.
- **1.5.1. Criterio Pesimista (de Wald).**
- **1.5.2. Criterio Optimista (Maximax).**
- **1.5.3. Criterio de Laplace.**
- **1.5.4. Criterio de Savage.**
- **1.5.5. Criterio de Hurwicz.**

1.6. Toma de Decisión en condiciones de Riesgos. Fuentes de obtener las probabilidades
1.7. Modelos para la Toma de Decisión.
- **1.7.1. Criterio del Valor Esperados (VE_i).**
- **1.7.2. Criterio de la Perdida de la Oportunidad Esperada (VEO_i).**
- **1.7.3. Criterio de Futuro Probable.**
- **1.7.4. Criterio Nivel de Aspiración**

1.8. Valor Esperado de la Información Perfecta (VEIP).
1.9. El Árbol de decisión.
Objetivos: Que el alumno se capaz de:
- **Caracterizar las situaciones de decisión que pueden ser resueltas mediante la teoría de la decisión y los elementos básicos de la matriz de decisión**
- **Aplicar los criterios para la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre y riesgos, sobre la base de sus resultados recomendar la mejor decisión.**
- **Elaborar e interpretar árbol de decisión para el proceso de toma de decisión**

Método: Expositivo.
Medios: Tiza y pizarra, Libro de texto, MDD.
Forma de enseñanza: Conferencia
Bibliografía: Felipe Valdés, Pilar. Dpto. de Ciencia Empresariales. Facultad de Economía. Universidad de la Habana, 2008.
Materiales Didácticos Digitales entregados por el profesor.

DESARROLLO

1.1. INTRODUCCION:

La Investigación Operativa (IO) es una ciencia aplicada, se basa en el uso del método científico, que utiliza análisis cuantitativo, modelos y métodos matemáticos destinados **a determinar las mejores condiciones para el empleo de los recursos, financieros, materiales, o humanos**.

Surge en Gran Bretaña, durante la Segunda Guerra Mundial, cuando el Ministerio de Defensa del país organiza grupos con físicos, matemáticos y otros especialistas para asesorar y contribuir al mejor desarrollo de las operaciones militares.

Una vez finalizada la guerra muchos de los miembros de estos equipos pasaron a la actividad empresarial e industrial y continuaron sus estudios sobre los métodos matemáticos que habían desarrollado, apoyados ahora con el surgimiento y expansión de las computadoras.

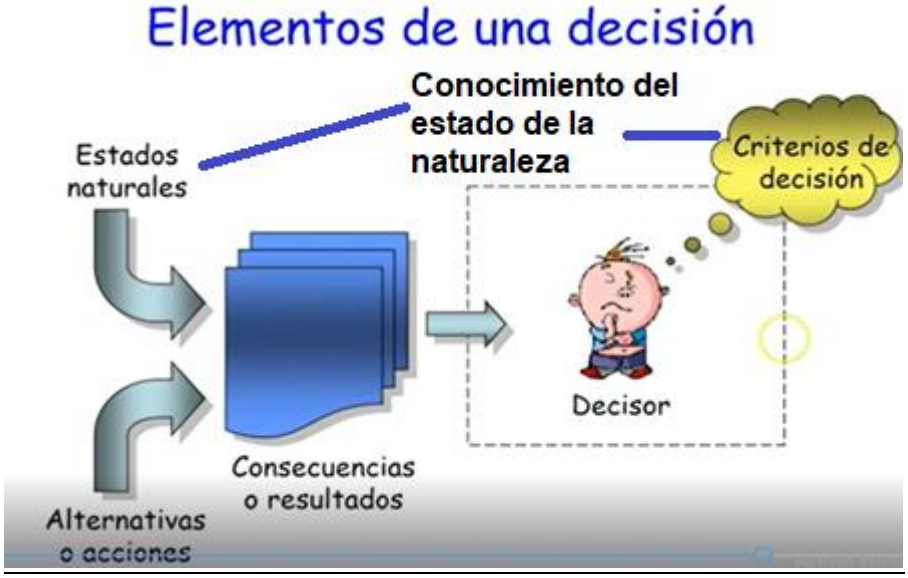
Cada persona toma constantemente decisiones en su vida cotidiana: a que hora levantarse, que ropa utilizar, que programa ver, etc. Estas decisiones se toman en forma automática o por intuición y sentido común, siendo en ocasiones de poca importancia las consecuencias de una decisión equivocada.
En cambio, en el sector empresarial, la toma de decisión reviste una gran importancia porque de ella depende el desarrollo de la organización y de sus miembros y por ello resulta **la función administrativa más importante de todo directivo,** el que debe tomar decisiones antes problemas tales como:
¿Será necesario emprender una inversión o una reparación en la empresa?
¿Qué producto comprar?
¿Que estrategia de marketing se debe aprobar de varias propuestas?
¿Qué cantidad de productos elaborar según la posible demanda?

La toma de decisión se puede analizar como un proceso en el que intervienen los siguientes pasos**: definir los objetivos - obtener los datos - generar las posibles alternativas - evaluar las alternativas - tomar la decisión - seguir adelante**

1.2. CONCEPTOS BASICOS.

“Teoría de la decisión”: es una técnica matemática (cuantitativa) que sirve de apoyo para la toma de decisión ante determinados problemas, permite determinar la mejor alternativa a fin de resolver el problema a través de modelos matemáticos.
“Modelos”: es un intento de representar o explicar algún aspecto de la realidad, usando menos que esta, ej: una fotografía, un plano de una casa, una ecuación matemática una teoría, un concepto, una maqueta.
"Decisión": va a suponer una "elección" o "selección" fundamentada en criterios establecido; además una evaluación de los resultados posibles y la existencia cinco elementos que constituyen la situación de decisión, los cuales son:
1. Las Alternativas: posibles respuestas a un problema (acciones, estrategias), de ellas debe elegirse una. Deben expresarse en términos mutuamente excluyentes.
2. Estados de la naturaleza o eventos: Son las circunstancias o acciones externas que afectan el resultado de una decisión, pero que están fuera del control del decisor. Deben expresarse en términos mutuamente excluyentes y ser colectivamente exhaustivos (todos conforman el espacio muestral).
3. Resultados: Pueden expresarse en términos económicos (ganancia, costo, etc.) o en términos de alguna medida no monetaria como preferencias o escalas de valoración.
4. La existencia de un decisor: a quien corresponde proponer los criterios de selección y aplicarlos

5. El grado de conocimiento: que se tiene sobre el comportamiento de los estados de la naturaleza (probabilidades de ocurrencia).



1.3. AMBIENTES EN QUE SE DESARROLLA LA TOMA LA DECISIÓN

La Decisión se puede tomar en 4 diferentes ambientes o circunstancias

1- Ambiente de certeza o certidumbre: Se presenta cuando el decisor conoce con precisión, y a priori, el estado de la naturaleza que va a presentarse.

Ej: Alternativas (salir sin paraguas o con paraguas); estados de la naturaleza (Llueve)

2- Ambiente de incertidumbre: Se presenta cuando el conjunto de los estados de la naturaleza es aleatorio, pero no se conoce o no puede establecerse la probabilidad de ocurrencia de cada uno de ellos.

Ej: Alternativas (salir sin paraguas o con paraguas); estados de la naturaleza (Llueve o no llueve)

3- Ambiente de riesgo: Decimos que se presenta cuando el conjunto de los estados de la naturaleza es de carácter aleatorio, conociéndose la probabilidad de ocurrencia de cada uno de ellos.

Ej: Alternativas (salir sin paraguas o con paraguas); estados de la naturaleza (probabilidad que Llueva 30%; probabilidad que no llueva 70%).

4- Ambiente de conflictos: Se debe tomar la decisión bajo incertidumbre en los que hay un oponente al que hay que vencer.

Ej: en las competencias deportivas, juegos de domino, cartas, etc, en el marco teórico se llama Teoría de los Juegos, pero en este curso no se estudiará este ambiente.

Para todos estos posibles ambientes existen los llamados modelos de decisión, que no son más que criterios que sirven para determinar la mejor alternativa, curso de acción o estrategia a fin de resolver un problema de decisión dado.



- **Certidumbre** (se conoce el estado Natural que se enfrenta)



- **Incertidumbre** (no se conoce la probabilidad de ocurrencia de cada estado natura)l;



- **Riesgo** (se conoce la probabilidad de ocurrencia de cada estado natura);



- **Conflicto** (no se conoce la probabilidad de ocurrencia de cada estado natura y se enfrenta a un oponente que hay que vencer).

1.4. MATRIZ DE DECISION

También llamada matriz de pagos o de costos, proporciona una estructura organizada en la cual aparecen los tres elementos o partes esenciales de una situación de decisión, representándose como sigue:

MATRIZ DE DECISION

Decisiones Alternativas	ESTADOS DE LA NATURALEZA						
	E_1	E_2	E_3	. . . . .	E_j	. . . . .	E_n
D_1	R_{11}	R_{12}	R_{13}	. . . . .	R_{1j}	. . . . .	R_{1n}
D_2	R_{21}	R_{22}	R_{23}	. . . . .	R_{2J}	. . . . .	R_{2n}
D_3	R_{31}	R_{32}	R_{33}	. . . . .	R_{3j}	. . . . .	R_{3j}
.	.	.	.		.		.
.	.	.	.		.		.
D_i	R_{i1}	R_{i2}	R_{i3}	. . . . .	R_{ij}	. . . . .	R_{in}
.	.	.	.		.		.
.	.	.	.		.		.
D_m	R_{m1}	R_{m2}	R_{m3}	. . . . .	R_{mj}	. . . .	R_{mn}
Probabilidad	P_1	P_2	P_3	. . . . .	P_j	. . . . .	P_n

Donde:

Di: i-ésima decisión alternativa disponible para el que toma la decisión

Ej: j-ésimo estado de la naturaleza o evento

Pj: Probabilidad que ocurra el estado de la naturaleza

Ej Rij: Resultado que se obtiene si se adopta la decisión alternativa i y ocurre el estado de la naturaleza j

En los casos en que no se conozca la probabilidad (situación de incertidumbre) la matriz de decisión solo estará compuesta por las decisiones alternativas, los estados de la naturaleza y los resultados.

1.5. TOMA DE DECISIONES EN CONDICIONES DE INCERTIDUMBRE: CRITERIOS DE DECISION

En este caso, al no conocerse ni siquiera la probabilidad de que se produzca cada estado de la naturaleza se corre un riesgo mayor de tomar una decisión totalmente desacertada. El decisor puede en este caso tener una actitud optimista, o pesimista o adoptar una actitud intermedia.

Los principales criterios de decisión para la situación de incertidumbre son los siguientes:

- Criterio pesimista o de Wald.
- Criterio optimista.
- Criterio de Laplace.
- Criterio de Savage.
- Criterio de Hurwicz.

1.5.1. CRITERIO PESIMISTA DE DECISION (WALD): La persona que toma decisiones considera que debe evitar pérdidas altas aún a riesgo posiblemente de perder altas utilidades se inclinará a utilizar el criterio pesimista o modelo de decisión de Wald, que es un criterio muy conservados.

Para aplicar este criterio se determina, para cada alternativa de decisión, el "peor resultado" (ganancia mínima o costo máximo) y después se elige el que tenga el mayor (o menor) de los resultados peores. La alternativa a la que corresponda dicho valor será la alternativa a adoptar de acuerdo con este criterio. Matemáticamente este criterio se expresa de la forma siguiente:



Para Ganancia: $\underset{i}{Max}\,\underset{j}{Min}\,R_{ij}$	**Para Costo**: $\underset{i}{Min}\,\underset{j}{Max}\,R_{ij}$

1.5.2. CRITERIO OPTIMISTA DE DECISION: En este criterio, el que toma la decisión es optimista y piensa que no perderá la oportunidad de lograr el mejor resultado posible (mayor ganancia o menor costo). Se trata pues de elegir la alternativa que ofrezca el mejor resultado sin tener en cuenta las pérdidas que pudieran derivarse de que se presente otro estado de la naturaleza, por lo que este tipo de criterio envuelve el riesgo de una gran pérdida. Matemáticamente este criterio se expresa como sigue:

Para Ganancia: $\underset{i}{Max}\,\underset{j}{Max}\,R_{ij}$	**Para Costo**: $\underset{i}{Min}\,\underset{j}{Min}\,R_{ij}$

1.5.3. CRITERIO DE LAPLACE: Este criterio que también se denomina *"de la misma probabilidad"* o de *"la razón insuficiente"* se basa en asignar probabilidades iguales a todos los estados de la naturaleza. O sea, debido a la falta de conocimiento de las probabilidades de ocurrencia se asume que todos tienen la misma probabilidad de ocurrir. Esto significa que si se tienen n estados de la naturaleza la probabilidad de ocurrencia de cada estado es igual a 1/n.

Matemáticamente este criterio se expresa como sigue:

Para ganancia : $\underset{i}{Max}\,\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} R_{ij}$ n - estados de la naturaleza	**Para Costo**: $\underset{i}{Min}\,\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} R_{ij}$ n - estados de la naturaleza

Esto significa que se elige la alternativa que tiene el mejor valor esperado, que en este caso, al ser iguales las probabilidades, es lo mismo que la alternativa que tiene el mejor resultado medio.

1.5.4. CRITERIO DE SAVAGE (CRITERIO DE *"PERDIDAD DE OPORTUNIDAD"*): Este también es un criterio pesimista que Savage diseña para sustituir el de Wald (O sea, el del sujeto prudente pero pesimista). Savage introduce el concepto de *"pérdida de oportunidad"* conocido también por "arrepentimiento", "pena", "lamentación".

Esto puede expresarse en la forma siguiente:

Pérdida de Oportunidad para la Alternativa i y el Estado de la Naturaleza j	=	Mejor Resultado para el Estado de la Naturaleza j	-	Resultado que se obtiene con la Alternativa i y el Estado de la Naturaleza j
O_{ij}	=	R^*_j	-	R_{ij}

La pérdida de oportunidad es, por tanto, la cantidad que se pierde cuando la alternativa escogida no es la mejor para un estado dado de la naturaleza, o sea, son las pérdidas relativas por no haber elegido la alternativa mejor al ocurrir dicho estado de la naturaleza. Con los valores Oij calculados se construye una nueva matriz, que se conoce como *Matriz de Pérdida de oportunidad* o de Arrepentimientos, la cual tiene la misma estructura que la matriz de decisión. El criterio de selección plantea entonces tomar, para cada alternativa, el Mayor valor de los Oij (MAX), considerando entonces como la mejor alternativa, la que presenta entre todos ellos el menor valor. En términos matemáticos el criterio se expresa como:

$$\underset{i}{Min}\,\underset{j}{Max}\,O_{ij}$$

1.5.5. CRITERIO DE HURWICZ: Este criterio parte de combinar ponderaciones de optimismo y pesimismo. Sugiere este autor la consideración de un coeficiente de optimismo denotado por (α) que puede tomar cualquier valor comprendido entre 0 y 1. Nosotros consideraremos que si α= 1 significa completo optimismo y si α = 0 significa completo pesimismo

A partir de definir y si el problema es de máximo se calcula para cada alternativa la siguiente expresión:

$$H_i = \alpha \underset{j}{Max} R_{ij} + (1-\alpha) \underset{j}{Min} R_{ij}$$

El criterio de selección será entonces escoger la alternativa para la cual se tenga el valor máximo para las Hi.

Si el problema es de mínimo la expresión a emplear es la siguiente:

$$H_i = \alpha \underset{j}{Min} R_{ij} + (1-\alpha) \underset{j}{Max} R_{ij}$$

Escogiéndose la alternativa para la cual se tenga el valor mínimo para las Hi.

El coeficiente se elige partiendo de razones subjetivas, o sea, cuanto más peligrosa sea la situación, cuanto más queremos asegurarnos en ella, menor será nuestra inclinación al riesgo y por tanto más pequeño será el valor que le otorguemos a (α).

Estos criterios de decisión pueden conducir a recomendaciones diferentes. Esto no es malo en si mismo, es semejante a discutir el problema desde diferentes puntos de vista, pues como se sabe, de la discusión sale la mejor solución. Por tanto, no puede esperarse de la teoría de la decisión soluciones definitivas e indiscutibles, con lo único que puede ayudarnos es con consejos.

Si las recomendaciones que se deducen de los diferentes criterios coinciden, tanto mejor, entonces se puede elegir sin vacilar la alternativa recomendada. Si como sucede frecuentemente, las recomendaciones son contradictorias, entonces razonemos sobre éstas, aclaremos hasta que punto divergen los resultados obtenidos, precisemos los puntos de vista y hagamos la elección definitiva.

1.6. TOMA DE DECISIONES EN CONDICIONES DE RIESGO. FUENTES DE OBTENCIÓN DE LA INFORMACIÓN.

Cuanto más aumenta el número de alternativas posibles, así como el número e importancia de los factores que se están considerando, tanto mayor es el coeficiente de riesgo en la adopción de decisiones.
Una vía para valorar el riesgo es la introducción de probabilidades. Esto conduce a la toma de decisiones en la llamada situación de riesgo, situación en la cual se le puede asociar una probabilidad a la ocurrencia de cada estado de la naturaleza.

Las fuentes de donde obtener las probabilidades pueden ser:

Historia del pasado Una fuente de probabilidades es la historia del pasado. Este enfoque supone que una buena base para predecir lo que sucederá en el futuro es aquello que ocurrió en el pasado. Si se puede suponer que el futuro será parecido al

pasado, las frecuencias relativas se convierten en las probabilidades de los eventos futuros. Esto, por supuesto, no tiene siempre que ser así, y existen muchos ejemplos de errores debido a la incapacidad de los administradores de ver el futuro diferente al pasado.

El juicio subjetivo Podemos pues definir la probabilidad subjetiva como aquella que le asigna una persona a un evento o estado de la naturaleza basándose en su juicio subjetivo. Las asignaciones de probabilidad subjetivas se dan frecuentemente cuando los eventos ocurren una sola vez, y a lo máximo unas cuantas veces.

Por ejemplo, con frecuencia al terminar las guerras comienzan periodos de crisis, y al terminar la Segunda Guerra Mundial algunas compañías se prepararon para enfrentar esa probable crisis mientras que otras, lo vieron como una oportunidad y aprovecharon el nuevo escenario de desarrollo tecnológico que se produjo, estas últimas alcanzaron ventajas competitivas sobre las primeras.

Distribución de probabilidades: Algunas situaciones pueden ser descritas por una distribución de probabilidades como son la Binomial, la Poisson o la Normal.





1.7. MODELOS PARA LA TOMA DE DECISIÓN EN AMBIENTE DE RIESGOS.

Al igual que en el caso de toma de decisiones en incertidumbre, en al caso de riesgo también existen diferentes criterios que pueden servir de apoyo cuantitativo en la toma de decisiones. En nuestro curso estudiaremos los siguientes:

- Criterio del Valor esperado
- Criterio de la Pérdida de oportunidad esperada
- Criterio del Futuro probable
- Criterio del Nivel de aspiración

1.7.1. Criterio de valor esperado es uno de los más utilizados en la toma de decisiones bajo riesgo, *garantizando el mejor resultado a largo plazo*, o sea, cuando se repita la decisión seleccionada de acuerdo con este criterio por un largo período de tiempo. El concepto de valor esperado es pues un concepto que proporciona resultados "a la larga", es como un promedio proyectado al futuro.

Para aplicar este criterio se calcula el valor esperado de cada alternativa i aplicando la siguiente expresión:

$$VE_i = \sum_{j=1}^{n} R_{ij} P_j$$

donde: VE_i : Valor esperado para la alternativa i

P_j : Probabilidad asociada al evento o estado de la naturaleza j

La regla de decisión es escoger la alternativa que proporcione el **MEJOR VALOR ESPERADO**

Para Ganancia: $MaxVE_i$	**Para Costo:** $MinVE_i$

1.7.2. Criterio de la pérdida de oportunidad esperada. Para aplicar este criterio se calcula, para cada alternativa el *valor esperado de la pérdida de oportunidad* como sigue: j

$$VEO_i = \sum_{j=1}^{n} O_{ij} P_j$$

donde: VEO_i : es el valor esperado de la pérdida de oportunidad para la alternativa i

El criterio de selección es escoger la alternativa que proporcione el valor mínimo, o sea: $MinVEO_i$

1.7.3. Criterio del futuro probable. Para aplicar este criterio se examina cada valor de probabilidad para cada estado de la naturaleza y se considera sólo el de mayor valor de probabilidad. Considerando que ocurrirá ese estado de la naturaleza se busca entonces la alternativa que presente el resultado con mejor valor (MAX para ganancia y MIN para el costo). Debe no obstante destacarse que este criterio es más aplicable cuando existe un estado de la naturaleza cuya probabilidad correspondiente excede bastante a cualquiera de las restantes.

1.7.4. Criterio del nivel de aspiración. Este es un principio que se emplea con bastante frecuencia se conozca o no. Para usar este criterio se debe especificar algún nivel de aspiración, o sea, un valor mínimo con el cual el que toma la decisión está satisfecho (Este criterio está basado en el concepto de satisfacción). A partir de ahí se calcula, para cada alternativa, la suma de las probabilidades de los estados de la naturaleza para los cuales se puede alcanzar el nivel de aspiración prefijado. El criterio de selección consiste en escoger la alternativa que proporcione el mayor valor de probabilidad.

1.8. VALOR ESPERADO DE LA INFORMACIÓN PERFECTA (VEIP).

Se le llama información perfecta a la información que dice exactamente lo que va a ocurrir, esto es, cuando se sabe exactamente el estado de la naturaleza que va a presentarse. Si sabemos con exactitud el estado de la naturaleza que ocurrirá es fácil determinar la alternativa que debe elegirse. Supongamos el caso en que estemos considerando una matriz de decisión cuyos resultados representan ganancia.
Calculemos entonces la ganancia esperada con información perfecta (GEIP), empleando para ello la siguiente expresión:

$$GEIP = \sum_{j=1}^{n} R^*{}_j P_j$$

Donde:
GEIP: Ganancia esperada con información perfecta
R*j: Resultado máximo para el estado de la naturaleza j
P_j: Probabilidad del estado de la naturaleza j

El Valor esperado de la información perfecta lo denotaremos por VEIP.
En general se plantea que

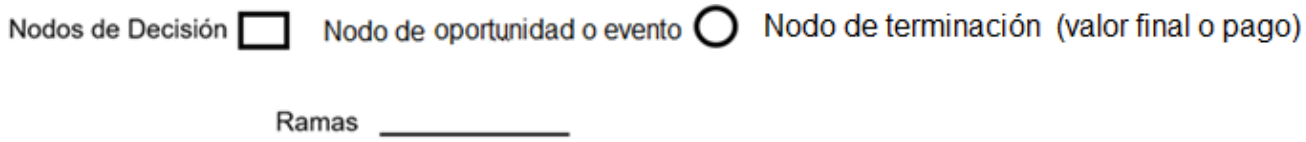
$$VEIP = GEIP - VE_O$$

donde VEo indica el Valor Esperado Máximo.
Conocer el valor de la información perfecta permite reducir el nivel de pérdida de oportunidad esperada. (Recordar que la pérdida de oportunidad esperada (VEOi) es en esencia la diferencia entre lo que ganamos y lo que quisiéramos ganar).

1.9. Árbol de Decisión.

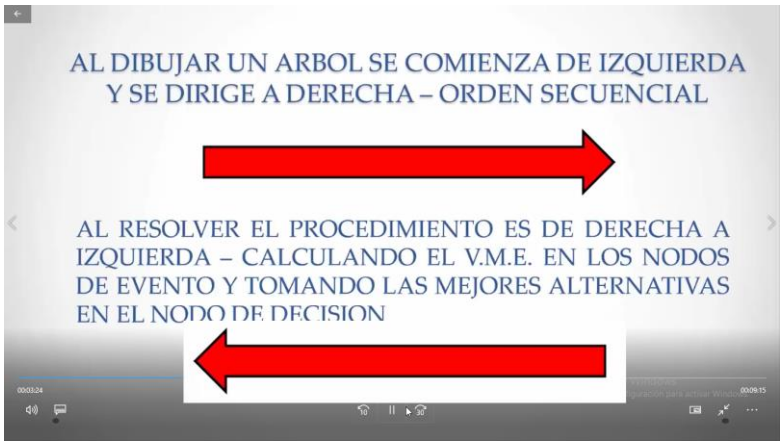
Un árbol de decisión es una representación gráfica que permite estructurar, de una forma clara y sencilla el proceso de toma de decisiones, fundamentalmente en los casos en que se debe tomar una secuencia de decisiones; es una herramienta útil en la toma de decisiones referente a inversiones, la adquisición o venta de propiedades, la estrategia de nuevos productos, etc.

El árbol de decisión está formado por:



Construcción del Árbol de Decisión,

1. Definir el problema a resolver, esto es, determinar el conjunto de alternativas y eventos posibles y la secuencia de las decisiones a tomar



2. Una vez construido el árbol de decisión se deben reflejar las probabilidades en las Ramas de oportunidad

3. Calcular para cada rama terminal el valor esperado (VME_i), los cuales están en función de los datos económicos disponibles

$$VME = \Sigma Xij * Pi$$

4. Efectuar el análisis del árbol siguiendo el procedimiento correspondiente.

El análisis en el árbol de decisión:

El análisis comienza por las ramas terminales y se mueve a través de los nodos de oportunidad y decisión hasta que se ha identificado una secuencia "óptima" de decisiones que comienza en el primer nodo de decisión.

Se utilizan para ello las siguientes reglas:

1) En cada nodo de oportunidad se hace un cálculo del valor monetario esperado (VME)

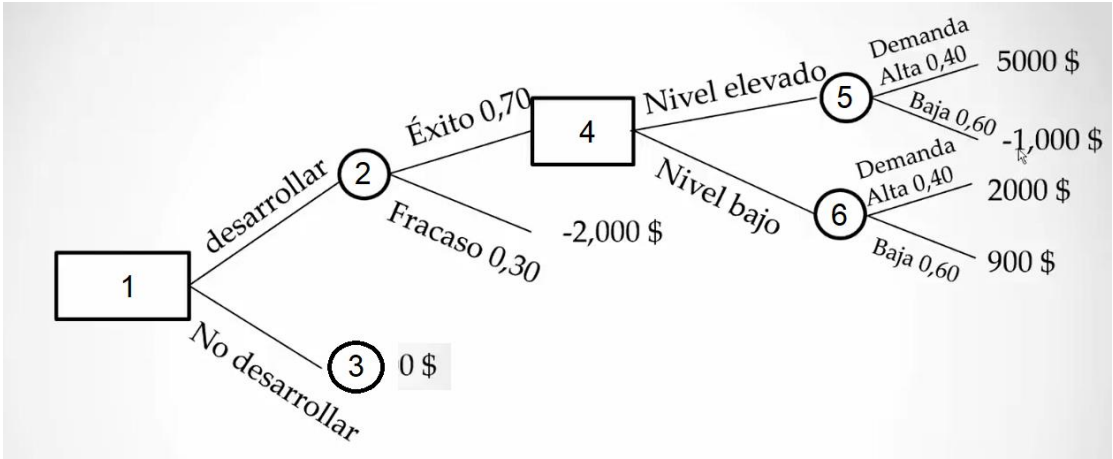
$$VME = \Sigma Xij * Pi$$

2) En cada nodo de decisión se selecciona la alternativa con el mejor valor esperado (Máximo o mínimo en función del criterio económico que se utiliza) Resumiendo el procedimiento podemos decir que la aplicación de esta técnica exige la realización de una serie de pasos que pasamos a relacionar:

Ejemplo

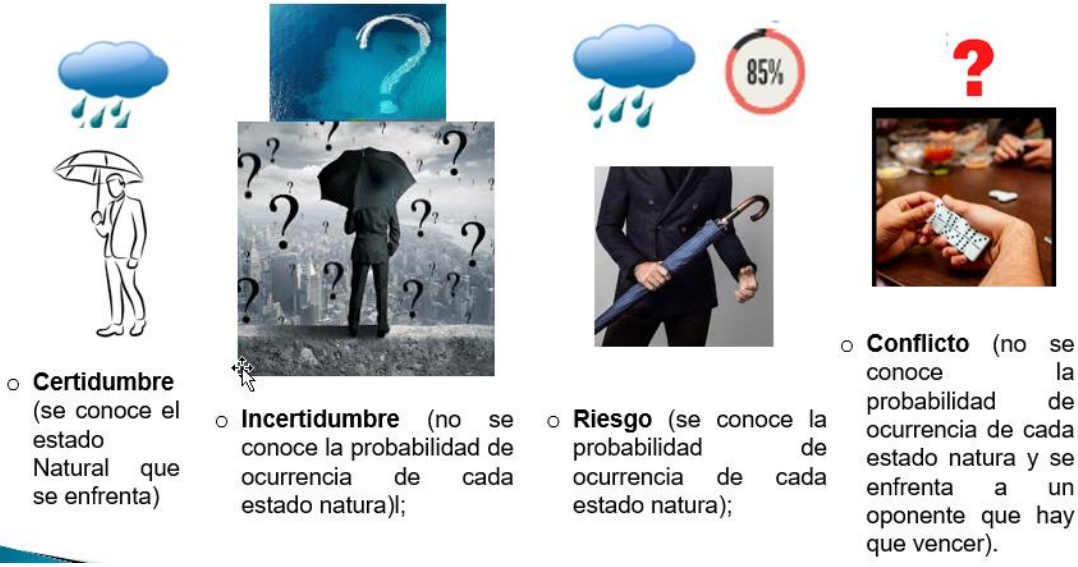
CONSTRUCCIÓN DE UN ÁRBOL DE DECISIÓN

A un fabricante se le presentó una propuesta para un producto nuevo y debe **decidir si desarrollarlo o no**. La **probabilidad** de **éxito en caso de desarrollarlo** es del 0.70. Si el desarrollo **no tiene éxito** se termina el proyecto con una **pérdida de 2,000 $us**. Si tiene **éxito**, el fabricante debe entonces **decidir** si el nivel de **producción** ha de **ser alto o bajo.** Si la **demanda es elevada**, la ganancia, dado un nivel **alto de producción** es de 5,000$ y **dado un nivel bajo** es de 2.000. **Si la demanda es baja**, la perdida, dado un nivel **alto de producción** es de 1.000 $; dado **un nivel bajo** la ganancia es de 900 $. Se estima que la **probabilidad** de una **demanda elevada** es del 0.40 y de **demanda baja** es del 0.60. Elaborar un árbol de decisiones; decidir si debe desarrollar o no el producto y en caso de desarrollarlo, si lo debe hacer a un nivel bajo o alto.



CONCLUSIONES

- **Los cinco elementos que constituyen la situación de decisión son:**
  - **las alternativas** (posibles soluciones)
  - **estados de la naturaleza** (están fuera de control de decisor),
  - **resultados** (pueden expresarse en términos económicos ganancia, costo, etc.)
  - **la existencia de un decisor**.
  - **el grado de conocimiento que se tiene sobre los estados naturales** (probabilidades de ocurrencia).
- **La toma de decisión se puede desarrollar en cuatro ambientes:**
  - **Certidumbre** (se conoce el estado Natural que se enfrenta);
  - **Incertidumbre** (no se conoce la probabilidad de ocurrencia de cada estado natura)l;
  - **Riesgo** (se conoce la probabilidad de ocurrencia de cada estado natura);
  - **Conflicto** (no se conoce la probabilidad de ocurrencia de cada estado natura y se enfrenta a un oponente que hay que vencer).



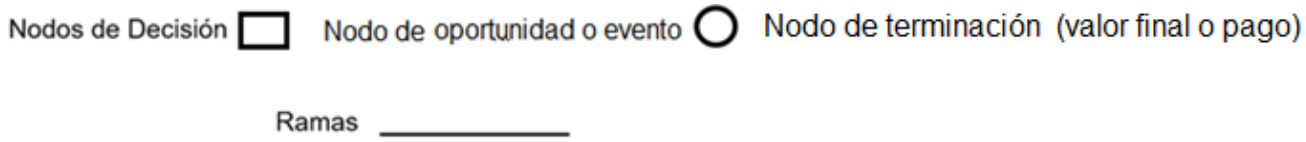
- **La matriz de decisión**, también llamada matriz de pagos o de costos, proporciona una estructura organizada en la cual aparecen los tres elementos o partes esenciales de una situación de decisión, alternativas (i) estado de la naturaleza (j) y resultados (Rij)
- **Criterios o Modelos para la Toma de Decisión en ambientes de Incertidumbre** (no se conocen las probabilidades de ocurrencias de los estados naturales).
  - **Criterio Pesimista de Wald.**
  - **Criterio Optimista.**
  - **Crterio de Laplace.**
  - **Criterio de Savage.**
  - **Crtietrio de Hurwicz.**
- **Criterios o Modelos para la Toma de Decisión en ambientes de riesgos** (se conocen las probabilidades de ocurrencias de los estados naturales).

- **Criterio del Valor esperado (VE_i)**
- **Criterio de la Pérdida de Oportunidad Esperada (VEO_i)**
- **Criterio del Futuro probable**
- **Criterio del Nivel de aspiración.**

- **Valor Esperado de la Información Perfecta (VEIP)** coincide con el valor esperado de la pérdida de oportunidad (VEO_i).

- Un árbol de decisión es una representación gráfica que permite estructurar, de una forma clara y sencilla el proceso de toma de decisiones, fundamentalmente en los casos en que se debe tomar una secuencia de decisiones; es una herramienta útil en la toma de decisiones referente a inversiones, la adquisición o venta de propiedades, la estrategia de nuevos productos, etc.

El árbol de decisión está formado por:



ESTUDIO INDEPENDIENTE PARA LA CLASE PRÁCTICA 1

Ejercicio 1. La directiva de la CPA Ismael Ricondo en Artemisa, debe decidir su estrategia de cultivo para la próxima temporada teniendo en cuenta para ello el terreno a utilizar y el comportamiento del tiempo. Los posibles cultivos a sembrar serán designados por A, B y C, mientras que los posibles comportamientos de los estados de la naturaleza pueden clasificarse en lluvioso, normal y seco. Las experiencias de trabajo con estos cultivos permiten estimar cuáles serán las cosechas de cada uno de éstos ante distintos comportamientos de los estados del tiempo, pudiendo por tanto realizar estimaciones de las ganancias que se podrían obtener, las cuales se muestran en la siguiente matriz de decisión:

	Comportamiento del Clima		
Cultivos	Lluvioso	Normal	Seco
A	$250	$290	$200
B	$150	$200	$250
C	$ -100	$450	$350

En el momento de tomar la decisión no se conoce cuál será el comportamiento del tiempo, no obstante, hay que tomar la decisión. En estas condiciones: Si el criterio a utilizar es el de lograr la máxima ganancia ¿Cual es la mejor decisión a tomar por la cooperativa?

Ejercicio 2. La directiva de la CPA Ismael Ricondo debe decidir su estrategia de cultivo para la próxima temporada teniendo en cuenta para ello el terreno a utilizar y el comportamiento del tiempo. Los posibles cultivos a sembrar serán designados por

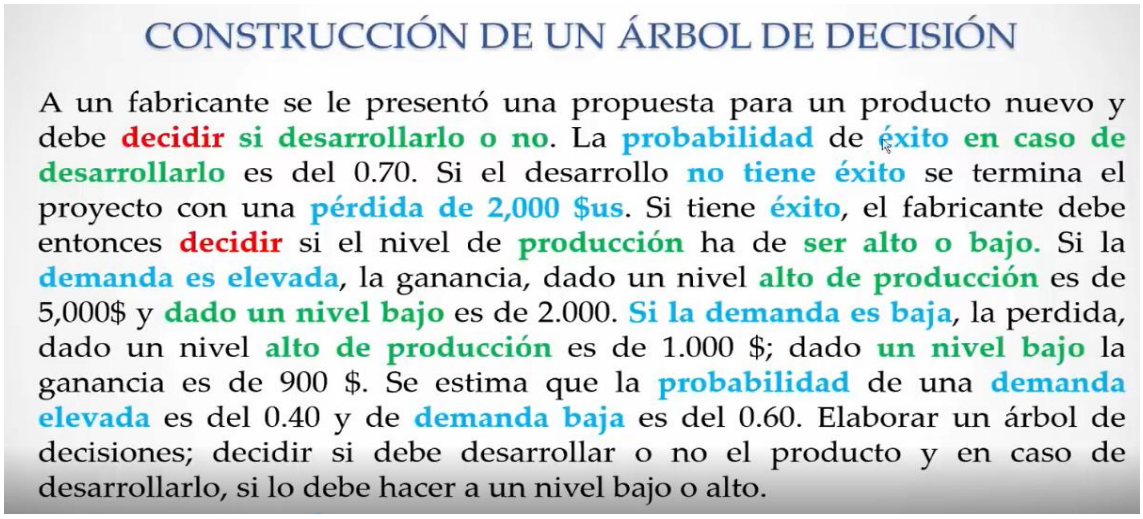
A, B y C, mientras que los posibles comportamientos de los estados de la naturaleza pueden clasificarse en lluvioso, normal y seco.

Las experiencias de trabajo con estos cultivos permiten estimar cuáles serán las cosechas de cada uno de éstos ante distintos comportamientos de los estados del tiempo, y *conociendo además por historias anteriores que la probabilidad para los estados lluvioso y seco es del 25% y para el estado normal es del 50%.*

De manera que es posible realizar estimaciones de las ganancias que se podrían obtener, las cuales se muestran en la siguiente matriz de decisión:

	Comportamiento del Clima		
Cultivos	Lluvioso	Normal	Seco
A	$250	$290	$200
B	$150	$200	$250
C	$ -100	$450	$350
	p=0.25	p= 0.5	p= 0.25

Ejercicio 3



Ejemplo 4. El gerente de la empresa de Producciones Mecánicas del MINAGRI, debe decidir si comprar una o dos máquinas que se necesitan para una planta procesadora de alimentos; decisión que dependerá del comportamiento de la demanda que puede presentarse alta o baja.

Los estudios de mercado han arrojado que existe un 20% de probabilidad de que la demanda sea baja. El costo de adquisición de una sola máquina es de $20000, mientras que si se adquieren las dos juntas el costo será de $30000. Por su parte, subcontratar producciones a un tercero, en lugar de realizarlas con medios propios, asciende a $30000.

Si compra dos máquinas los ingresos esperados por la explotación de las dos máquinas serán de $180000 si la demanda es alta, y de $90000 si la demanda es baja.

Si compra solo una máquina y la demanda del mercado es alta, podrá más tarde adquirir la segunda máquina, obteniendo ingresos de $140000; o subcontratar la producción faltante a un tercero, con ingresos de $150000; o decidir no invertir con ingresos de $125000. Si la demanda es baja lo recomendable es no comprar otra máquina, lo que dejaría ingresos de $120000.

EJERCICIO 5.

Un grupo de especialistas en Proyectos está evaluando la posibilidad de construcción de una nueva planta. La decisión a tomar debe tener en cuenta 2 situaciones:

a) Se puede construir una planta grande o una pequeña.

b) Si se opta por construir inicialmente una planta pequeña debe considerarse la posibilidad de ampliar o no la planta si las circunstancias lo justifican.

Lo anterior debe estar en función del comportamiento de la demanda, la cual como no se conoce con exactitud se ha decidido clasificarla en alta, media y baja, estimándose probabilidades de ocurrencia de 0.4, 0.4, y 0.2 respectivamente. El grupo de especialistas ha elaborado la siguiente información:

Si se construye una planta grande, esta será adecuada para hacer frente a cualquier demanda posible y no se considerará la necesidad de ampliación. Las ganancias estimadas de acuerdo con los niveles de demanda son de 10 MM USD para una demanda alta, 5 MMUSD para una demanda media y 0 MMUSD para una demanda baja.

Si se decide construir una planta pequeña solo se considerará la posibilidad de ampliación si la demanda resulta ser alta o media. Si la demanda es alta se puede seleccionar una ampliación grande, o una pequeña, o no ampliar. Si se considera una ampliación grande para un nivel de demanda alto, se estima que podría obtenerse una ganancia de 8 MMUSD. Si la ampliación fuese pequeña se obtendrían 9 MMUSD y si se opta por no ampliar entonces se obtendrían 4 MMUSD.

Si la demanda es media entonces solo deben considerarse como alternativas una ampliación pequeña o no ampliar. La planta ampliada generaría una ganancia que se calcula en 9 MMUSD mientras que la decisión de no ampliar reportaría una ganancia de solo 4 MMUSD.

Si la demanda es baja se calcula una ganancia de 4 MMUSD. En estas condiciones el grupo de Proyectos debe determinar cual debe ser la mejor decisión a tomar si el criterio económico a utilizar es el de hacer máxima la ganancia.

CARRERA INGENIERÍA INDUSTRIAL

ASIGNATURA: INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES II

Tema 2. Programación Dinámica.
2.1. Introducción.
2.2. Características de los problemas de programación dinámica.
2.3. Estrategias de solución.
2.4. Resolución de problema de programación dinámica
2.5. Ejemplo de Programación Dinámica Determinística.
2.6. Ejemplo de Programación Dinámica Probabilística

Objetivos: Que el alumno se capaz de:

- **Resolver problemas de Programación Dinámica Determinística y Probabilística, representativos de distintas situaciones utilizando diferentes algoritmos,**

Método: Clase Encuentro.

Medios: Tiza y pizarra, Libro de texto, MDD, PV.

Tipo de clase: Conferencia

Bibliografía: introducción a la Investigación de Operaciones.

Materiales Didácticos Digitales entregados por el profesor.

DESARROLLO

2.1. INTRODUCCIÓN.

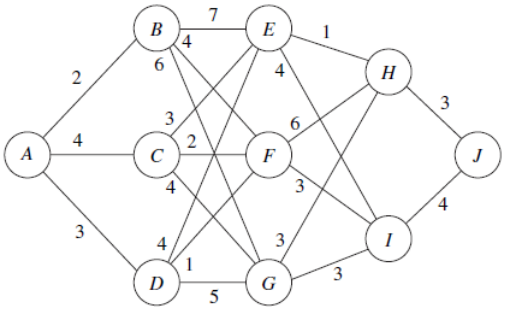
En los años posteriores a la guerra se abrieron nuevos temas de investigación y se plantearon diversos problemas, que fueron abordados desde una perspectiva matemática. Entre estos nuevos temas se encontraba la Teoría de los Procesos de Decisión en Múltiples Pasos, que Richard Bellman (1920 - 1984) abordaba alrededor de 1952 y para los cuales fue pensada la programación dinámica.
La programación dinámica es una técnica, que tiene como finalidad encontrar una solución de un problema de optimización en forma secuencial. A diferencia de la programación lineal, la programación dinámica no es un algoritmo de solución única, sino más bien **es un método para resolver un problema grande y único en una secuencia de problemas más pequeños (ETAPAS)**, sin importar el número de ellas. La programación dinámica permite resolver un problema que depende del tiempo en forma de una continuidad de problemas de un sólo periodo, en donde los parámetros de cada periodo dependen del periodo que se considera; es posible que no se conozca la cuantificación de cada periodo sino hasta que éste llega.

EJEMPLO PROTOTIPO DE PROGRAMACIÓN DINÁMICA

EJEMPLO 1. PROBLEMA DE LA DILIGENCIA. Se construyó por el profesor Harvey M. Wagner cuando estaba en Stanford University, especialmente para ilustrar las características e introducir la terminología de la programación dinámica (PD).

Este paradigma se refiere a un caza fortunas mítico de Missouri que decide ir al oeste a sumergirse en la fiebre del oro que surgió en California a mediados del siglo xix. Tiene que hacer el viaje en diligencia a través de territorios sin ley, donde existen

serios peligros de ser atacado por merodeado res. A pesar de que su punto de partida y su destino son fijos, tiene muchas opciones en cuanto a qué estados o territorios debe elegir como puntos intermedios.
En la figura se muestran posibles rutas a seguir en las que cada estado se muestra con círculos con una letra; además la dirección del viaje es siempre de izquierda a derecha. Como se puede observar se requieren 4 etapas o sea jornadas diarias en diligencias para viajar desde el punto de partida en el estado A (Missouri) a su destino en el estado J (California).
Este caza fortuna es un hombre prudente de su seguridad. Después de reflexionar un poco ideo una manera bastante ingeniosa para determinar la ruta más segura. Se ofrecen pólizas de seguro a los pasajeros de la diligencia. Como el costo de la póliza de cualquier jornada estaba basada en una evaluación cuidadosa de la seguridad del recorrido, la ruta más segura debe ser cuya póliza representa el menor costo total
Estos costos se muestran en la figura. La atención se centrará en la pregunta:
¿Cuál es la ruta que minimiza el costo total de la póliza?



	B	C	D
A	2	4	3

	E	F	G
B	7	4	6
C	3	2	4
D	4	1	5

	H	I
E	1	4
F	6	3
G	3	3

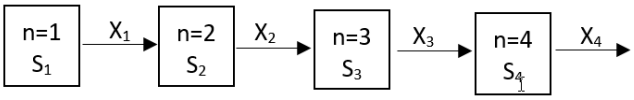
	J
H	3
I	4

2.2. CARACTERÍSTICAS DE LOS PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN DINÁMICA.

- Puede utilizarse en problemas lineales y no lineales, determinísticos o probabilísticos (estocásticos), univariado o multivariados.
- La PD no tiene formulación matemática a diferencia de la PL.
- Útil para resolver un problema donde se debe tomar una serie de decisiones interrelacionadas.
- Se puede dividir en **etapas (n),** cada una de las cuales requiere de una política de decisión para pasar a la próxima etapa. En el problema de la diligencia cada jornada se puede considerar una etapa, como son 4 jornadas la **cantidad de etapas total (N)** es N=4.
- Cada etapa tiene cierto número de **estados (Sn)** asociado con su inicio. En el problema de la diligencia son los territorios o estados a los que se puede dirigir en cada etapa. En general, los estados son las distintas *condiciones posibles* en las que se puede encontrar el sistema en cada etapa del problema. El número de estados puede ser finito como en el problema de la diligencia o infinito como en otros problemas.
- La **variable de decisión (Xn)** permite tomar la política de decisión de cada etapa y pasar a una nueva etapa, en el caso de la diligencia es disminuir los riesgos, la menor póliza de seguro.
- Existe una **función de recurrencia** que describe el comportamiento del sistema en función de los estados y las variables de decisión. Cada etapa tiene su propia función de recurrencia: **fn (Sn, Xn).** Para el problema de la diligencia será la suma acumulada de las pólizas de seguro de cada etapa

- Las políticas de decisión de cada etapa son independientes unas de otras. Dado el estado actual, una política óptima para las etapas restantes es independiente de la política adoptada en etapas anteriores.
- La solución del problema se fundamente en el principio de optimalidad que plantea "***dada una secuencia optima de decisiones, todas las subsecuencias de ella, es a la vez, óptima***"

Ejemplo: para el problema de la diligencia sería:



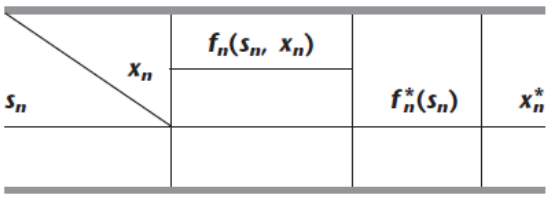
N = número de etapas.
n = etiqueta de la etapa actual (*n* = 1, 2, 3, 4).
Sn = *estado* actual de la etapa *n*.
Xn = variable de decisión de la etapa *n*.
Xn * = valor óptimo de *Xn* (dado *Sn*).
fn(*Sn*, *Xn*) = contribución de los estados *n*, *n* + 1, . . . , *N* a la función objetivo si el sistema se encuentra en el estado *Sn* en la etapa *n*, la decisión inmediata es *Xn*, y en adelante se toman decisiones óptimas.

$$f^*n(Sn) = fn(Sn, Xn^*).$$

La relación cursiva siempre tendrá la forma:

$f\,n^*(Sn) = \text{máx}\,\{fn(Sn, Xn)\}$ o $f\,n^*(Sn) = \text{mín}\,\{fn(Sn, Xn)\}$,

En todo problema de programación dinámica se obtiene una tabla asi



2.3. ESTRATEGIAS DE SOLUCION.

Enumeración exhaustiva: enumerar todas las rutas posibles, calcular su valor y elegir el de menos valor para este caso de la diligencia son 18 rutas (muy laborioso).
Optimización por etapas: elegir la ruta de menos valor de cada etapa. Esta solución no conduce al optimo global porque un pequeño sacrificio en una etapa podría permitir mayores ahorros más adelante. Con esta estrategia se puede alcanzar una solución buena para iniciar, pero no necesariamente tiene que ser la solución óptima.

Programación Dinámica: un problema complejo se divide en problemas simples que se resuelven etapas por etapas. En el caso de la diligencia un problema simple sería analizar que le pasaría al viajero si solo le faltara una etapa, teniendo en cuenta el valor acumulado.

La Programación Dinámica tiene dos campos.

Programación Dinámica Determinística: En estos problemas no existe incertidumbre a la hora de calcular las soluciones óptimas, etapa a etapa.

Programación Dinámica Probabilística o Estocástica: en estos problemas habrá cierta incertidumbre sobre los resultados obtenidos en cada etapa, ya que existe una distribución de probabilidad para determinar cual será el siguiente estado. Esta distribución de probabilidad está determinada por el estado y la variable de decisión de la etapa actual.

2.4. RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN DINÁMICA

La programación dinámica se aplica, generalmente, para resolver problemas de optimización, como por ejemplo:

- El problema de la ruta más corta
- Asignación de recursos
- El problema de la mochila
- El problema del camino de mínimo costo
- Planificación de trabajos

Los problemas se puede resolver de dos formas:

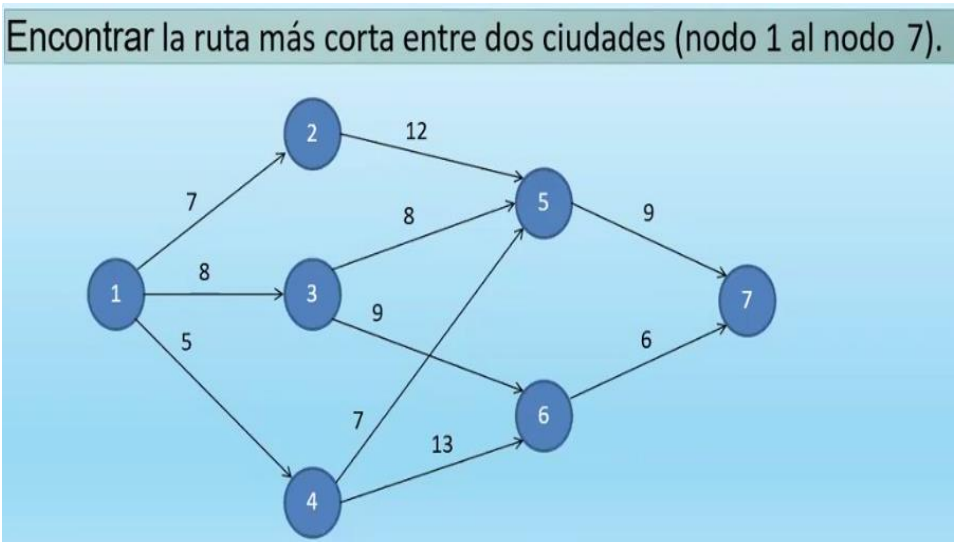
- En retrocesos, de atrás hacia adelante, de la última etapa a la primera.
- En avance de la primera etapa a la última.

Solucionar un problema de programación dinámica requiere tener en cuenta tres pasos claves como son:

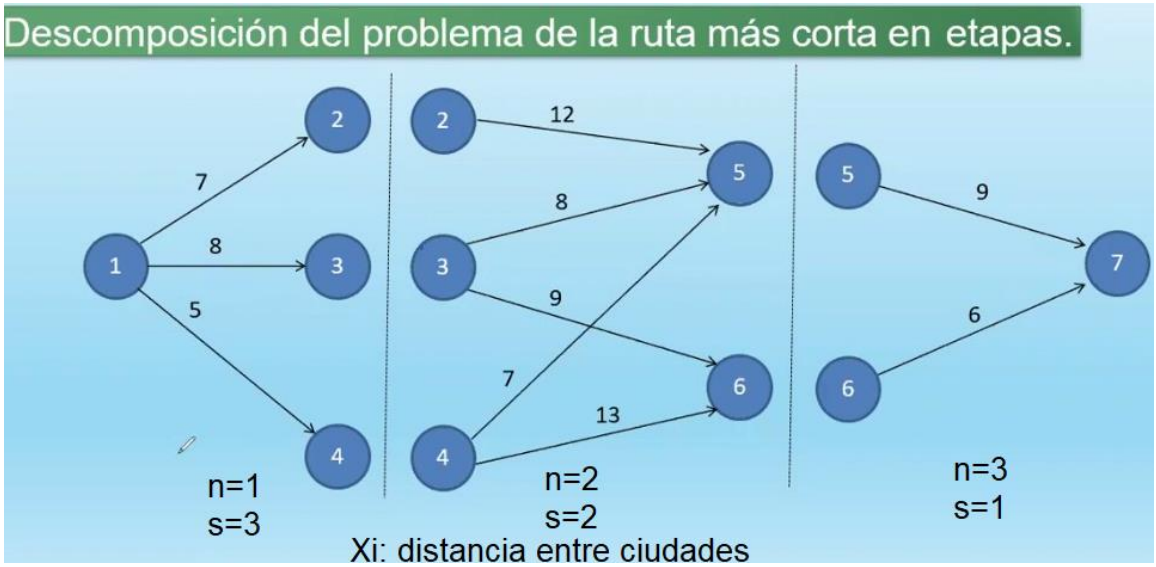
1. **Identificar etapas, estados y variable de decisión.**
2. **Describir las funciones o ecuaciones de recurrencia.**
3. **Resolver (análisis etapa a etapa; decisión combinando las soluciones de cada etapa.**

2.5. PROGRAMACIÓN DINÁMICA DETERMINÍSTICA.

EJEMPLO 1



1. **Identificar etapas, estados y variable de decisión.**



2. Describir las funciones o ecuaciones de recurrencia

La ecuación recursiva en reversa para el ejemplo es:

$$f_i(x_i) = \min_{\substack{\text{todas las rutas} \\ \text{viables } (x_i, x_{i+1})}} \left\{ d(x_i, x_{i+1}) + f_{i+1}^*(x_{i+1}) \right\}, \qquad i = 1, 2, 3$$

donde:

$f_4(x_4) = 0$ para $x_4 = 7$. El orden asociado de cálculo es

$$f_3 \rightarrow f_2 \rightarrow f_1$$

3. Resolver (análisis de cada etapa).

Etapa 3: (n=3)

$S\backslash X_4$	$X_4 = 7$	F_3^* (costo óptimo)	x^* (decisión óptima)
5	9	9	7
6	6	6	7

Etapa 2: n=2

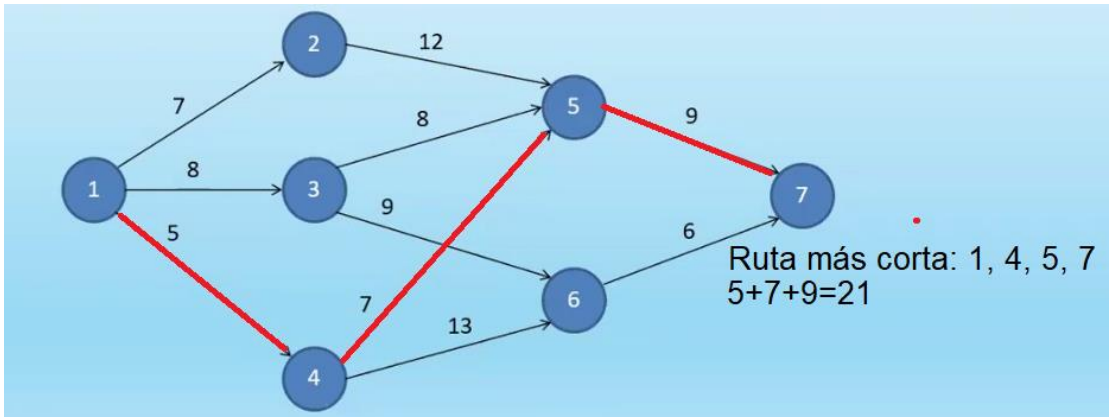
$S\backslash X_3$	$X_3 = 5$	$X_3 = 6$	F_2^* (costo óptimo)	x^* (decisión óptima)
2	12 + 9 = **21**	–	21	5
3	8 + 9 =17	9 + 6 =**15**	15	6
4	7 + 9 =**16**	13 + 6 = 19	16	5

Etapa 1: (n=1)

$S\backslash X_2$	$X_2 = 2$	$X_2 = 3$	$X_2 = 4$	F_2^* (costo óptimo)	x^* (decisión óptima)
1	7 + 21 =28	8 + 15 =23	5 + 16 =**21**	21	4

La ruta óptima es: $1 \xrightarrow{5} 4 \xrightarrow{7} 5 \xrightarrow{9} 7$

Decisión:



2.6. PROGRAMACIÓN DINÁMICA PROBABILÍSTICA (PDP).

En la Programación Dinámica Probabilística hay incertidumbre sobre los resultados obtenidos en cada etapa, ya que existe una distribución de probabilidad para determinar cuál será el siguiente estado.

EJEMPLO 2 PDP(Asignación)

Un proyecto de investigación sobre cierto problema de ingeniería tiene 3 equipos de investigadores que tratan de resolver el problema desde 3 puntos de vistas diferentes. Se estima que en las circunstancias actuales la probabilidad de que los equipos A, B, C, fracasen es de 0.40, 0.60, 0.80 respectivamente. Así la probabilidad de que los tres fracasen es de (0.40)(0.60)(0.80) = 0.192 (19.2%). El objetivo es minimizar la probabilidad de fracaso de los 3 equipos y por ello se asignan al proyecto 2 nuevos científicos de alto nivel.

Según la asignación a los equipos la probabilidad de fracaso cambia según lo indica la siguiente tabla.

Según la asignación a los equipos la probabilidad de fracaso cambia según lo indica la siguiente tabla

Número de Brigadas	Objetos de obras		
	A	B	C
0	0.4	0.6	0.8
1	0.2	0.4	0.5
2	0.15	0.2	0.3

Solución

Datos:

Etapas: N= 3 (n=1 Equipo A) ; (n=2 Equipo B) ; (n=3 Equipo C)

Estados: Número de científicos pendientes por asignar en la etapa n.

Variable de decisión (Xn) : número de científicos a asignar en la etapa n

Función recursiva: Minimizar probabilidad de fracaso

$$f_n^*(S) = \min.(f_n(S, X_n))$$

$$f_n^*(S) = \min.(D_{i,\,xn} + f^*_{n-1}(S - X_n))$$

donde

$P_{i,\,xn}$: probabilidad de fracaso i en la etapa n cuando se le asignan Xn brigadas

Xn : 0, 1, 2,

etapa n=3	Posibles soluciones equipo C			Solución optima	
X_3	$F_3(S,X_3) = P_3,X_3$			Valor $f_3^*(S_3)$	Solución X_3^*
S	0	1	2		
0	0.8			0.8	0
1		0.5		0.5	1
2			0.3	0.3	2

cientificos sin asignar

Científicos sin asignar

etapa n=2	Posibles soluciones equipo B			Solución optima	
X_2	$f_2(S,X_2) = P_2,X_2 * F^*_3(S-X_3)$			$F_2^*(S_2)$	X_2^*
S	0	1	2		
0	B0+C0 0.6*0.8= 0.48			0.48	0
1	B0+C1 0.6*0.5= 0.30	B1+C0 0.4*0.8= 0.32		0.3	0
2	B0+C2 0.6*0.3= 0.18	B1+C1 0.4*0.5= 0.20	B2+C0 0.2*0.8= 0.16	0.16	2

brigadas sin asignar

etapa n= 1	Posibles soluciones equipo A			Solución optima	
X3	$F_1(S,X_1) = P_1,X_1 * F^*_2(S.X_2)$			$F_1^*(S_1)$	X_1^*
S	0	1	2		
2	A0+B2+C0 0.4*0.16= 0.064	A1+B0+C1 0.2*0.3= 0.06	A2+B0+C0 0.15*0.48= 0.072	0.06	1

Respuesta:

La solución óptima en la primera etapa es integrar un científico al equipo A, quedando otro para integrarlo a uno de los dos equipos restantes; en la segunda etapa lo óptimo es no integra científico al equipo B y en la última etapa se integra el científico al equipo C (A=1; C=1)

CONCLUSIONES:

La programación dinámica es una técnica, que tiene como finalidad **resolver un problema grande y único en una secuencia de problemas más pequeños (ETAPAS)**, sin importar el número de ellas.

La Programación Dinámica tiene dos campos: Programación Dinámica Determinística: En estos problemas no existe incertidumbre a la hora de calcular las soluciones óptimas, etapa a etapa y **Programación Dinámica Probabilística o Estocástica:** en estos problemas habrá cierta incertidumbre sobre los resultados obtenidos en cada etapa.

Tiene como conceptos básicos: las etapas (n), los estados (s), las variables de decisión (x) y la ecuación recursiva.

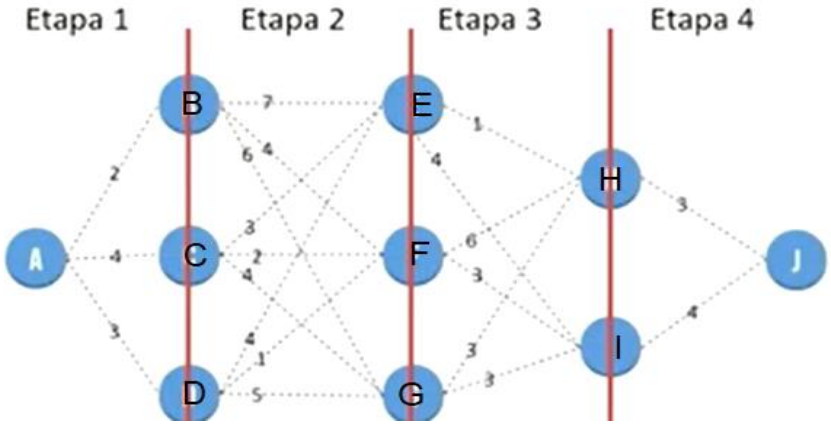
Para solucionar un problema de programación dinámica requiere tener en cuenta tres pasos claves como son: **Identificar etapas, estados y variable de decisión;**

describir las funciones o ecuaciones de recurrencia; resolver el problema (análisis etapa a etapa y decisión combinando las soluciones de las etapas).

ESTUDIO INDIVIDUAL.

EJERCICIO 1

Aplicaremos la solución tabular y para ello es necesario reconocer, en primera instancia, las etapas en las que se dividen el problema



Activa
Ve a Cor

EJERCICIO 2

En la provincia de Artemisa hay 3 obras de construcción (A, B, C) que se desean terminar lo más rápido posible. La empresa constructora encargada de las obras dispone de 4 brigadas especializadas y quiere determinar la forma óptima de asignarlas a cada obra.

Los datos estimados de los días que dura cada obra de acuerdo al número de brigadas que se asignen se muestra en la siguiente tabla.

Número de Brigadas	Objetos de obras		
	A	B	C
0	260	230	270
1	220	200	235
2	190	180	200
3	150	170	180
4	120	150	150

Determine como deben asignarse las brigadas a las obras para minimizar los días de ejecución de los tres objetos de obras

CARRERA INGENIERÍA INDUSTRIAL

ASIGNATURA: INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES II

Tema 3. Sistemas de Servicios.
3.1. Introducción.
3.2. Conceptos básicos de los sistemas de servicios.
3.3. Modelo de una fila y un servidor con tasa de llegada según distribución de Poisson y tasa de servicio según distribución exponencial.
3.3.1. Tamaño óptimo de la brigada.
3.4. Modelo de un servidor con tasa de servicio constante.
3.4.1. Comparación entre los sistemas con tasa de servicio exponencial t tasa de servicio constante
3.5 Modelo con múltiples servidores

Objetivos: Que el alumno se capaz de:

- **Resolver problemas de los diferentes modelos de sistemas de servicios aplicando las ecuaciones matemáticas e interpretando sus resultados.**

Método: Elaboración conjunta.

Medios: Tiza y pizarra, Libro de texto, MDD, Pc.

Tipo de clase: Clase Encuentro

Bibliografía: introducción a la Investigación de Operaciones.

Materiales Didácticos Digitales entregados por el profesor.

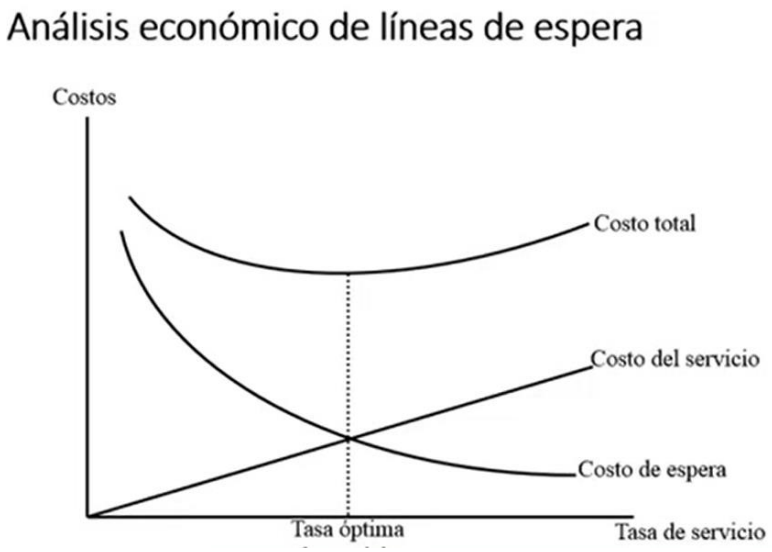
DESARROLLO

3.1. INTRODUCCIÓN.

Los sistemas de servicios tambien conocidos como sistemas de linea de espera (colas), son sistemas aleatorios o probabilisticos, su analisis se fundamente en la Teoria de las colas, en la que agrupa una coleccion de modelos matemáticos que describen el comportamiento de la linea de espera.

Todos indendientes del sistema economico social nos hemos encontrado en algun momento a una cola, y es conocida que normalmente genera una experiencia que se puede considerar desagradable, al punto que muchas personas desisten de entra a la fila o se retiran de ella por el costo de espera que la fila entraña, lo que trae consigo que los encargados de ofertar el servicio ven una perdida de oprtunidad de incrementar sus ganacias.

Esta es una razon por la que los administradores de los sistemas de servicio se empeñan en reducir estas perdidas, equilibrando el costo de espera con el costo que implica el servicio que ofrecen.



3.2. Conceptos básicos de los sistemas de servicios.

Costo de espera

Esperar es estar inútil. Es desperdicio. Significa que algún recurso está inactivo cuando podría usarse en forma más productiva (o agradable) en otra parte. De hecho, representa un costo de *oportunidad.* Cuando los camiones están esperando inútiles en una línea de un muelle de carga y descarga, se pierde su productividad; es dinero "que se va por el caño" y que no puede recuperarse.

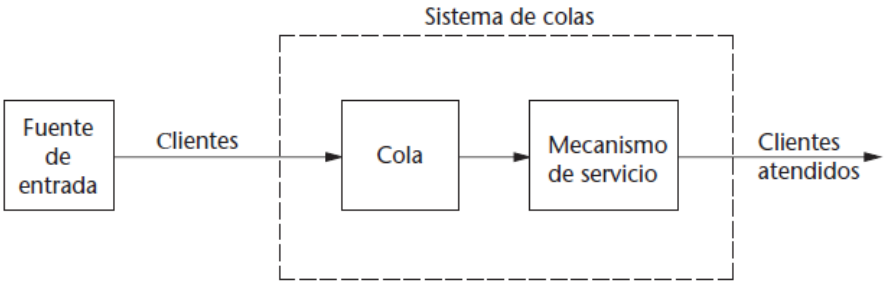
Costo de espera = $C_W * L$

en donde:
Cw = costo de espera en dólares por llegada por unidad de tiempo y
L = longitud promedio de la línea.
Si, por ejemplo, el costo de un camión que espera en la línea es de $20 por hora (incluso el operador) y en promedio hay cuatro camiones esperando, entonces el costo de espera total es $80 por hora.

Costo de servicio

Determinar el costo de servicio es más sencillo, en concepto, que determinar el costo de espera. En la mayoría de las aplicaciones se tratará de comparar varias instalaciones de servicio: dos cajeras en un banco contra tres; una brigada de cuatro contra una de cinco; una caja en una tienda contra dos. En estos casos, sólo se necesitan los costos comparativos o diferenciales. Por ejemplo, si se quiere saber cuántas cajas de autobanco deben tener personal, sólo se necesitan los costos de personal. Por otra parte, si la pregunta es cuántas de estas cajas se deben construir, entonces se necesitan los costos de construcción y los de operación de cada ventanilla. Casi siempre los datos necesarios son evidentes para una situación dada.

Un sistema de servicio puede dividirse en sus dos componentes de mayor importancia: la cola o línea de espera y la instalación de servicio como se muestra en la figura siguiente



Entre sus conceptos básicos esta:

Tamaño de la población de donde se alimentará el sistema que puede ser finita (ejemplo el mantenimiento que se dará a 25 computadoras de un laboratorio) o infinita, (los autos que llegan a un puesto de peaje). Se asumirá en este tema, para el modelaje, que esta población será infinita

Proceso de llegada, las formas en que van llegando los clientes para recibir el servicio, puede ser determinísticas (se conocen con exactitud la cantidad de clientes por unidad tiempo que van a llegar, por ejemplo en las fábricas de ensamblaje se conoce el tiempo en pasar un vehículo de un punto de ensamblaje a otro punto). Otra forma de llegada es probabilística (no se conoce el tiempo que trascurre en la llegada de un cliente a otro a un restaurante, son eventos independientes entre si), en este tema se asumirán que los modelos siguen una distribución de probabilidades de Poisson.

La tasa de llegada o velocidad de llegada (λ): son la cantidad de llegada promedio por unidad de tiempo.

Longitud de la cola, numero máximo permisible de clientes que puede admitir. Las colas pueden ser *finitas* o *infinitas*, según si dicho numero es finito o infinito. El supuesto de una *cola infinita* es el estándar de la mayoría de los modelos.

Disciplina de la cola se refiere al orden en el que sus miembros se seleccionan para recibir el servicio, por ejemplo, puede ser:

- primero en entrar, primero en salir;
- primero en llegar último en salir;
- de acuerdo con algún procedimiento de prioridad;
- aleatoria; o con algún otro orden.

En los modelos de colas se supone como normal a la disciplina de primero en entrar, primero en salir, a menos que se establezca de otra manera

Comportamiento de llegada, los modelos suponen que los clientes son infinitamente pacientes, no hay rechazo a la fila y no renuncian o no se retiran de la cola.

El proceso de servicio consiste en una o mas *estaciones de servicio*, cada una de ellas con uno o mas *canales de servicio paralelos*, llamados **servidores**. Si existe mas de una estación de servicio, el cliente puede recibirlo de una secuencia de ellas (*canales de servicio en serie*). En una estación dada, el cliente entra en uno de estos canales y el servidor le presta el servicio completo. Los modelos de colas deben especificar el arreglo de las estaciones y el numero de servidores (canales paralelos)

en cada una de ellas. Los modelos más elementales suponen una estación, ya sea con un servidor o con un numero finito de servidores.

Tiempo de servicio) (o *duración del servicio*) es el tiempo que transcurre desde el inicio del servicio para un cliente hasta su terminación en una estación. El tiempo de servicio puede ser determinístico (por ejemplo un grupo de clientes entran a una tanda de cine y se conoce el tiempo que esta durará el servicio de entretenimiento).
También puede ser probabilístico, la distribución del tiempo de servicio que más se usa en la práctica (por ser más manejable que cualquier otra) es la distribución *exponencial* todos los modelos de este capítulo serán de este tipo.
La tasa de servicio o velocidad de servicio (μ) es la cantidad de clientes que se atienden en la unidad de tiempo

El modelo supone que la tasa de servicio será siempre superior a la tasa de llegada

$$\mu > \lambda$$

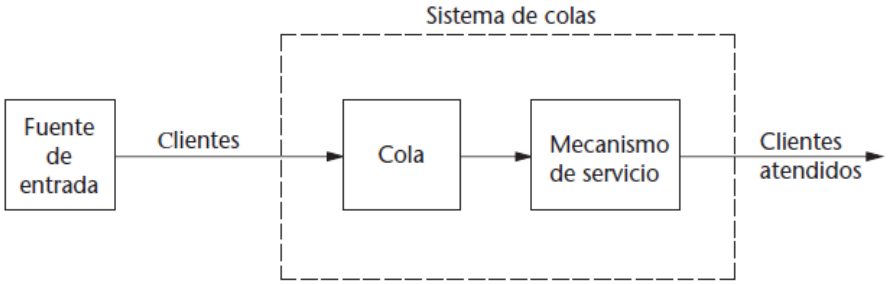
Número de servidores son la cantidad de servidores que pueden atender a los clientes y no tienen límites.

La Configuración es el número de fases de servicio, por ejemplo una sola fase o varias fases

Ejemplo los pacientes llegan al hospital son atendidos por el médico y pasan a la fila de la farmacia para adquirir el medicamento.



3.3. Modelo de una fila y un servidor con tasa de llegada según distribución de Poisson y tasa de servicio según distribución exponencial.



Número promedio de unidades en la línea de espera

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

Tiempo promedio que la unidad pasa en la línea de espera

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

Número promedio de unidades en el sistema

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

Tiempo promedio que una unidad pasa en el sistema

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Probabilidad de que una unidad que llega no tenga que esperar a ser atendida

$$P_w = \frac{\lambda}{\mu}$$

Probabilidad de que no haya unidades en el sistema

$$P_o = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

Probabilidad de que haya n unidades en el sistema

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_o$$

Ejemplo 1. Un supermercado

Imagínese un supermercado grande con muchas cajas de salida. Supóngase que los clientes llegan para que les marquen su cuenta con una tasa de 90 por hora y que hay 10 cajas en operación. (Nótese que una familia junta de compras se trata como un cliente.) Si hay poco intercambio entre las líneas, puede tratarse este problema como 10 sistemas separados de una sola línea, cada uno con una llegada de 9 clientes por hora. Para una tasa de servicio de 12 por hora:

Datos: λ = 9 clientes por hora
μ = 12 clientes por hora

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{(9)^2}{12\,(12 - 9)} = 2.25 \text{ clientes}$$

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{9}{12(12 - 9)} = 0.25 \text{ horas o } 15 \text{ minutos}$$

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{9}{12 - 9} = 3 \text{ clientes}$$

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{12 - 9} = 0.33 \text{ horas o } 20 \text{ minutos}$$

$$U = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{9}{12} = 0.75 \text{ o } 75\%$$

$$P(L_s > 3) = \left(\frac{A}{\mu}\right)^{n+1} = \left(\frac{9}{12}\right)^{3+1} = 0.32$$

Entonces, para este ejemplo, el cliente promedio espera 15 minutos antes de ser servido (algunos esperan más, otros menos). En promedio, hay un poco más de dos clientes en la línea o tres en el sistema. El proceso completo lleva un promedio de 20 minutos. La caja está ocupada el 75% del tiempo (así, estará desocupada o inútil el 25% del tiempo). Y finalmente, el 32% del tiempo habrá cuatro personas o más en el sistema (o tres o más esperando en la cola)

3.3.1. Tamaño óptimo de la brigada.

Ejemplo 2. Se está estudiando un muelle de carga y descarga de camiones para aprender cómo debe formarse una brigada. El muelle tiene espacio sólo para un camión, así es un sistema de un servidor. Pero el tiempo de carga o descarga puede reducirse aumentando el tamaño de la brigada.
Supóngase que puede aplicarse el modelo de un servidor y una cola (llegadas Poisson, tiempos de servicio exponenciales) y que la tasa promedio de servicio es un camión por hora para un cargador. Los cargadores adicionales aumentan la tasa de servicio proporcionalmente. Además, supóngase que los camiones llegan con un tasa de dos por hora en promedio y que el costo de espera es de $20 por hora por camión. Si se le paga $5 por hora a cada miembro de la brigada, ¿cuál debe ser el mejor tamaño de esta?

[2] **Usando cálculo, es fácil demostrar que la tasa de servicio óptima está dada por:**

$$S = A + \frac{AC_w}{C_s}$$

en donde C_w = costo unitario de espera y C_s = costo unitario de servicio.

λ = A = 2 camiones por hora
μ = S = 1 camión por persona por hora
Cw = costo de espera = $20 por hora por camión
Cs = costo de servicio = $5 por hora por persona
Ahora sea *k* = número de personas en la brigada. Se busca *k* tal que la suma de los costos de espera y servicio se minimicen: Costo total = *CWLs + kCs.*
Para esto se emplea el proceder de ensayo error o sea tanteando hasta encontra el punto de valor mínimo*.*

Nótese que se usa la longitud de la línea del *sistema,* porque el camión está inútil tanto si espera como si está siendo servido.
Las pruebas se deben iniciar con tres miembros en la brigada, ya que uno o dos no podrían compensar la tasa de llegadas de dos camiones por hora. Para una brigada de tres, la tasa de servicio es de tres camiones por hora y puede encontrarse L, con la ecuación

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \qquad \frac{2}{3 - 2} = 2.0 \text{ camiones}$$

$$\text{Costo total (3)} = C_w L_s + kC_s$$
$$= (20)\ (2.0) + (3)\ (5)$$
$$= \$55$$

De igual manera para una brigada de 4

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \qquad \frac{2}{4 - 2} = 1.0 \text{ camiones}$$

$$\text{Costo total (4)} = C_w L_s + kC_s$$
$$= (20)(1.0) + (4)(5)$$
$$= \$40$$

El costo total continua disminuyendo por tanto probaremos con 5 hombres

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \qquad \frac{2}{5\text{-}2} = 0.67 \text{ camiones}$$

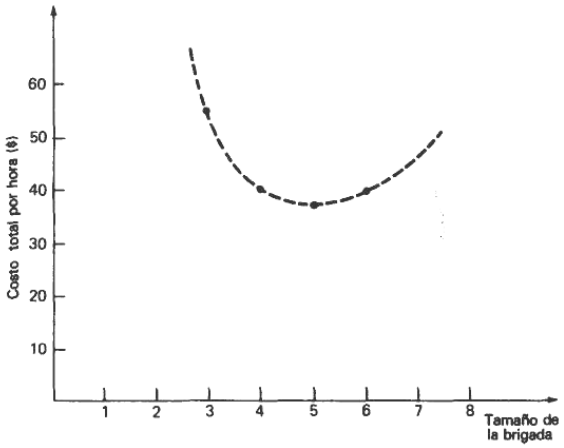
$$\text{Costo total (5)} = C_w L_s + kC_s$$
$$= (20)(0.67) + (5)(5)$$
$$= \$38.33$$

El costo total continúa disminuyendo se prueba con 6 hombres

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \qquad \frac{2}{6 - 2} = 0.5 \text{ camiones}$$

$$\text{Costo total (6)} = C_w L_s + kC_s$$
$$= (20)(0.5) + (6)(5)$$
$$= \$40$$

Como este costo es mayor que el de la brigada de cinco, se rebasó el límite inferior de la curva de costo; el tamaño óptimo de la brigada es cinco personas. Los resultados se muestran en la figura



Ejemplo 3. Restaurante de comida rápida

Considérese un restaurante de comida rápida con un menú limitado. El restaurante se está diseñando para que todos los clientes se unan a una sola línea para ser servidos. (Igual que en el supermercado, una *orden* es una llegada sin importar cuántas personas comparten esa orden.) Una persona tomará la orden y la servirá. Con sus limitaciones, la tasa de servicio puede aumentarse agregando más personal para preparar la comida y servir las órdenes.

Esto constituye un sistema de un servidor y una línea. Si las llegadas y las salidas son aleatorias, puede aplicarse el modelo de una cola. Supóngase que la administración quiere que el cliente promedio no espere más de dos minutos antes que se tome su orden. Esto se expresa como: Wq = 2 minutos

Supóngase también que la tasa máxima de llegadas es 30 órdenes por hora.

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$ despejando se obtiene $$\mu = \frac{\lambda}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda}{W_q}}$$

Para este ejemplo, se supuso:

λ = 30 órdenes por hora b

Wq = 2 minutos o 0.033 horas

$$S = \frac{30}{2} + \sqrt{\frac{(30)^2}{4} + \frac{30}{0.033}}$$
$$= 15 + 33.5 = 48.5 \text{ órdenes por hora}$$

Para cumplir los requerimientos, se necesita una tasa de servicio de casi 50 órdenes por hora. Si, por ejemplo, una brigada de cinco puede manejar 45 órdenes por hora y una de seis puede procesar 50 por hora, entonces sería necesario tener la brigada de seis.

3.4. Modelo de un servidor con tasa de servicio constante.

Este modelo es el mismo, excepto que se supone que el tiempo de servicio es exactamente el mismo para cada llegada en lugar de ser aleatorio.
Todavía se tiene una sola línea, tamaño de la cola infinito, disciplina de la cola como primero en llegar primero en ser servido y llegadas Poisson.
Las aplicaciones típicas de este modelo pueden incluir un autolavado automático, una estación de trabajo en una pequeña fábrica o una estación de diagnóstico de mantenimiento preventivo. En general, el servicio lo proporciona una máquina.
Las características de operación están dadas por:

Número promedio de unidades en la línea de espera

$$L_q = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu-\lambda)}$$

El resto de las expresiones son las mismas a partir de esta $\mathbf{L_q}$ calculada

Ejemplo 4. Lavado automático de autos
Imagínese un lavado automático de autos con una línea de remolque, de manera que los autos se mueven a través de la instalación de lavado como en una línea de ensamble. Una instalación de este tipo tiene dos tiempos de servicio diferentes:
el tiempo entre autos y el tiempo para completar un auto. Desde el punto de vista de teoría de colas, el tiempo entre autos establece el tiempo de servicio del sistema. Un auto cada cinco minutos da una tasa de 12 autos por hora. Sin embargo, el tiempo para procesar un auto es el tiempo que se debe esperar para entregar un auto limpio. La teoría de colas no considera este tiempo.
Supóngase que el lavado de autos puede aceptar un auto cada cinco minutos y que la tasa promedio de llegadas es de nueve autos por hora (con distribución Poisson).
Sustituyendo en las ecuaciones:
λ = 9 autos por hora
5 minutos o μ = 12 autos por hora lad de tiempo)

$$L_q = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu-\lambda)} = \frac{(9)^2}{2(12)(12-9)} = 1.125 \text{ autos}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

1.125 / 9 = 0.125 horas igual a 7.5 min (0.125 h * 60min/h)

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

1.125 + 9/12 = 1.875 autos

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

0.125 h + 1/9 =

3.4.1. Comparación entre los sistemas con tasa de servicio exponencial t tasa de servicio constante.

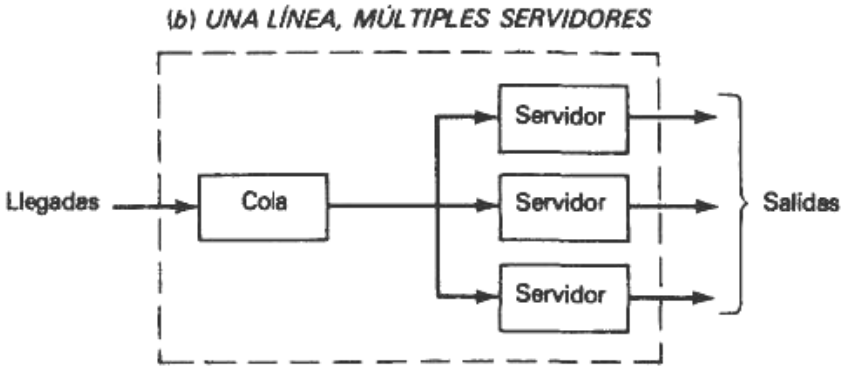
Comparación entre el modelo con tiempo de servicio exponencial y el tiempo de servicio constante.

	Tiempos de servicio exponenciales	*Tiempos de servicio constantes*
Cola		
Longitud promedio de la línea	2.25	1.125
Tiempo promedio de espera	15 min	7.5 min
Sistema		
Longitud promedio de la línea	3	1.875
Tiempo promedio de espera	20 min	12.5 min
Utilización	75%	75%

Nótese que el sistema de tiempos de servicio constantes tiene sólo la mitad de la longitud de cola y del tiempo de espera de lo que tiene el sistema de tiempos de servicio variables. La longitud de la línea y el tiempo de espera para todo el sistema también son menores; sólo la utilización es la misma para ambos.
¿Por qué un sistema con tiempos de servicio constantes da mucho mejores resultados que el de tiempos de servicio variables? Porque se ha eliminado parte de la aleatoriedad del sistema y con ella la posibilidad de tiempos de servicio muy largos.

3.5 Modelo con múltiples servidores

En muchas situaciones reales habrá más de un servidor disponible para atender las llegadas. Esto es típico de los supermercados y los bancos.
Existe una solución general para un sistema de múltiples servidores que tiene una sola línea. Esta situación se muestra en la figura



N = número de servidores
A = tasa promedio de llegadas (llegadas por unidad de tiempo) (λ)
S = tasa promedio de servicio por cada servidor (llegadas por unidad de tiempo) (μ)

entonces

$$L_q = \frac{(A/S)^{N+1} P_o}{(N-1)!\left(N - \frac{A}{S}\right)^2}$$

$$W_q = \frac{L_q}{A}$$

$$L_s = L_q + \frac{A}{S}$$

$$W_s = \frac{L_s}{A}$$

$$U = \frac{A}{NS}$$

$$P_o = \frac{1}{\frac{1}{N!}\left(\frac{A}{S}\right)^N \left(\frac{NS}{NS - A}\right) + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{i!}\left(\frac{A}{S}\right)^i}$$

CONCLUSIONES

- En el tema se estudiaron tres modelos con tamaño de la fila infinita: llegadas probabilísticas según la distribución de Poisson: con tiempo de servicio probabilístico según la distribución exponencial; el supuesto de primero en llegar, primero en salir.
- Los modelos estudiados son:
  - Una fila y un servidos con llegas según Poisson y tiempo de servicio según la distribución exponencial.
  - Una fila y un servidos con llegas según Poisson y tiempo de servicio constante.
  - Una fila y varios servidos con llegas según Poisson y tiempo de servicio según la distribución exponencial.
- Los sistema con tiempos de servicio constantes da mucho mejores resultados que el d

Modelo 1 servidor y llegada probabilística

Probabilidad de que no haya unidades en el sistema

$$P_o = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

Número promedio de unidades en la línea de espera

Para tasa de servicio exponencial

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

Para tasa de servicio constante

$$L_q = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu-\lambda)}$$

Número promedio de unidades en el sistema

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

Tiempo promedio que la unidad pasa en la línea de espera

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

Tiempo promedio que una unidad pasa en el sistema

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Probabilidad de que una unidad que llega no tenga que esperar a ser atendida

$$P_w = \frac{\lambda}{\mu}$$

Probabilidad de que haya n unidades en el sistema

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_o$$

Modelo múltiples servidores y llegada probabilística

N = número de servidores

A = tasa promedio de llegadas (llegadas por unidad de tiempo) (λ)

S = tasa promedio de servicio por cada servidor (llegadas por unidad de tiempo) (μ)

entonces

$$L_q = \frac{(A/S)^{N+1} P_o}{(N-1)!\left(N - \frac{A}{S}\right)^2}$$

$$W_q = \frac{L_q}{A}$$

$$L_s = L_q + \frac{A}{S}$$

$$W_s = \frac{L_s}{A}$$

$$U = \frac{A}{NS}$$

$$P_o = \frac{1}{\frac{1}{N!}\left(\frac{A}{S}\right)^N\left(\frac{NS}{NS - A}\right) + \sum_{i=0}^{N-1}\frac{1}{i!}\left(\frac{A}{S}\right)^i}$$

Activar Windows

e tiempos de servicio variables, porque se ha eliminado parte de la aleatoriedad del sistema y con ella la posibilidad de tiempos de servicio muy largos.

ESTUDIO INDEPENDIENTE

En una oficina la tasa media de llegada de clientes es de 3 cada 30 minutos, además se sabe que atiende 2 personas cada 15 minutos.

Determine Ls, Ws, Lq, Wq

CARRERA INGENIERÍA INDUSTRIAL

ASIGNATURA: INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES II

Tema 4. Simulación.
4.1. Introducción.
4.2. Procedimiento de simulación.
4.3. El modelo Monte Carlos.
4.3.1. Aplicaciones más frecuentes de simulación con el método Montecarlo
4.3.2 Procedimiento del modelo Monte Carlo. Variables aleatorias. Generar números aleatorios. Valores de variables aleatorias.
4.4. Ejemplo de simulación

Objetivos: Que el alumno se capaz de:
- **Diseñar y ejecutar usando un lenguaje de Simulación un modelo que dé respuesta a un problema de toma de decisiones en el área de la ingeniería industrial**.

Método: Elaboración conjunta.
Medios: Tiza y pizarra, Libro de texto, MDD, Pc.
Tipo de clase: Clase Encuentro
Bibliografía: Métodos cuantitativos para la toma de decisión en Administración.
Materiales Didácticos Digitales entregados por el profesor.
DESARROLLO

4.1. INTRODUCCIÓN.

La experimentación no es ni nueva ni rara en el ámbito industrial ni de los negocios. Puede pensarse en la experimentación como en un método organizado de prueba y error que usa un modelo del mundo real para obtener información. La presentación de un nuevo automóvil o avión lleva de antemano la construcción de un modelo a escala de los nuevo equipos, las pruebas de mercado de un nuevo producto, el que un departamento ensaye nuevos procedimientos contables o el hacer una pequeña inversión en un tipo nuevo de valores, son formas de experimentación.
En este escenario la ***simulación*** es una técnica de experimentación en que se usan modelos lógico-matemáticos, que ahorran tiempo, recursos materiales y financieros. Una simulación puede ser determinista o probabilista según el comportamiento de las variables incluidas. Las simulaciones deterministas son bastante comunes en la planeación corporativa, por ejemplo, una firma puede usar simulación para pronosticar las ganancias sobre un alcance de ventas estimadas.
Sin embargo, se hará hincapié en la simulación probabilista para comprobar cómo se tratan las variables aleatorias. La repetición es común en simulación. La razón es que los resultados de un experimento de simulación están sujetos a las probabilidades si el modelo incluye variables aleatorias.
El riesgo más importante al experimentar se refiere a resultados del experimento; éstos pueden diferir de los resultados de la puesta en práctica. El modelo que se usa debe ser una representación *válida* del mundo real. Esto es, debe incluir todas las variables significativas y sus relaciones en forma correcta. Si el modelo no es válido, existen muy pocas posibilidades
de que conduzca a resultados seguros.
Cada corrida de prueba es sólo una muestra y los resultados de muchas iteraciones son estadísticos, y no leyes inmutables o soluciones óptimas. Al repetir el experimento

muchas veces, es posible aumentar la confianza en los resultados, pero de todas maneras se deberán interpretar en forma estadística.
En este capítulo se presenta un procedimiento de simulación ampliamente aceptado que se basa en el método científico. También se analizan algunas técnicas específicas, como la de Monte Carlo, que se emplean con frecuencia en simulación. El desarrollo de la computación deviene en un aporte significativo a la técnica de simulación en todas las áreas de la ciencia.

4.2. PROCEDIMIENTO DE SIMULACIÓN

No hay principios ni teoremas de simulación. Pero, por fortuna, existen aspectos de la simulación que pueden estudiarse con grandes beneficios.
Las simulaciones se llevan a cabo con una secuencia de cinco pasos. Los pasos sirven como una guía de lo que debe incluirse para realizar con éxito un experimento.

Paso 1: definición de los objetivos

Es importante que esté bien definido el objetivo de la simulación para qué guie todo el proceso, las variables del experimento pueden estar determinadas por el objetivo.
Ejemplo, una compañía puede experimentar el aumento en los costos de inventario, en cuyo caso construye un modelo de simulación de su sistema de inventario para estudiar las causas del aumento; o puede experimentar para probar el impacto de la inversión con el capital propuesto. En el primero se puede obviar la variable del flujo de caja pero en el segundo es necesario esa variable.

Paso 2: formulación del modelo

Es desglosar en términos lógicos-matemáticos precisos las componentes necesarias y sus relaciones, sin incluir detalles innecesarios, el propósito es formular un modelo válido y seguro con el mínimo de complejidades.

Paso 3: diseño del experimento

Se ahorra mucho tiempo y esfuerzo, si se trabaja en los procedimientos experimentales antes de correr el modelo. ¿Qué variable aleatoria se trabaja? ¿Qué medidas se tienen que tomar? ¿Qué incrementos de tiempo se usarán? ¿Cuál será la duración total? ¿Cómo se analizarán los resultados? Deben tomarse en cuenta las respuestas a estas y otras preguntas al desarrollar un plan para el experimento. Se puede conformar un Diagrama de Flujo

Paso 4: realización del experimento

Se ejecuta la simulación Monte Carlo, esto es de hecho correr el modelo. Aquí se debe marcar el tiempo apropiado, hacer las observaciones necesarias y registrar los datos para el análisis, en el próximo epígrafe se estudiará detenidamente este modelo que integra varios procederes

Paso 5: evaluación de los resultados

Constituye el paso final en que se llega a las conclusiones que facilitan el proceso de toma de decisión. Casi siempre la simulación da resultados estadísticos: promedios y distribuciones de probabilidad.
En la práctica, estos cinco pasos se traslapan considerablemente. Muchas veces los objetivos se establecen tomando en cuenta las capacidades del modelo. Los modelos se diseñan para ayudar a la experimentación. Los experimentos se diseñan para obtener los resultados deseados. Y los resultados se analizan para aclarar los

objetivos. El orden de los pasos es menos significativo que el que se ejecuten por completo

4.3. EL MODELO DE MONTE CARLO.

El método de Monte Carlo es una técnica de simulación estadística casi centenaria. Se originó en la década de los años 40, en plena Segunda Guerra Mundial y más concretamente aún, en pleno desarrollo de la bomba atómica. Este método de simulación aleatorio surge de la mano de los matemáticos, John von Neumann y Stanislaw Ulam, ante un gran desafío en el Laboratorio de los Álamos. Por aquel entonces, los físicos, químicos y matemáticos necesitaban simular el comportamiento de las partículas subatómicas, un problema muy complicado de abordar con sistemas deterministas tradicionales. Y así, en el Proyecto Manhattan surge este sistema de aleatoriedad en su búsqueda incesante para resolver problemas complejos de física nuclear, relacionados con el diseño y la construcción de la bomba atómica.

¿Y de dónde viene el nombre Montecarlo? El origen es un tanto curioso y para ello es importante entender el contexto. Tras largas horas de estudio de la teoría de los datos, John y Stanislaw se tomaron un momento de descanso y se pusieron a jugar a una partida del solitario. Observaron que este juego requería de hacer pruebas con múltiples cartas para poder estimar diferentes resultados en la partida. En ese momento vieron que se podía aplicar este análisis al estudio de la energía nuclear. Y así es cómo surge esta metodología, con el fin de predecir posibles resultados de un acontecimiento o situación. Como, por ejemplo, desde en qué parte del mundo va a caer un rayo en aquella época; hasta la preocupación actual de una empresa, como es una proyección de ventas.

Aunque parezca mentira, este método acuña el nombre del famoso casino de Montecarlo, Mónaco, haciendo un guiño a su naturaleza aleatoria, similar a los juegos de azar, en el cual se basa su simulación (y la pasión de uno de los fundadores: el juego de cartas el Solitario). Al emplear distribuciones de probabilidad lo convierte en una herramienta esencial para las empresas que buscan tomar decisiones informadas basadas en el análisis estadístico, la precisión predictiva y la evaluación de riesgos.

El modelo Monte Carlo es un método general, que puede usarse para vincular un número aleatorio con cualquier distribución de probabilidad, es de destacar que en mucha bibliografía se emplea como sinónimo de simulación.
Cuando se emplea el modelo Monte Carlo es importante revisar los valores generados para comprobar si son representativos de lo que se esperaba.
La distribución de los valores debe corresponder de cerca a la distribución dada para la variable. Si no es así, se deben rechazar estos valores y desarrollar un nuevo conjunto.

4.3.1. Aplicaciones más frecuentes de simulación con el método Montecarlo

El método Montecarlo se utiliza en múltiples campos debido a su flexibilidad y potencia. En la actualidad, los métodos de Monte Carlo se utilizan en la Inteligencia Artificial (IA), Machine Learning y Deep Learning, para mejorar la optimización de algoritmos y evaluar su desempeño.

Si te estás preguntando en qué áreas de tu negocio te puede ayudar el análisis de simulación de Montecarlo, te puede ayudar con los siguientes desafíos:

- Presupuestos de un proyecto
- Proyección de ventas
- Estimación de costos
- Finanzas, proyecciones de VAN
- Lanzamientos de nuevos productos.
- Toma de decisión

4.3.2 PROCEDIMIENTO DEL MODELO MONTE CARLO. VARIABLES ALEATORIAS. GENERAR NUMEROS ALEATORIOS. VALORES DE VARIABLES ALEATORIAS

Por lo general el modelo Monte Carlo se realiza con el siguiente proceder:

- 1ro. Determinar y conformar la distribución de probabilidades acumuladas y establecer los intervalos.

Como muchas simulaciones incluyen variables aleatorias, es necesario conocer cómo seleccionar valores específicos de estas variables.
En cursos anteriores y temas anteriores se han estudiado diferentes variables aleatorias como son la Binomila, Poisson, Exponencial, Normal, t´Studen, Chi-cuadrado; también veremos otras como la Unifrome, la triangular y la Beta, que se emplean frecuentemente en le Gestión de proyectos.
Conocida la distribución de probabilidades más apropiada que modelara el experimento se determinan las distribuciones acumuladas de probabilidad y sus intervalos.

- 2do. Generar los números aleatorios.

Una vez determinan las distribuciones acumuladas de probabilidad y sus intervalos, entonces es necesario generar número aleatorios los que puede ser por diferentes maneras:

  - Método de los números en un sombrero.
  - Tabla de números aleatorios.
  - Aplicaciones informáticas con esta opción como Excel y otras, que mediante ecuaciones matemáticas generan números seudoaleatorios que producen series cíclicas, en que cada ciclo es igual al otro, con periodos cíclicos de más de 1 millón de números aleatorios, garantizando su no repetición.
  - App para teléfonos inteligentes y otras.

- 3ro. Relacionar los números aleatorios con los valores acumulados de probabilidades para obtener el valor de la variable aleatoria.
  - Una manera simple sin el empleo de tecnología es la Tabular que consiste en ubicar el número aleatorio en la tabla de intervalo de probabilidades acumulada que corresponda y con esto se puede establecer encontrar en la tabla de distribución el valor de la variable aleatoria a que pertenece este intervalo. Pero lo anterior resulta engorroso cuando las corridas son muchas.

- En la aplicación Excel se puede lograr fácilmente con la función **BUSCAV**(valor a buscar; matriz de datos donde se busca; indicador columna que debe devolver el valor; y falso si no se desea que sea exacto) **BUSCARV(C13,$E$4:$G$9,3**).
- También existen otros métodos como el gráfico, el de la transformación matemática. (Estudiar estos métodos descrito a partir de la página 502 de la bibliografía indicada)

- 4to. Correr repetidamente el modelo de Monte Carlo.

En la medida que aumenta el número de corridas los resultados se hacen más precisos, por eso el empleo de herramientas computacionales ha sido tan útil en la simulación.

4.4. EJEMPLO DE SIMULACIÓN:

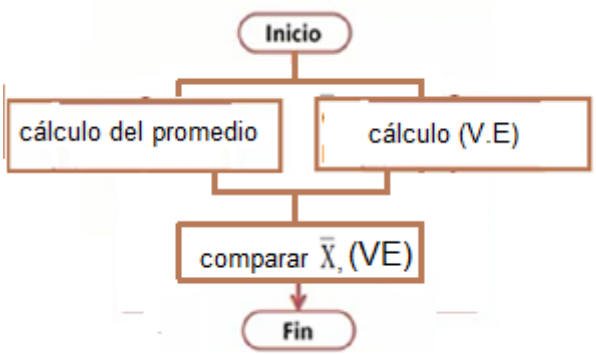
Ejemplo 1. Simular el lanzamiento de un dado y comparar el promedio de la simulación con el valor esperado (VA).

Paso 1: Objetivo
Comparar el promedio de la simulación del lanzamiento de un dado con el valor esperado (VA) de esa distribución.

Paso 2: **Formulación del modelo**

$$\text{Promedio: } \bar{X} = \sum_{i=1}^{n} Xi / n$$

$$(VE) = \sum_{i=1}^{n} Xi\ P(Xi)$$



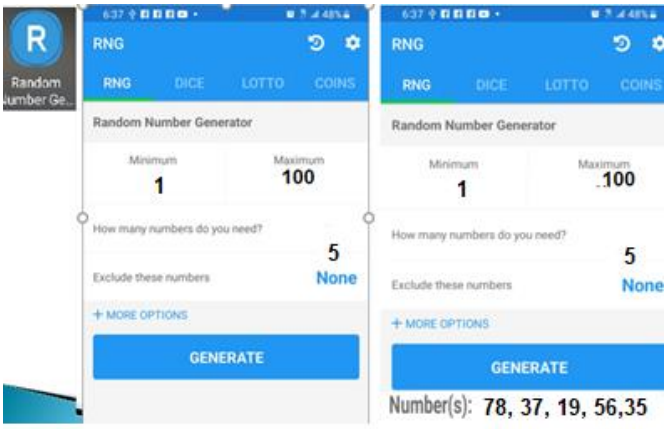
Paso 3: Diseño del experimento
Como el dado tiene 6 caras la probabilidad de ocurrencia (variable aleatoria) para cada cara es de 1/6 (distribución uniforme), se calcula la probabilidad acumulada y sus intervalos. Se realizará solo 5 corridas (posibles lanzamientos del dado) atendiendo que es un ejercicio de ejemplo.

Paso 4: Realización del experimento

4.1 Determinar y conformar la distribución de probabilidades acumuladas y establecer los intervalos.

Cara	Prob.	Lím Inf.	Lím. Sup.
1	1/6=0.166	1.0%	16.6%
2	1/6=0.166	16.6%	33.2%
3	1/6=0.166	33.2%	49.8%
4	1/6=0.166	49.8%	66.4%
5	1/6=0.166	66.4%	83.0%
6	1/6=0.166	83.0%	100%

4.2 Generar los números aleatorios.



4.3 Relacionar los números aleatorios con los valores acumulados de probabilidades para obtener el valor de la variable aleatoria.

Corrida	Número aleatoria	cara
1	78	5
2	37	3
3	19	2
4	56	4
5	35	3
Total		17

Paso 5: Evaluación de los resultados

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} Xi / n \qquad \overline{X} = 17/5 = 3.4$$

(V.E) = 1*0.16+2*0.16+9*0.16+4*0.16+5*0.16+6*0.16

(V.E) = 3.47

$$\overline{X} \approx \text{(V.E)}$$

R/ El promedio 3.40 se asemeja al valor esperado de 3.47

Ejemplo 2. Estimar el tiempo promedio entre llegadas de las primeras 10 personas, aplicando el proceso de Monte Carlo, si la distribución de probabilidades de llegadas al sistema de servicio (cola) es la siguiente:

Tiempo de legadas

Tiempo entre llegas (m)	Probabilidad
1	0.05
3	0.60
5	0.25
7	0.10

Paso 1: Objetivo
Estimar el tiempo promedio entre llegadas para las primeras 10 personas.

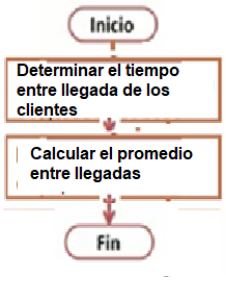
Paso 2: **Formulación del modelo.**

La expresión del tiempo promedio entre llegadas es

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} Xi / n$$

.

Paso 3: Diseño del experimento.
La variable aleatoria es el tiempo entre llegadas de los clientes (variable aleatoria continua)
Se realizarán 10 corridas que significan 10 clientes y se calcula el promedio



Paso 4: Realización del experimento

1ro. Determinar y conformar la distribución de probabilidades acumuladas y establecer los intervalos.

Tiempo entre llegadas	Probabilidad	L. inferior	L. superior
1	0.05	1	5
3	0.60	5	65
5	0.25	65	90
7	0.10	90	10

4.2 Generar los números aleatorios.

Corrida (primeras 10 llegadas)	No. Aleatorio
1	05
2	01
3	19
4	29
5	15
6	04
7	72
8	01
9	12
10	03

4.3 Relacionar los números aleatorios con los valores acumulados de probabilidades para obtener el valor de la variable aleatoria.

Corrida (primeras 10 llegadas)	No. Aleatorio	Tiempo entre llegadas (min)
1	05	1
2	01	1
3	19	3
4	29	3
5	15	3
6	04	1
7	72	5
8	01	1
9	12	3
10	03	1

Tiempo entre llegadas

Tiempo, minutos	*Probabilidad*	*Probabilidad acumulada*	*Intervalos*
1	0.05	0.05	0.01-0.05
3	0.25	0.30	0.06-0.30
5	0.60	0.90	0.31-0.90
7	0.10	1.00	0.91-0.99,00

Total 22

Paso 5: Evaluación de los resultados.

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} Xi / n \qquad \bar{X} = 22/10 = 2.2 \text{ min}$$

R/ El tiempo promedio entre llegadas de los primeros 10 clientes se estima sea de 2.2 min.

Nota: Los valores generados no se distribuyen cómo era de esperarse. En lugar de que el 60% de los valores fuera cinco minutos, sólo se obtuvo uno (10%). Además, cinco de los valores son de 1 minuto cuando se esperaba que sólo hubiera uno. Si este conjunto de valores fuera usado en una simulación, los resultados serían erróneos puesto que los valores no son representativos de la variable.
Existen pruebas estadísticas formales para evaluar la representatividad, pero no se presentarán aquí, estas se estudiaron en la asignatura Estadística II o pueden encontrarse en la mayoría de los libros de estadística bajo el título "pruebas de bondad de ajuste".

CONCLUSIONES.

- La ***simulación*** es una técnica de experimentación en que se usan modelos lógico-matemáticos, que ahorran tiempo, recursos materiales y financieros y puede ser usado en todos los campos de la ciencia.
- Las simulaciones se llevan a cabo con una secuencia de cinco pasos que sirven como una guía de lo que debe incluirse para realizar con éxito un experimento.
    - Paso 1: definición de los objetivos
    - Paso 2: formulación del modelo.
    - Paso 3: diseño del experimento.
    - Paso 4: realización del experimento.
    - Paso 5: evaluación de los resultados.
- El proceso de Monte Carlo es un método general, que puede usarse para vincular un número aleatorio con cualquier distribución de probabilidad, es de destacar que en mucha bibliografía se emplea como sinónimo de simulación.
  De manera general realiza con slo siguientes procederes:
    - 1ro. Determinar y conformar la distribución de probabilidades acumuladas y establecer los intervalos.
    - 2do. Generar los números aleatorios.
    - 3ro. Relacionar los números aleatorios con los valores acumulados de probabilidades para obtener el valor de la variable aleatoria.
    - 4to. Correr repetidamente el modelo de Monte Carlo.
- Los número aleatorios pueden ser generados por:
    - Método de los números en un sombrero.
    - Tabla de números aleatorios.
    - Aplicaciones informáticas con esta opción como Excel y otras, que mediante ecuaciones matemáticas generan números seudoaleatorios.
- Cuando se emplea el proceso de Monte Carlo es importante revisar los valores generados para comprobar si son representativos de lo que se esperaba. La distribución de los valores debe corresponder de cerca a la distribución dada para la variable. Si no es así, se deben rechazar estos valores y desarrollar un nuevo conjunto.

ESTUDIO INDEPENDIENTE

EJEMPLO DE SISTEMAS DE COLAS

Un punto de peaje está tratando de determinar cuántos servidores construir. De manera más específica, desea saber si una ventanilla será suficiente. Debido a las limitaciones de estacionamiento, el punto no quiere más de tres carros esperando en la línea a la vez.
Se dispone con la siguiente información.

Tiempo entre llegadas (m)	Probabilidad
0.2	0.30
0.4	0.30
0.6	0.20
0.8	0.10
1.00	0.1

Tiempo de servicio (m)	Probabilidad
0.5	0.10
1	0.50
1.5	0.30
2	0.10

Diseñe un experimento donde simule las primeras 10 llegadas de clientes.