UNIVERSIDAD DE ARTEMISA

Investigación de Operaciones

MSc. Rodolfo Pérez Léon
email: rperezleon@uart.edu.cu
rplrpl55@gmail.com

UNIVERSIDAD DE ARTEMISA

Sumario.

Tema 2. Programación Entera.

3.1. Introducción.

3.2. Tipos de modelos de programación entera (PE).

3.3. Solución de problemas de (PE).

3.3.1. Método de solución de PE por redondeo .

3.3.2. Método de solución de PE por Ramificación y Acotamiento.

UNIVERSIDAD DE ARTEMISA

Objetivos: Que el alumno sea capaz de:

Construir y resolver problemas de programación lineal entera apoyado en el método de ramificación y acotamiento y con aplicaciones informáticas.

Método: Elaboración conjunta

Medios: Tiza y pizarra, Libro de texto, MDD, alicaciones informáticas teléfonos móviles.

Forma de enseñanza: Clase Encuentro

Bibliografía:

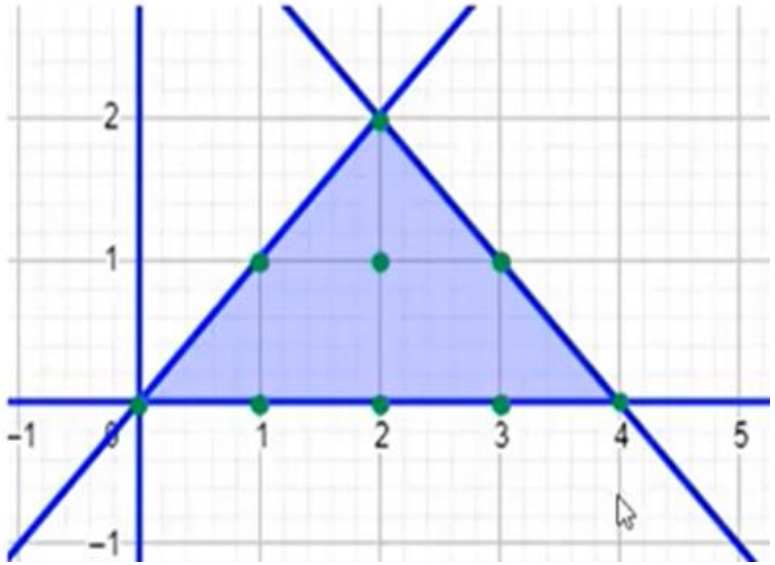
Métodos cuantitativos para la toma de decisiones en Administración. Editirial Felix Varela 2005.
Materiaes Didñactics Digitales entregados por el profesor.

3.1. Introducción

PROGRAMACIÓN ENTERA

La Programación Entera es un conjunto de técnicas de la Investigación Operativa que permiten solución cuando todas o algunas de las variables de decisión no pueden tomar valores fraccionarios.

Para el modelo de Programación Lineal se optimiza una función sobre una región convexa, mientras que en la Programación Entera se optimiza sobre una región de factibilidad que generalmente no es convexa. Por lo tanto, la solución de problemas enteros; resulta más complicada que la Programación Lineal



Surge en la década de los 50 del siglo pasado con los trabajos de:



Harvey Wagner



Alan Manne



Ralph Gomory

TIPOS DE VARIABLES

- Reales: cantidades divisibles (pesos, volúmenes, tiempo, etc.)
- Enteras: cantidades no divisibles (personal, vehículos, objetos, etc.)
- Binarias: dos estados posibles. Toman valor 0 o 1.

Encendido / Apagado *Sí / No* *Se usa / No se usa*

Si se requiere que todas las variables sean enteras se habla de programación lineal entera pura; si se necesita que algunas de las variables de decisión sean números enteros, se tiene un problema de programación lineal entera mixta.

3.2. Tipos de modelos de PE

MODELOS ENTERO PUROS (PE)

Es una variante del Programa Lineal, para el cual todas las variables de decisión además de cumplir la condición de no negatividad deben ser todas enteras

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{Sujeto a: } x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad \textbf{Enteras}$$

MODELOS ENTEROS MIXTOS (PEM)

En esta variante de Programa Lineal, todas las variables de decisión son positivas y solamente algunas de ellas deben ser enteras

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{Sujeto a: } x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1 \text{ Enteras}$$

MODELOS BINARIOS

Esta variante del Programa Lineal, suele utilizarse para modelar problemas con actividades que deben o no ejecutarse. Por analogía con el sistema de los números binarios, las variables de decisión toman un único valor entero entre 0 y 1. Esto es, si la actividad no se ejecuta la variable correspondiente toma el valor 0, de lo contrario el valor 1

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2$$
$$\text{Sujeto a: } x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$x_i \in \{0, 1\}$$

Algunas aplicaciones de la PE



- Si bien la restricción de **integralidad** puede parecer *inofensiva*, en realidad tiene efectos de gran alcance

- Por un lado permite modelar restricciones de productos que deben ser fabricados en cantidades enteras.

- Por otro lado, con las variables enteras podemos modelar requerimientos lógicos, problemas de costos fijos, planificación de actividades y muchos otros tipos de problemas.

- La otra cara de la gran *potencialidad del modelado* con variables enteras es la **dificultad** de los problemas resultantes.

- Problemas con apenas 80 variables pueden superar la capacidad de cálculo de las más sofisticadas computadoras.

- Por tal razón, el estudio de los **métodos de solución** en problemas de programación entera es un área de fundamental importancia.

3.3. Solución de problemas de PE

SOLUCIONES DEL PROBLEMA DE PE

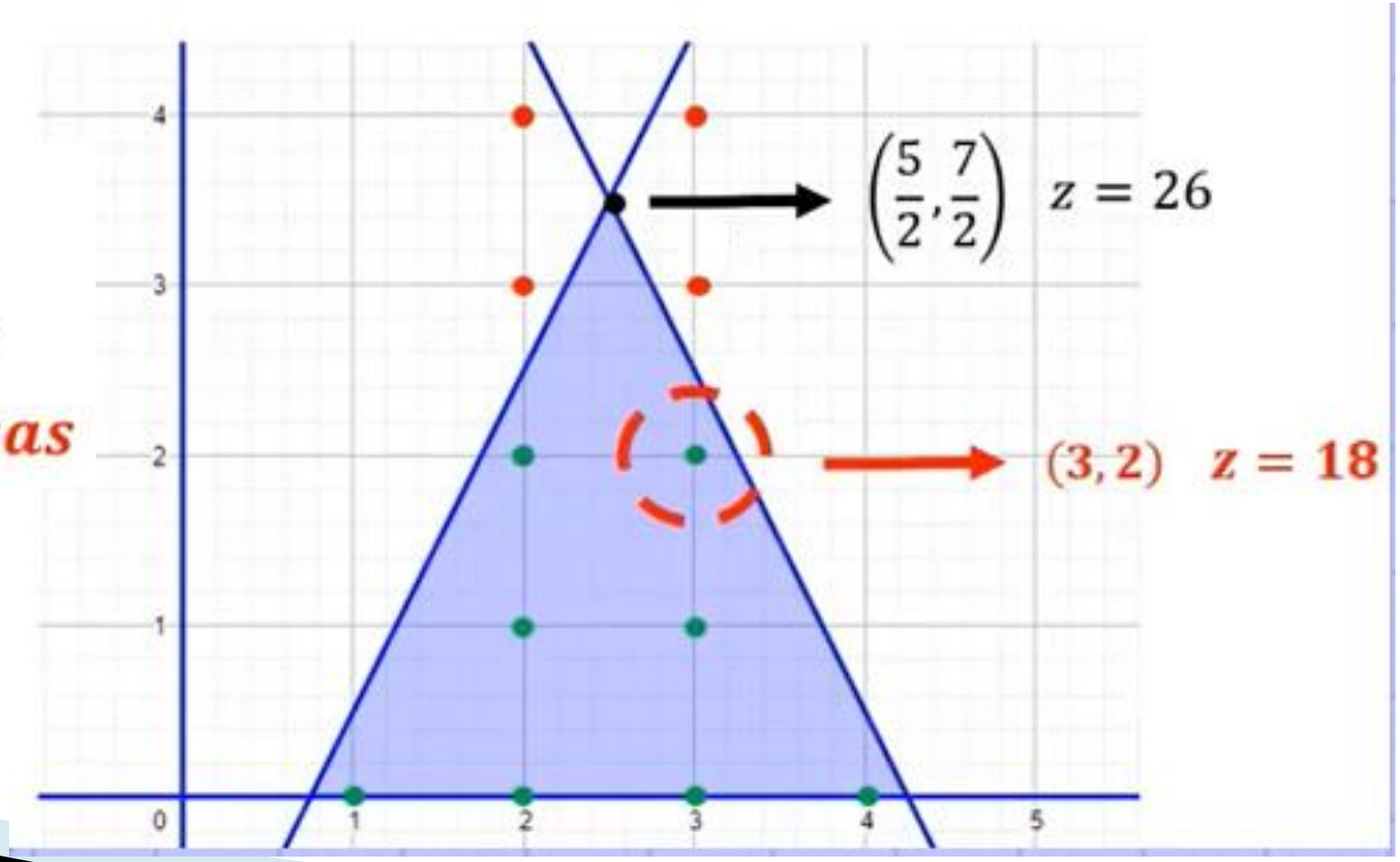
- Úna solución óptima
- Número finito de soluciones óptimas
- Infinitas soluciones óptimas

SOLUCIONES DEL PROBLEMA DE PE

- **Con una solución optima**

$$Maximizar \quad z = 2x_1 + 6x_2$$

$$Sujeto\ a \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \geq 3 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 17 \\ x_1, x_2 \geq 0 \ y \ \textbf{\textit{enteras}} \end{cases}$$

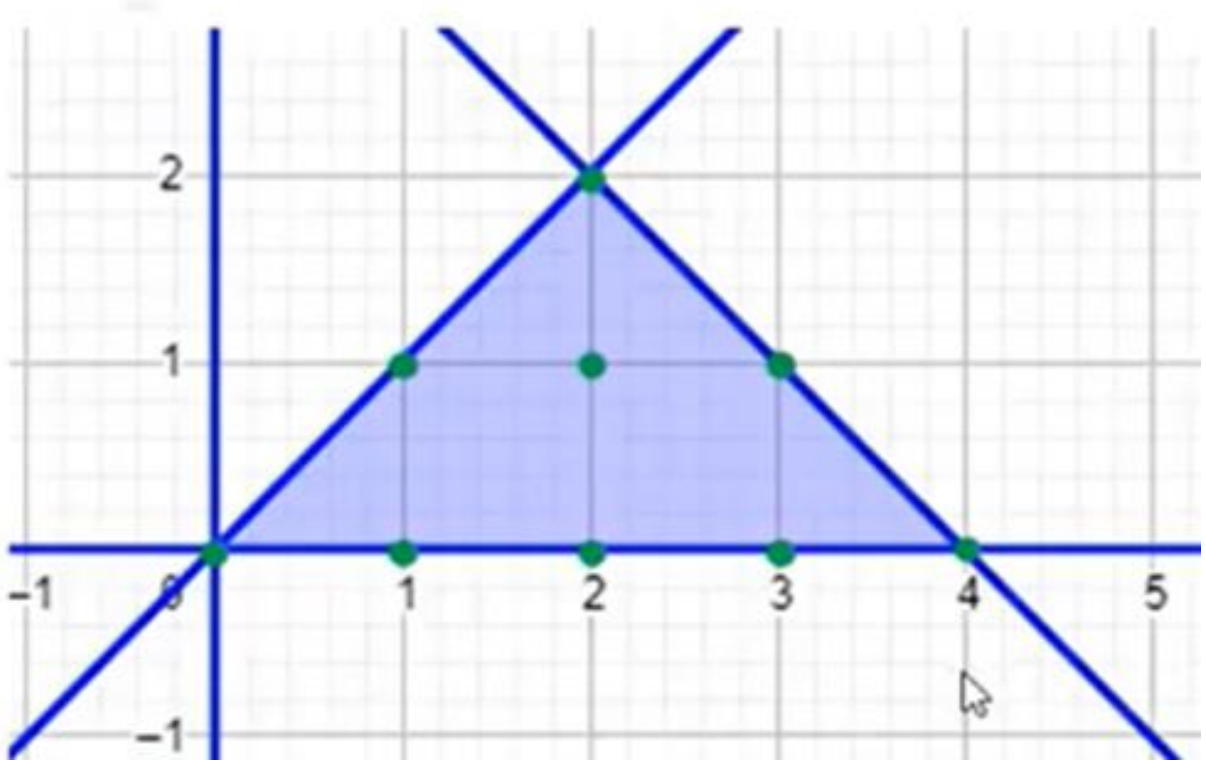


SOLUCIONES DEL PROBLEMA DE PE

- **Con un número finito de soluciones óptima**

$$Maximizar\ z = x + y$$

$$Sujeto\ a \begin{cases} x + y \leq 4 \\ x - y \geq 0 \\ x, y \geq 0 \\ x, y \quad \text{ENTERO} \end{cases}$$

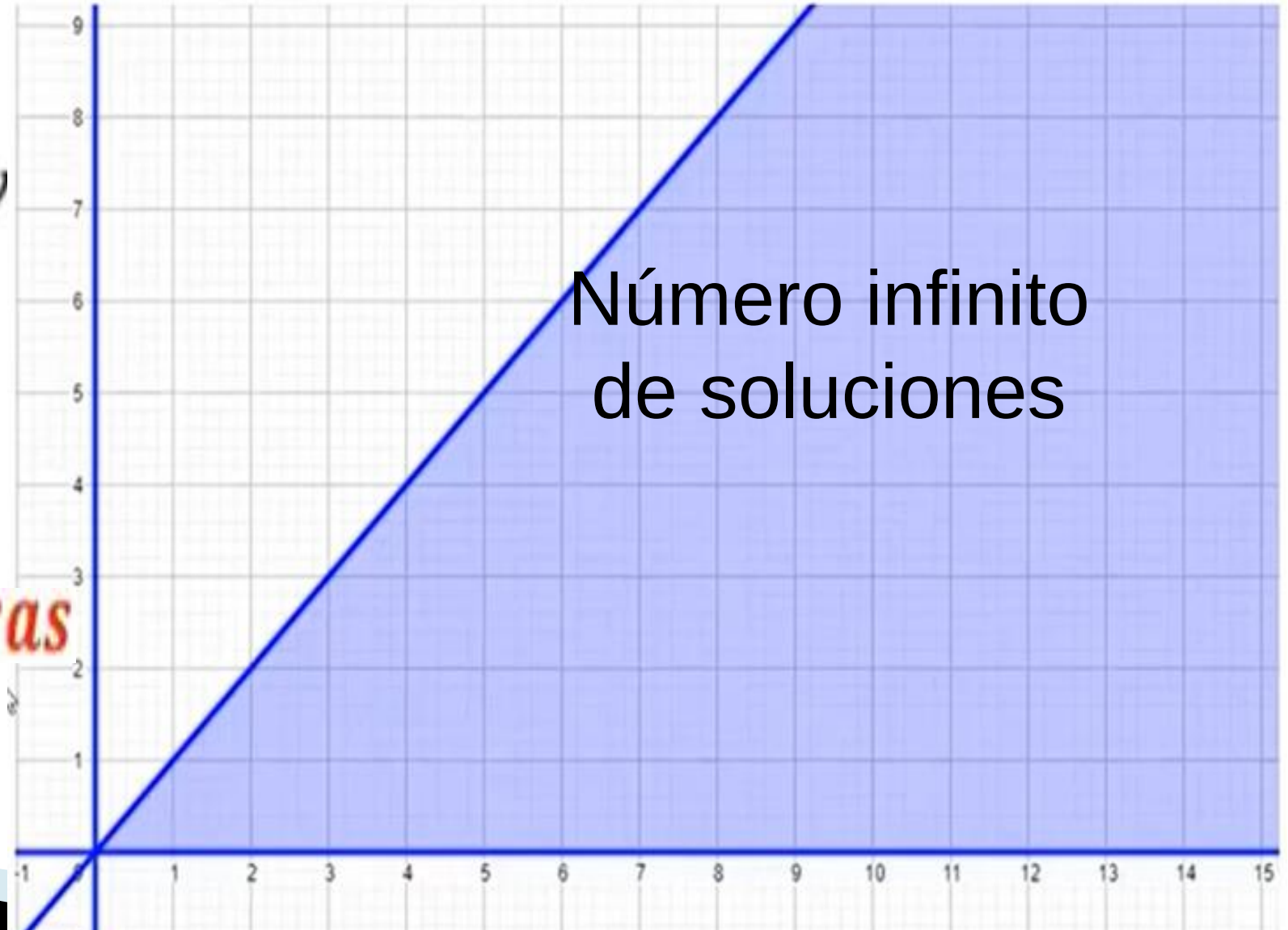


SOLUCIONES DEL PROBLEMA DE PE

- Con un número infinito de soluciones óptima

$$Minimizar\ z = x - y$$

$$Sujeto\ a \begin{cases} x - y \geq 0 \\ x, y \geq 0 \\ x, y\ \textit{enteras} \end{cases}$$



Métodos de solución

- ✓ Redondeo de la solución de programación lineal (Relajación)
- ✓ Enumeración explícita o completa.
- ✓ Ramificación y acotamiento.
- ✓ Planos cortantes.

3.3.1. Método de solución de PE por redondeo

Seguramente una empresa que fabrica camas sujetos a ciertas restricciones obtiene como solución para Maximizar las ganancias que se produzcan 325,47 camas. En tales situaciones, a menudo se adopta la solución no entera al requerimiento de enteros simplemente redondeando los resultados al entero más próximo 325 ó 326 camas. Esto produce lo que se llama la “solución redondeada”.

Mediante ese recurso de redondear la solución obtenida del PL al PE se obtienen soluciones aceptables para el administrador, porque no hay diferencia significativa, entre producir 325.47 camas y producir 325 ó 326 camas. En realidad, probablemente baste para el ajuste de los datos del modelo que satisfaga al administrador una producción cercana a los 325 camas

Existen problemas importantes en los que la “solución redondeada” simplemente no funciona. Esta complicación puede deberse a la escala de las variables por considerar. Por ejemplo, si la solución de un modelo de programación lineal recomienda que la Boeing construya 11,6 aparatos 747 y 6,8 aparatos 727, el administrador probablemente no quedara contento con la simple medida de tomar la decisión de construir 11 de los primeros y 6 de los segundos, o cualquier otra solución redondeada, porque la magnitud del rendimiento y la asignación de recursos asociados con cada unidad del problema aconsejan determinar la mejor solución entera posible.

Otro ejemplo, veremos que problemas en los que queramos que una variable “x” sea igual a 1 si vamos a construir una inversión o “x” sea igual a cero (si-no). Supóngase que la solución de una versión de programación lineal de este problema produce un valor no entero, por ejemplo, x = 0,38. Vemos que este valor no contiene información aprovechable como solución al problema real.

En ambos casos el redondeo del resultado de PL a PE no es apropiado.

Veamos esto desde el método gráfico.

PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN ENTERA

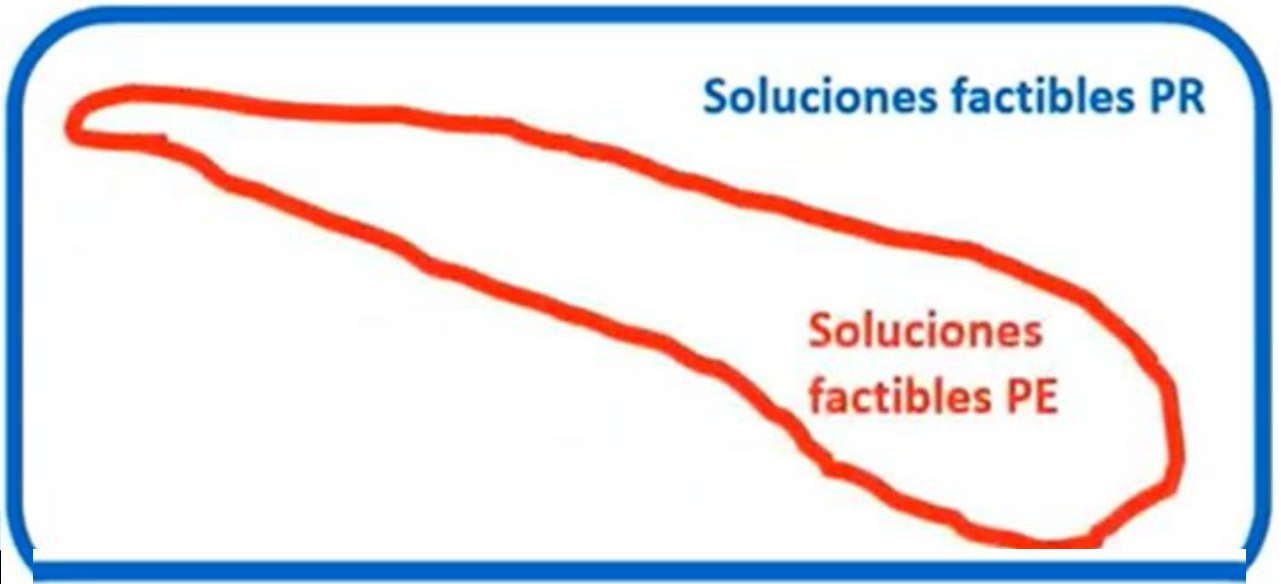
$$Maximizar\ z = cx$$

$$Sujeto\ a \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ Algún\ x_i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

PROBLEMA RELAJADO ASOCIADO

$$Maximizar\ z = cx$$

$$Sujeto\ a \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

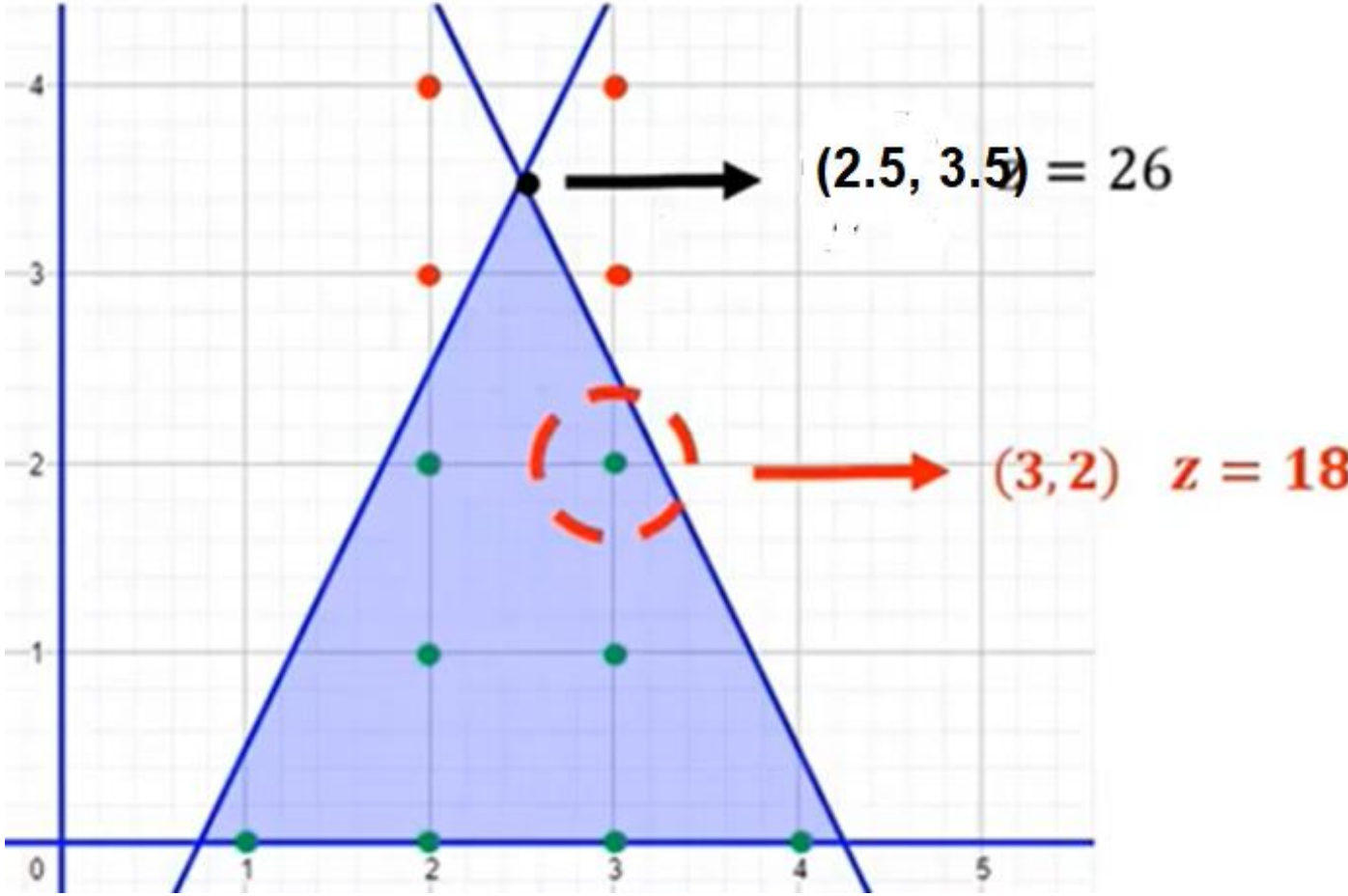


EJEMPLO 2

$$Maximizar \ z = 2x_1 + 6x_2$$

$$Sujeto\ a \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \geq 3 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 17 \\ x_1, x_2 \geq 0 \ y \ \text{enteras} \end{cases}$$

solución (2.5, 3.5)

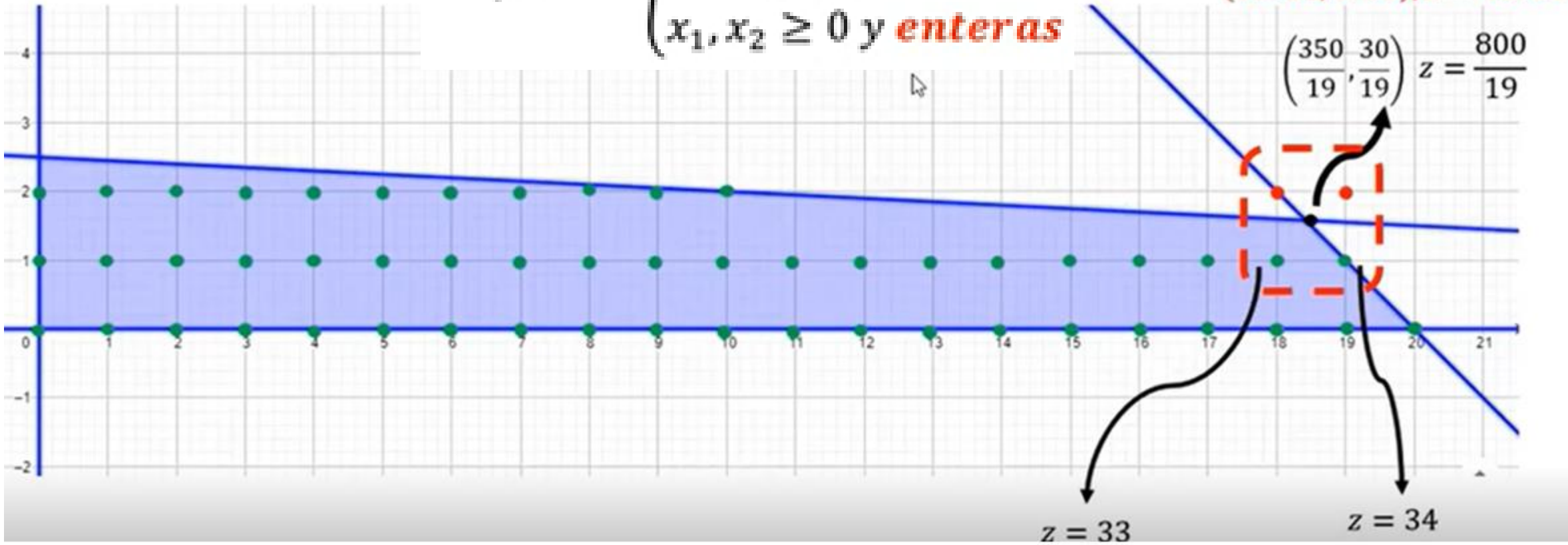


En este ejemplo el redondeo a los valores más cercanos a la solución del problema relajado no es apropiado porque esos valores no son solución del problema PE

EJEMPLO 2

$$Maximizar\ z = x_1 + 15x_2$$

$$Sujeto\ a \begin{cases} x_1 + 20x_2 \leq 50 \\ x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0\ y\ \textbf{enteras} \end{cases}$$



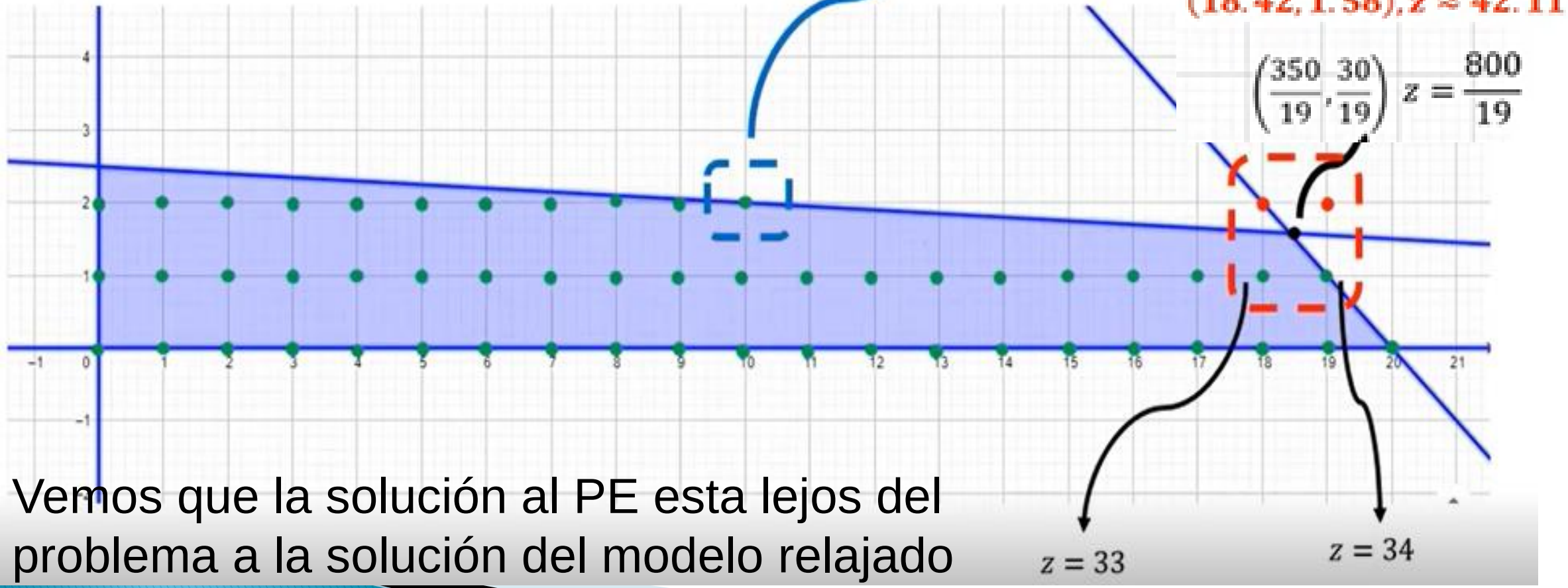
En este ejemplo el redondeo a los valores enteros más cercanos a la solución del problema relajado no es apropiado para dos soluciones pero si para otras dos pero sin embargo…

EJEMPLO 2

$$Maximizar\ z = x_1 + 15x_2$$

$$Sujeto\ a \begin{cases} x_1 + 20x_2 \leq 50 \\ x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0\ y\ \textbf{enteras} \end{cases}$$

$(10, 2), z = 40$



Vemos que la solución al PE esta lejos del problema a la solución del modelo relajado

De todo lo anterior se puede concluir que el método de redondeo de la solución del problema lineal relajado al problema de programación entera no siempre es acertado.

3.3.2. Método de solución de PE por Ramificación y Acotamiento

El método de **Relajación y Acotamiento** como el método de **Planos de Corte** eliminan partes del espacio de soluciones, pero nunca alguno de los puntos enteros factibles.

Desafortunadamente, ninguno de los dos métodos es totalmente efectivo en la solución de problemas de programación lineal entera. No obstante los métodos de ramificar y acotar ofrece resultados superiores a otros. Aunque ya existen aplicaciones informáticas capaz de resolver estos problemas, resulta importante para los profesionales conocer el procedimiento que ellas emplean en la solución que nos ofrecen

Ramificación y acotación

Método de resolución de problemas de programación entera. Puede aplicarse a cualquier problema.

El método consiste en resolver una **serie de problemas** de programación lineal, empezando por el **problema relajado**, y aplicar las siguientes técnicas:

- **Ramificación:** si la solución no es entera, se definen dos nuevos problemas que deben resolverse.
- **Acotación:** si el valor óptimo de la función objetivo no mejora los obtenidos anteriormente, se descarta el problema.

ALGORITMO DEL MÉTODO DE RAMIFICACION Y ACOTAMIENTO

En este momento será más conveniente explicar los fundamentos del algoritmo de ramificar y acotar (R y A), por medio de un ejemplo numérico:

Consideremos el siguiente problema de Programación Lineal Entera:

Ramificación y acotación

Ejemplo:

$$\max 2x + y$$

$$\text{s. a.} \begin{cases} 5x + 8y \leq 68 \\ x - y \leq 2 \\ y \leq 6 \\ x, y \geq 0 \\ x, y \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



Problema relajado: **(PL0)**

$$\max 2x + y$$

$$\text{s. a.} \begin{cases} 5x + 8y \leq 68 \\ x - y \leq 2 \\ y \leq 6 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Resolución del problema relajado

Puede aplicarse cualquier método de resolución de programación lineal.

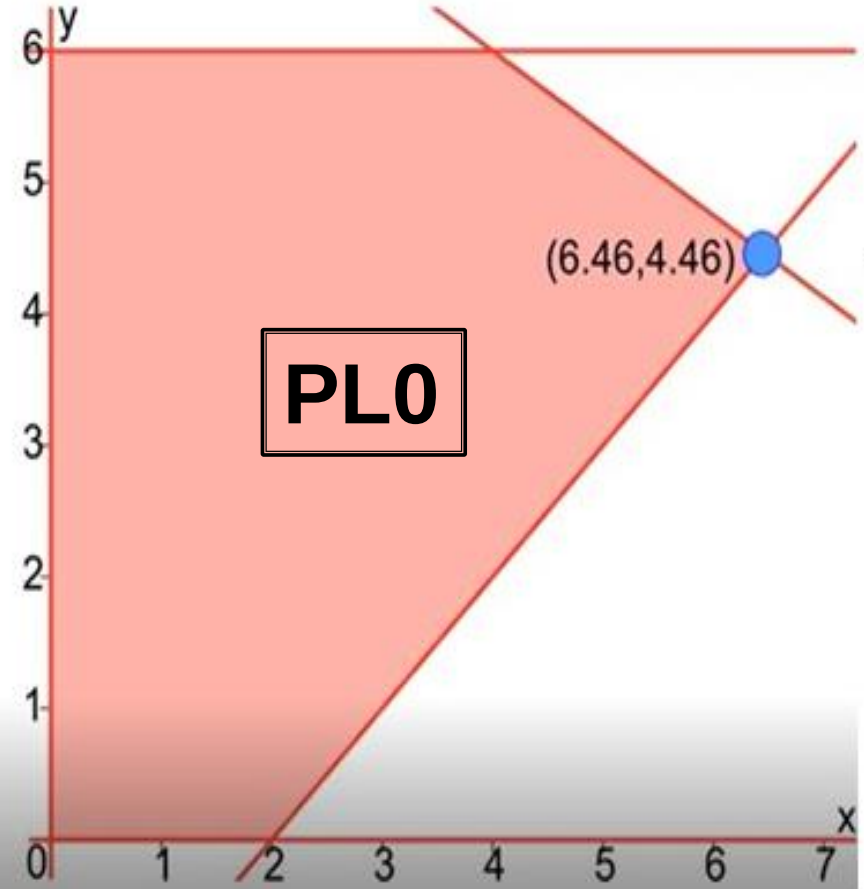
Solución óptima:

$x = 6.46, y = 4.46$

Valor de la función: 17.38

$x, y \notin \mathbb{Z}$

No es solución del problema de programación entera

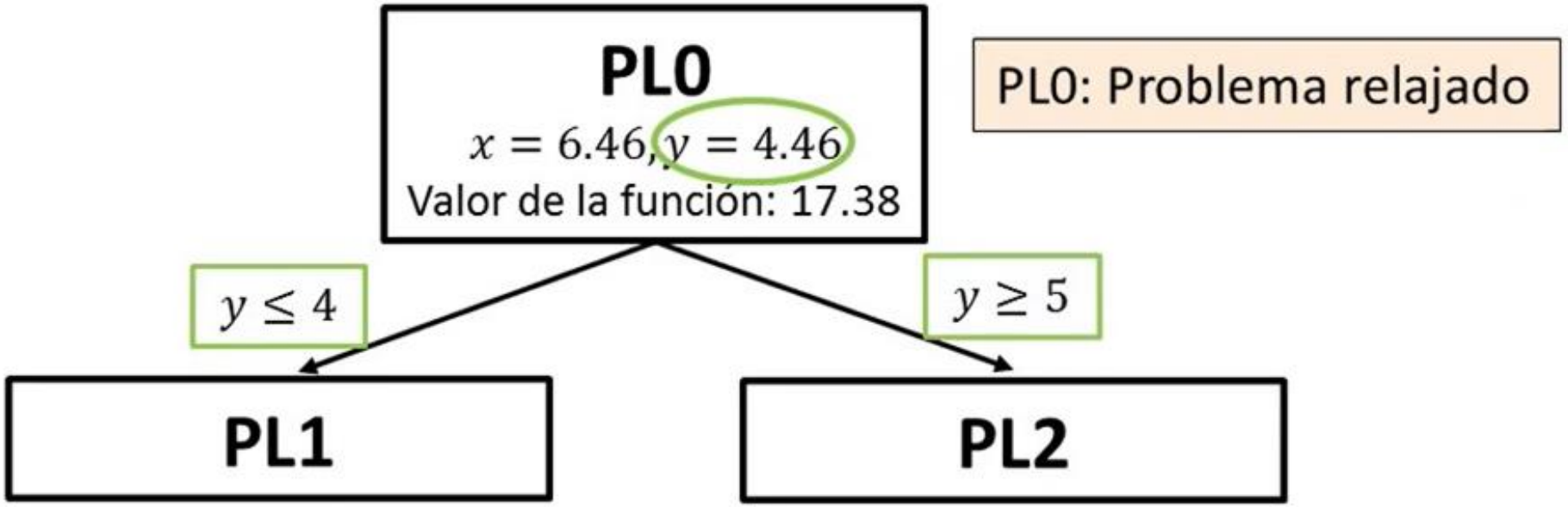


Región factible del problema relajado

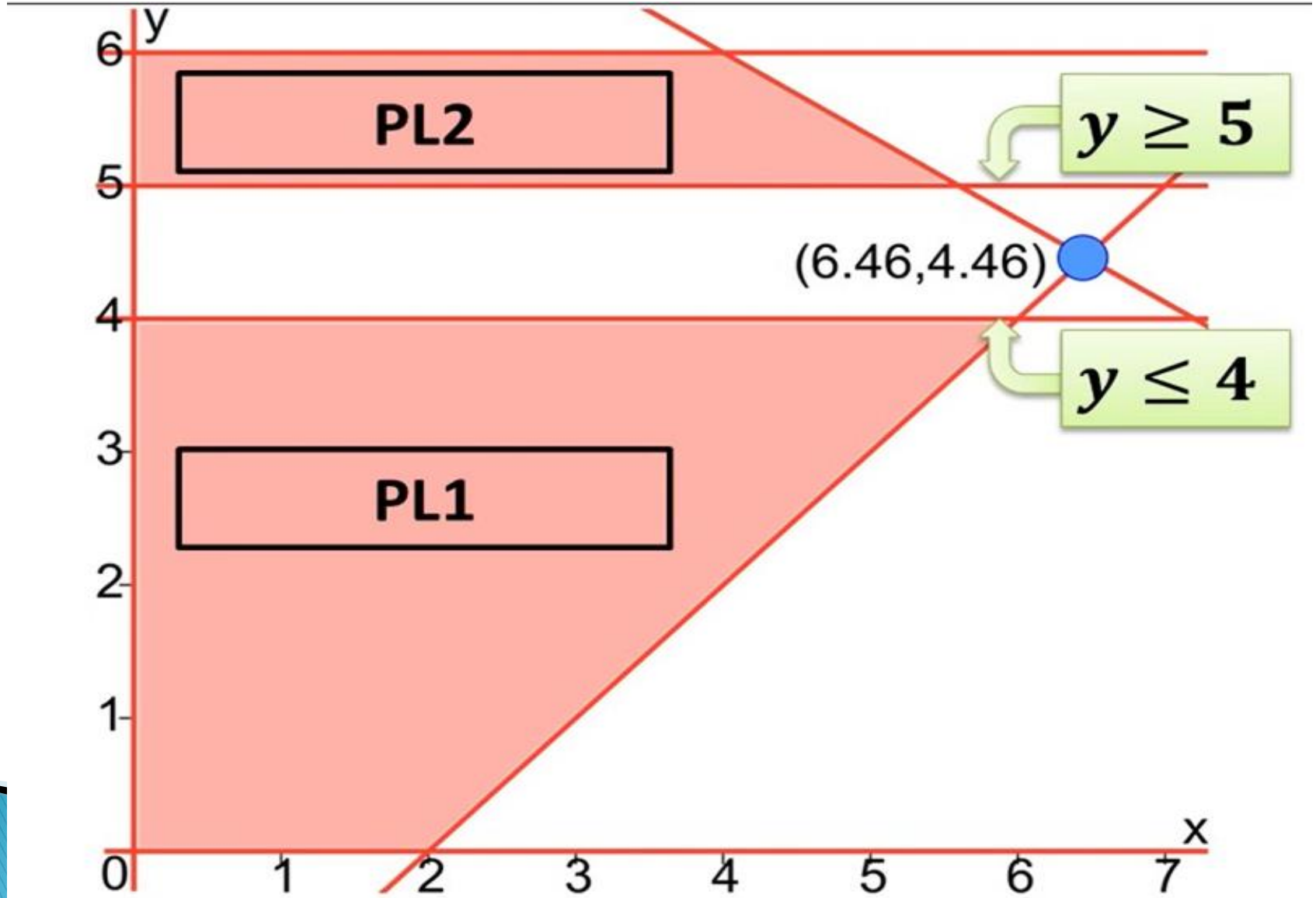
Ramificación

Si la solución óptima no cumple la condición de números enteros:

- Se elige una variable que no cumpla esta condición: $x_i = a$
- Se definen dos nuevos problemas con una nueva restricción cada uno, según la variable elegida y su valor: $x_i \leq [a], x_i \geq [a] + 1$



- **Ramificación:** si la solución no es entera, se definen dos nuevos problemas que deben resolverse.



Problema PL1: resolución

Problema PL1: Problema PL0 + restricción $y \leq 4$

$$\text{máx } 2x + y$$
$$\text{s.a.} \begin{cases} 5x + 8y \leq 68 \\ x - y \leq 2 \\ y \leq 6 \\ y \leq 4 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Resolución

Solución óptima: $\boldsymbol{x = 6, y = 4}$

Valor de la función objetivo: 16

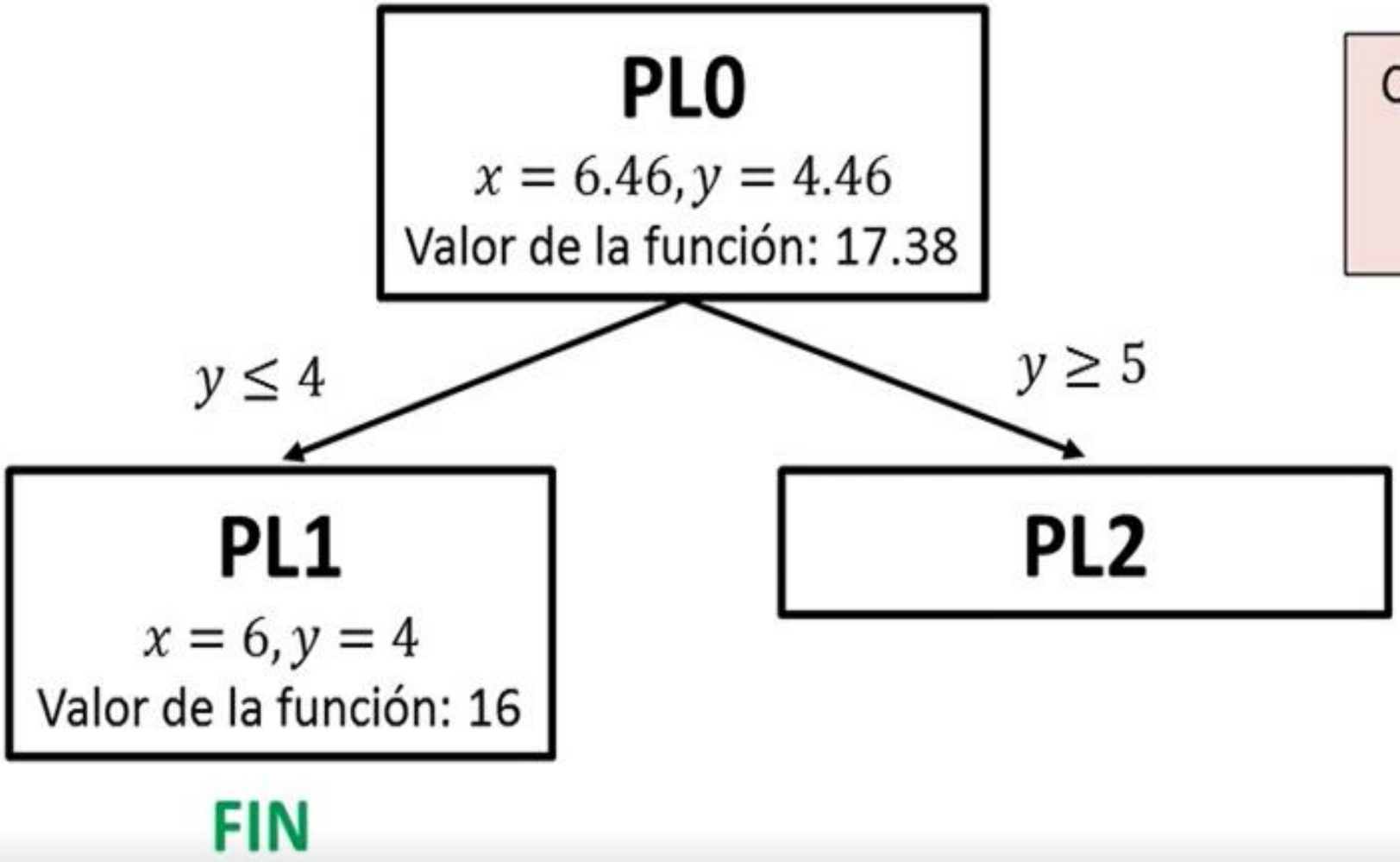
El valor de la función objetivo siempre empeora

Cumple las condiciones de valores enteros

Candidato a solución óptima

Será la solución óptima si no se encuentra ninguna solución mejor.

Esquema



Candidato a solución óptima:
$x = 6, y = 4$
Valor de la función: 16

Problema PL2: resolución

Problema PL2: Problema PL0 + restricción $y \geq 5$

$$\text{máx } 2x + y$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} 5x + 8y \leq 68 \\ x - y \leq 2 \\ y \leq 6 \\ y \geq 5 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Resolución

Solución óptima: $\boldsymbol{x = 5.6, y = 5}$

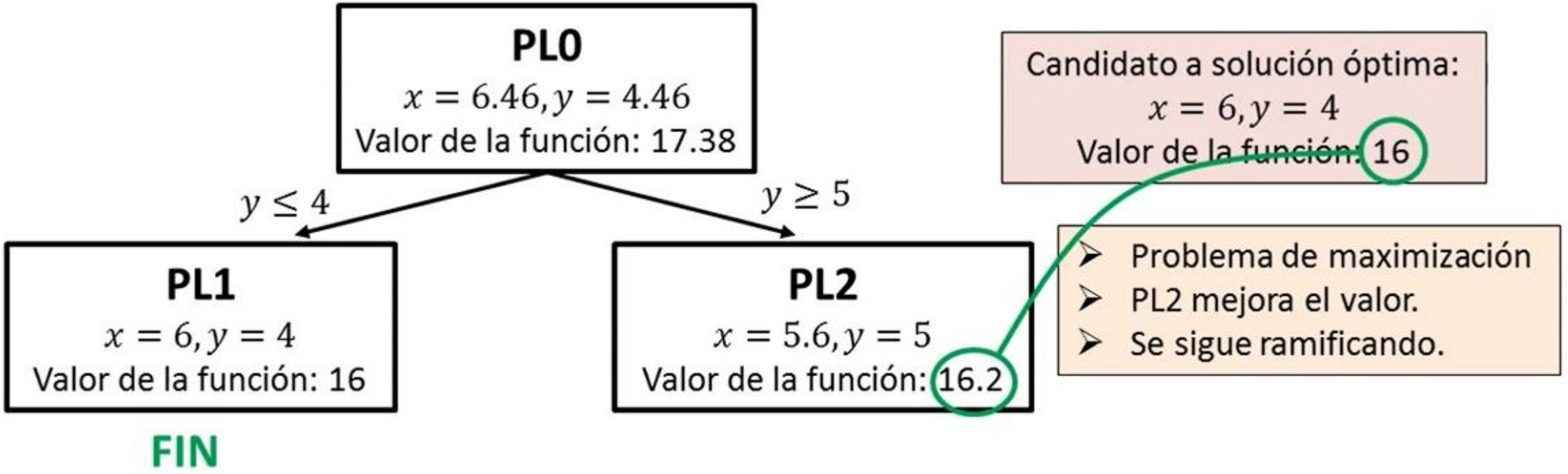
Valor de la función objetivo: 16.2

No cumple las condiciones de valores enteros

Ya tenemos un candidato. ¿Merece la pena seguir?

Depende del **valor de la función objetivo: ACOTACIÓN**

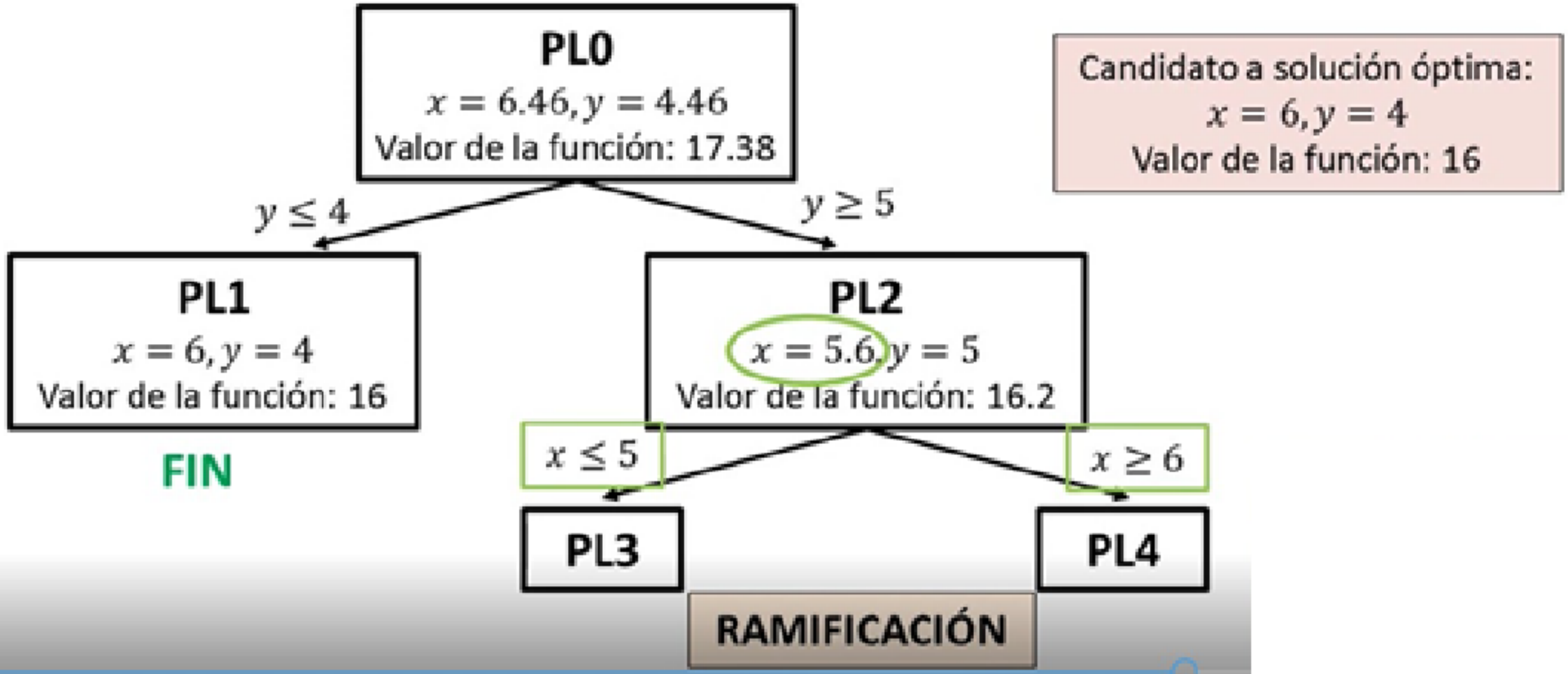
Acotación

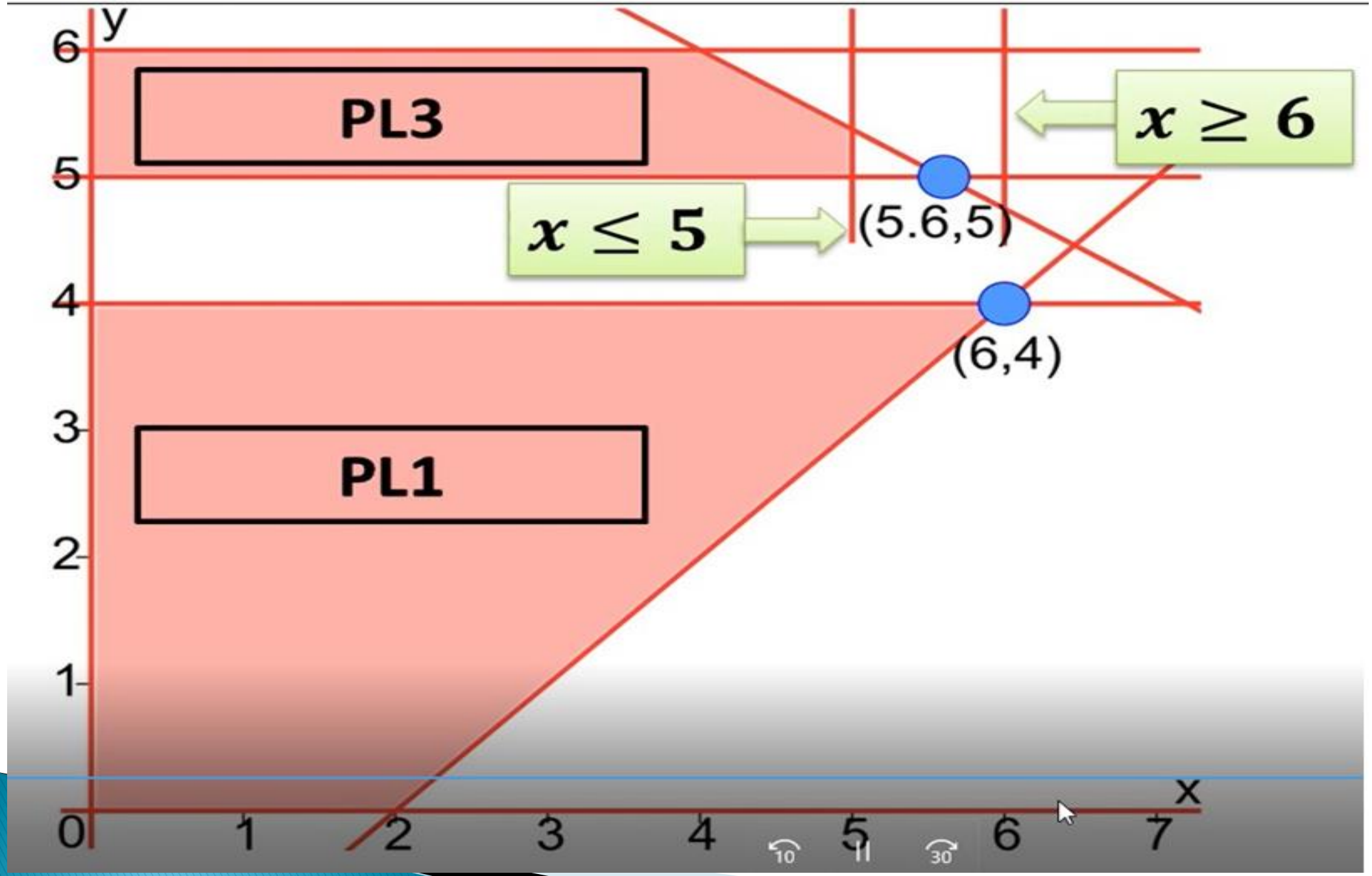


ACOTACIÓN:

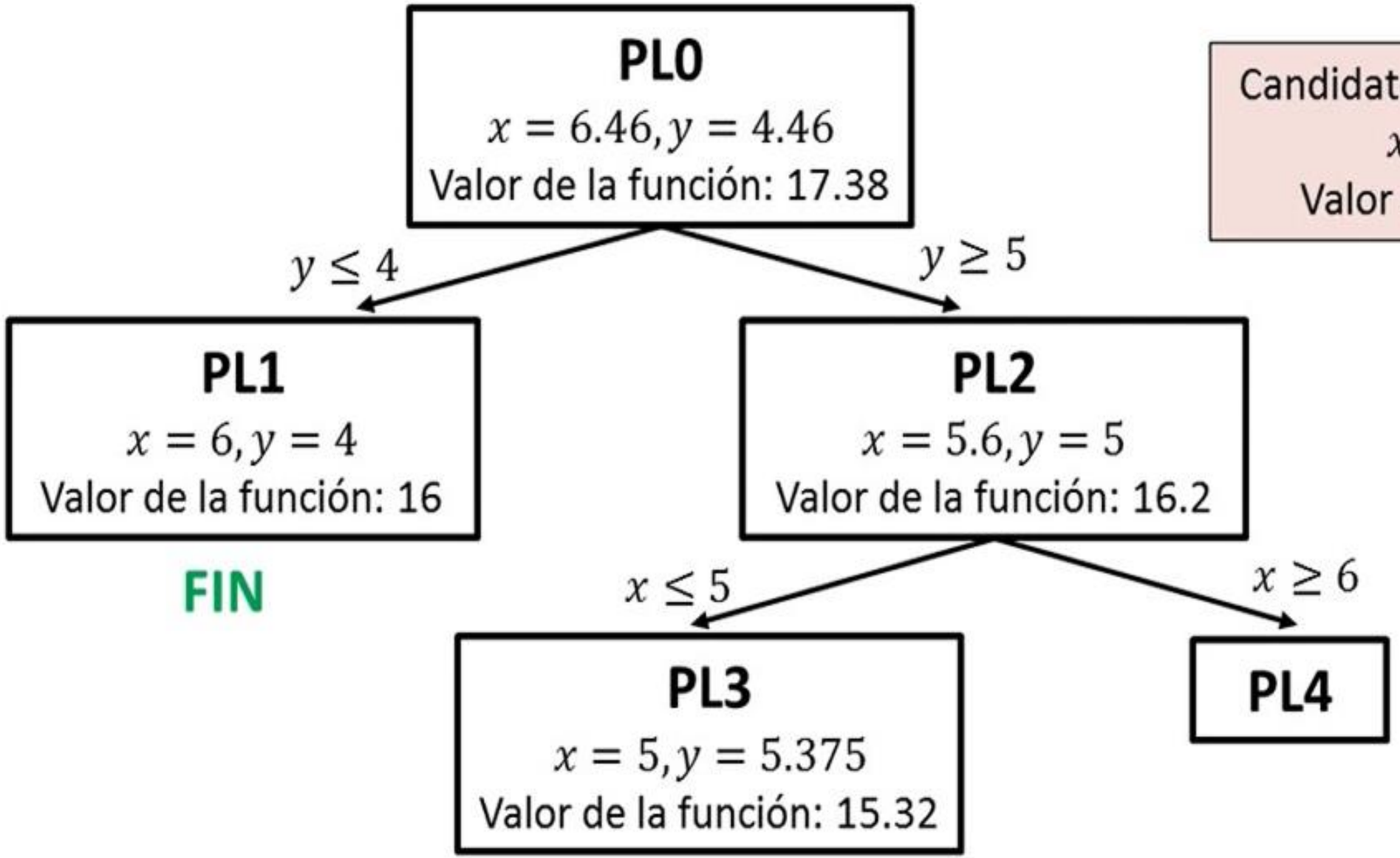
Si la solución **no mejora** la del último candidato, el problema se **descarta** (no se sigue ramificando).

Esquema


PL0
$x = 6.46, y = 4.46$
Valor de la función: 17.38
$y \leq 4$
$y \geq 5$
PL1
$x = 6, y = 4$
Valor de la función: 16
FIN
PL2
$x = 5.6, y = 5$
Valor de la función: 16.2
$x \leq 5$
$x \geq 6$
PL3
PL4
RAMIFICACIÓN
Candidato a solución óptima:
$x = 6, y = 4$
Valor de la función: 16

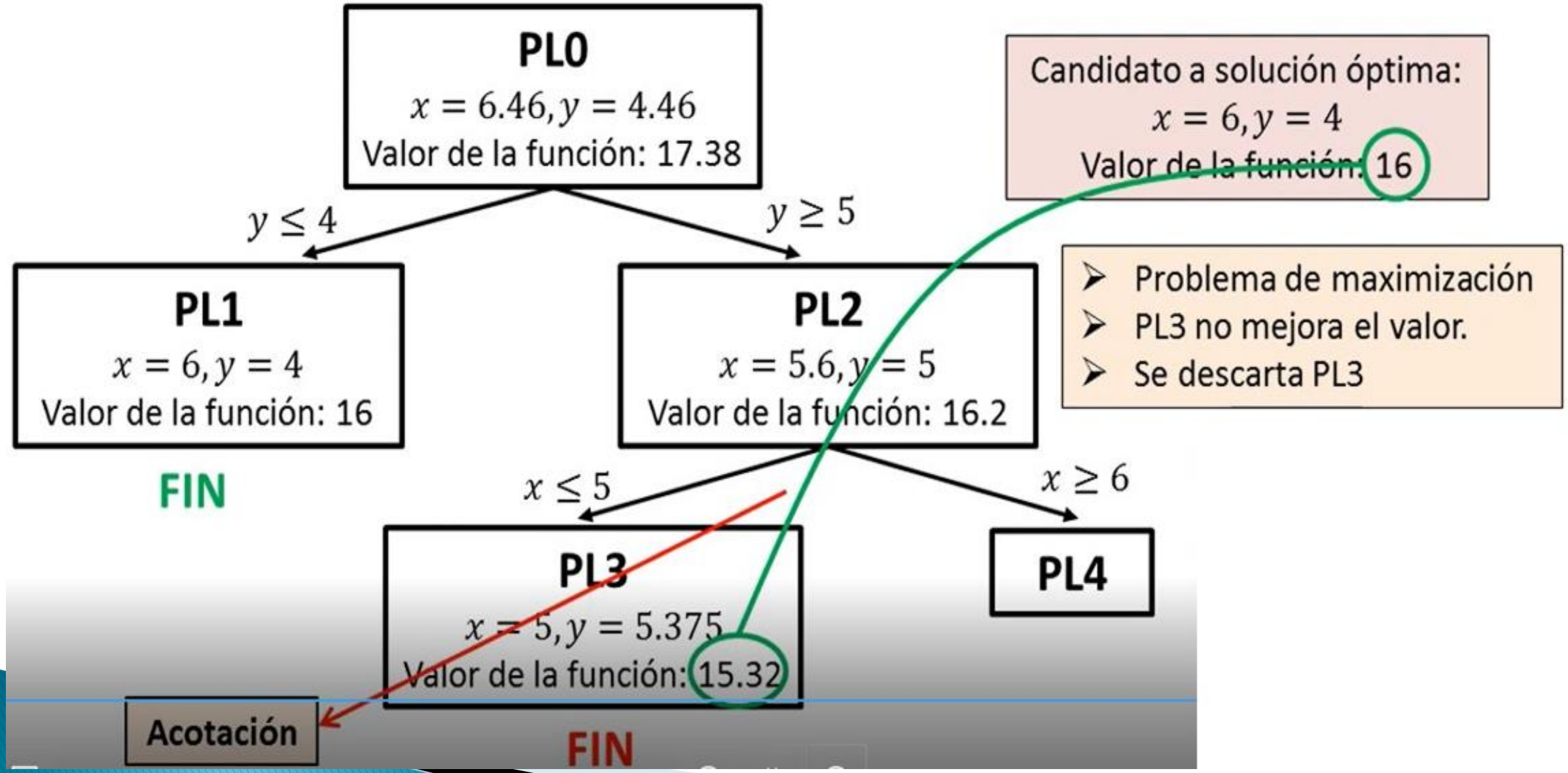

y
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
x
PL3
PL1
$x \geq 6$
$x \leq 5$
(5.6,5)
(6,4)

Esquema



Candidato a solución óptima:
$x = 6, y = 4$
Valor de la función: 16

Esquema


PL0
$x = 6.46, y = 4.46$
Valor de la función: 17.38
$y \leq 4$
$y \geq 5$
PL1
$x = 6, y = 4$
Valor de la función: 16
FIN
PL2
$x = 5.6, y = 5$
Valor de la función: 16.2
$x \leq 5$
$x \geq 6$
PL3
$x = 5, y = 5.375$
Valor de la función: 15.32
PL4
Acotación
FIN
Candidato a solución óptima:
$x = 6, y = 4$
Valor de la función: 16
Problema de maximización
PL3 no mejora el valor.
Se descarta PL3

Esquema

PL0

$x = 6.46, y = 4.46$

Valor de la función: 17.38

Candidato a solución óptima:

$x = 6, y = 4$

Valor de la función: 16

No quedan más problemas:

Solución óptima del problema de programación entera:

$$x = 6, y = 4$$

Valor de la función: 16

PL1

$x = 6, y$

Valor de la fu

FIN

$= 5$

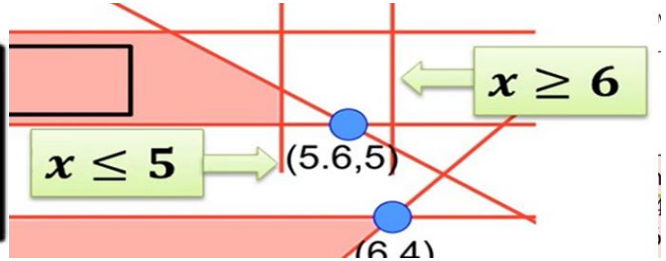
ón: 16.2

$x \geq 6$

PL4

No factible

FIN



$x = 5, y = 5.375$

Valor de la función: 15.32

FIN

Resumen

Se resuelven uno a uno los problemas:

- Si la solución encontrada no mejora el candidato a solución óptima (si lo hay), el problema **se descarta por acotación**.
- Si la solución mejora el candidato (o no hay candidato) y cumple la restricción de valores enteros, se toma como **nuevo candidato**.
- Si el problema no se descarta y la solución no cumple la restricción de valores enteros, se **ramifica** en dos nuevos problemas.

CONCLUSIONES

- Se puede concluir que el método de redondeo de la solución del problema lineal relajado al problema de programación entera no siempre es acertado.

- El método de Ramificación y Acotamiento ofrece soluciones mas aceptables que el método de plano de corte y es aplicable a los diferentes tipos de problemas de PE

Ramificación y acotación

Método de resolución de problemas de programación entera. Puede aplicarse a cualquier problema.

El método consiste en resolver una **serie de problemas** de programación lineal, empezando por el **problema relajado**, y aplicar las siguientes técnicas:

- **Ramificación:** si la solución no es entera, se definen dos nuevos problemas que deben resolverse.
- **Acotación:** si el valor óptimo de la función objetivo no mejora los obtenidos anteriormente, se descarta el problema.

Estudio individual

Una **panadería** dispone de **cuatro hornos** para producir barras de pan.

Cada horno es capaz de hornear un máximo de **1500, 2000, 1800 y 1700 barras de pan al día**.

El *costo diario* por el funcionamiento de cada uno de los hornos es de **$80, $100, $85 y $90, respectivamente.**

Para cada horno el *costo de hornear una barra de pan* es de 30, 25, 28 y 32 centavos de dólar.

La *demanda diaria* es de **3000 barras de pan.**

Plantee un modelo que permita determinar **cuales hornos deben encenderse** y **cuantas barras de pan** tienen que hacerse en cada uno de ellos para **minimizar el costo total.**

UNIVERSIDAD DE ARTEMISA

MUCHAS GRACIAS

Prof Aux. Rodolfo Pérez León
email: rperezleon@uart.edu.cu
rplrpl55@gmail.com