UNIVERSIDAD DE ARTEMISA

FOLLETO DE INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES I

CARRERA INGENIERÍA INDUSTRIAL

AUTOR: Ing. M.Sc. Rodolfo Pérez León

2025

CARRERA INGENIERÍA INDUSTRIAL

ASIGNATURA: INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES I Año: 3er.

Tema 1: El papel de la investigación de operaciones en la ingeniería industrial

1.1. Introducción

1.2. La investigación de operaciones y el método científico

1.3. Definición y tipos de modelos

1.4. Importancia de la IO. para el ingeniero industrial

Objetivos: Que el alumno se capaz de:

- Desarrollar el pensamiento científico y la actuación profesional, haciendo hincapié en aspectos tales como eficiencia económica, ahorro, uso racional de la energía y de los recursos materiales y laborales, aumento de la productividad.

Método: Expositivo.

Medios: Tiza y pizarra, Libro de texto, MDD.

Tipo de clase: Conferencia

Bibliografía: Métodos cuantitativos para la toma de decisiones en Administración.

Autores: Charles A. Gallagher y Hugh J. Watson. Parte 1ra.

¿Qué es la Investigación de operaciones? Autor Bryan Salazar López.

Materiales Didácticos Digitales entregados por el profesor.

DESARROLLO

1. Introducción

La Investigación Operativa (IO) es una ciencia aplicada, se basa en el uso del método científico, que utiliza análisis cuantitativo, modelos y métodos matemáticos destinados a determinar las mejores condiciones para el empleo de los recursos, financieros, materiales, o humanos.

La IO, surge en Gran Bretaña, durante la Segunda Guerra Mundial, cuando el Ministerio de Defensa del país organiza grupos con físicos, matemáticos y otros especialistas para asesorar y contribuir al mejor desarrollo de las operaciones militares. Sin embargo podría verse que uno de los primeros ejemplos históricos del uso de la investigación operacional es la misión confiada a Arquímedes por Hierón, tirano de Siracusa, de aplicar los mejores medios y métodos para defender a la ciudad contra los ataques y el sitio de los romanos.

Una vez finalizada la guerra muchos de los miembros de estos equipos pasaron a la actividad empresarial e industrial y continuaron sus estudios sobre los métodos matemáticos que habían desarrollado, apoyados ahora con el surgimiento y expansión de las computadoras.

En cambio, en el sector empresarial, la toma de decisión reviste una gran importancia porque de ella depende el desarrollo de la organización y de sus miembros y por ello resulta **la función administrativa más importante de todo directivo,** el que debe tomar decisiones antes problemas tales como:
¿Será necesario emprender una inversión o una reparación en la empresa?
¿Qué producto comprar?

¿Que estrategia de marketing se debe aprobar de varias propuestas?
¿Qué cantidad de productos elaborar según la posible demanda?

2. La investigación de operaciones y el método científico

El Método Científico sigue un grupo de pasos:

Paso 1. *Definir el problema.*
Paso 2. *Recolectar datos.*
Paso 3. *Formular un modelo que puede ser matemático,* (Formular una hipótesis).
Paso 4. *Resolución del modelo* (Verificación de la hipótesis).
Paso 5. *Evaluar los resultados con la realidad* (probar el modelo y refinar según se necesite; debe asegurarse que el modelo ofrece una representación suficientemente precisa del modelo real).
Paso 6. *Sacar conclusiones, hacer recomendaciones y evaluar el impacto*:

3. Definición y tipos de modelos.

Un Modelos es un intento de representar o explicar algún aspecto de la realidad, usando menos que esta, ej: una fotografía, un plano de una casa, una ecuación matemática una teoría, un concepto, una maqueta.
Los modelos se pueden clasificar según su grado de abstracción en:

- Modelos Abstractos (no físicos)
- Modelos Concretos (físicos)

Y se pueden clasificar igualmente si son matemáticos en:

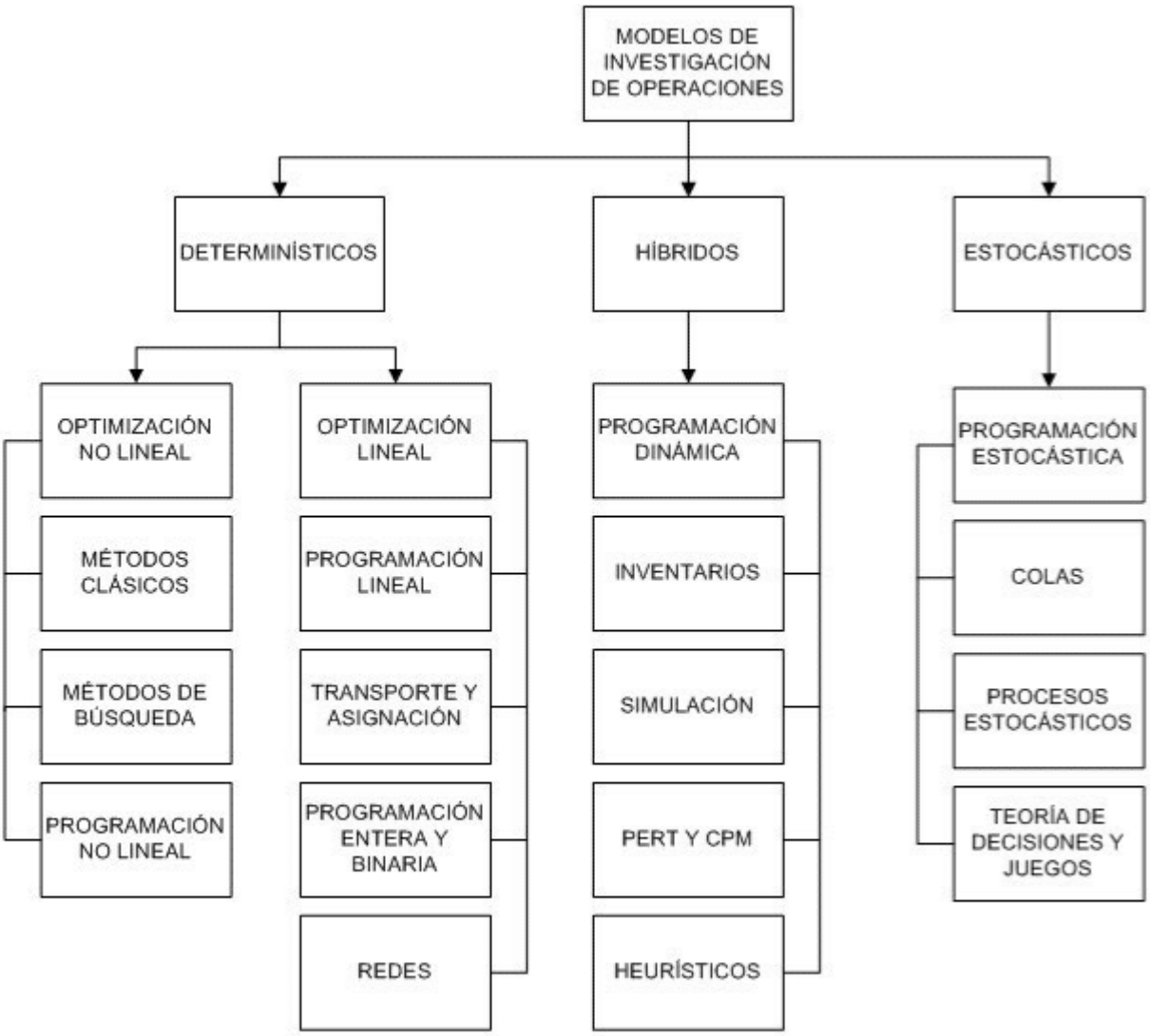
- Estáticos
- Dinámicos
- Determinísticos
- Probabilísticos o Estocásticos

1.4. Importancia de la IO. para el ingeniero industrial

Sugerimos leer el siguiente artículo:

¿Qué es la Investigación de operaciones? Autor Bryan Salazar López.

CONCLUSIONES



ESTUDIO INDEPENDIENTE

- **Argumente en una cuartilla que importancia tiene la Investigación de operaciones para el ingeniero industrial**

CARRERA INGENIERÍA INDUSTRIAL

ASIGNATURA: INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES **Año: 3er.**

Tema 2. Programación Lineal.

2.1. Introducción.

2.2. El modelo de Programación Lineal (PL), Conceptos básicos, elementos que lo integran, supuestos del modelo.

2.3. Procedimiento para la construcción de modelos (PL).

- **2.3.1. Definición de las variables de decisión. Principios de unicidad.**
- **2.3.2. Construcción de la función objetivo.**
- **2.3.3. Construcción del sistema de restricciones**

2.4. El modelo de transporte.

2.5. Método de solución gráfico.

2.6. Método de solución simplex.

2.6.1 Interpretación económica de la solución óptima utilizando la tabla simplex

2.7 Método de solución con paquetes informáticos (Excel, solver, WINQS)

- **2.7.1. Solución con la aplicación Solver.**
- **2.7.2. Solución con la aplicación excel.**
- **2.7.3. Solución con el programa WINQSB (Quantitative System for Bussines) para Windows. Interpretación de la tabla de salida.**

2.8. Análisis de sensibilidad.

2.9. El Problema Dual

Objetivos: Que el alumno se capaz de:

- **Construir y resolver modelos de optimización lineal, representativos de distintas situaciones económicas utilizando diferentes métodos: gráficos, analíticos con el empleo de herramientas informáticas, interpretando sus salidas.**

Método: Expositivo.

Medios: Tiza y pizarra, Libro de texto, MDD.

Tipo de clase: Conferencia

Bibliografía: Felipe Valdés, Pilar. Dpto. de Ciencia Empresariales. Facultad de Economía. Universidad de la Habana, 2008.

Materiales Didácticos Digitales entregados por el profesor.

DESARROLLO

2.1. INTRODUCCION:

La Programación Lineal constituye una de las técnicas de la Investigación de Operaciones. Es un método de análisis determinista, que permite elegir la mejor alternativa entre muchas. Como parte de los métodos matemáticos, ha tenido una amplia aceptación y difusión, siendo aplicada a múltiples problemas concretos de la economía y la industria.

Por ejemplo, para determinar el nivel de producción de una empresa para satisfacer una demanda; determinar las cantidades d e diferentes productos que pueden ser elaborados y su demanda; encontrar los distintos modos en que pueden ser utilizadas las materias primas para disminuir los costos, las instalaciones necesarias para, así como la tecnología y la posible organización del proceso productivo a realizar

2.2. EL MODELO DE PROGRAMACIÓN LINEAL (PL), ELEMENTOS QUE LO INTEGRAN, SUPUESTOS DEL MODELO.

Formulación Matemática del modelo de Programación Lineal (PL)

Partes integrantes del modelo de Programación Lineal (PL):

1. Función Objetivos

1. $\mathbf{Z = C_1X_1 + C_2X_2 + ... + CjXj \quad +... + C_rX_r}$

2. Sistema de restricciones o limitaciones lineales

2. $\mathbf{a_{i1}X_{i1} + a_{i2}X_{i2} + ... + a_{ij}X_j + ... + a_{ir}X_{ir} \quad (\leq, =, \geq) = b_i \quad i = 1, ..., m}$

3. Condiciones de no negatividad

3. $\mathbf{Xj \geq 0 \quad j = 1,..., r}$ (es ilógico pensar como una solución la producción de -3 productos)

Donde:

Xj -> variables esenciales ó variables de decisión del modelo.

Cj: coeficientes de la función objetivo.

a_{ij}, y b_i: Parámetros del modelo, suponen conocidos y constantes, por lo que el modelo de Programación Lineal es un modelo determinista.

Para un modelo de programación lineal se definen los conceptos siguientes:

Solución: cualquier conjunto de valores para las variables Xj que satisfaga el sistema de restricciones.

Solución posible o factible: si estos valores satisfacen además la condición de no negatividad.

Solución posible óptima: la solución posible que proporcione el valor óptimo (máximo o mínimo) para la funciónobjetivo.

El objetivo al resolver un modelo de programación lineal es escoger de entre todas las soluciones posibles o factibles, aquella que constituya la solución óptima.

Supuestos del Modelo PL:

Supuesto de proporcionalidad: En el modelo lineal, los insumos para la realización de una actividad, así como los efectos económicos que esta produce, ya sea en términos de ganancia ocosto u otra valoración económica cualquiera, siempre son proporcionales al nivel de actividad

Ejemplo 1: *Si producir una unidad de producto j se demora una hora en la máquina A, entonces según el supuesto de proporcionalidad producir 5 unidades de producto j en la maquina A, demorará 5 horas.*

Supuesto de aditividad: El efecto económico total que se obtiene, así como el total de cada recurso utilizado como resultado de la ejecución conjunta de las actividades, debe ser igual a las sumas respectivas de las cantidades resultantes de la ejecución de cada actividad.

Ejemplo 2*: Si las ganancias por las ventas de un producto A (X_1) es de \$5.00 y las ganancias de la venta de un producto B (X_2) es de \$3.00, entonces si vendo un producto A y otro B, (X_1+X_2) obtengo \$8.00 de ganancias.*

2.3. PROCEDIMIENTO PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL MODELOS (PL).

Paso 1: Definición de las variables de decisión.

Las variables de decisión deben definirse tanto conceptual como dimensionalmente y en muchos casos también de forma temporal.

Para la definición conceptual de una variable es necesario tomar en consideración cuatro principios de unicidad (***de origen, de destino, de tecnología y de coeficiente económico***)

Principio de Unicidad de origen: Significa que de existir productos con orígenes diferentes debe ser utilizada másde una variable para su representación.

Ejemplo 3a): *Si se conoce que el producto j puede ser elaborado en la Planta A o en la Planta B, entonces será necesario definir las variables como sigue:*

X_1*: Unidades a producir del producto j en la Planta A.*

X_2*: Unidades a producir del producto j en la Planta B.*

Principio de Unicidad de destino. Este principio indica que se deben diferenciar las variables según el destino de los productos que éstas representan.

Ejemplo 3b): *Si continuamos con el mismo ejemplo anterior y tenemos en cuenta que el mismo producto j puede estar además destinado al consumo nacional y a la exportación, entonces tendremos que definir las variables del siguiente modo:*

X_1*: Unidades a producir del producto j en la Planta A para el consumo nacional.*

X_2*: Unidades a producir del producto j en la Planta A para la exportación.*

X_3*: Unidades a producir del producto j en la Planta B para el consumo nacional.*

X_4*: Unidades a producir del producto j en la Planta B para la exportación.*

Principio de Unicidad de estructura tecnológica. Este principio indica que debe ser considerada la tecnología utilizada para la producción de los productos y en caso de ser diferente deben definirse diferenciadamente las variables.

Ejemplo 3c): *Continuando con el ejemplo anterior, consideremos que en la Planta A se puede utilizar tecnología tradicional o tecnología moderna para la producción de los productos; por tanto, las variables deben quedar definidas como sigue:*

X_1*: Unidades a producir del producto j en la Planta A, con tecnología tradicional, para el consumo nacional.*

X_2*: Unidades a producir del producto j en la Planta B, con tecnología tradicional, para la exportación.*

X_3*: Unidades a producir del producto j en la Planta A, con tecnología moderna, para el consumo nacional.*

X_4*: Unidades a producir del producto j en la Planta A, con tecnología moderna, para la exportación.*X_5*: Unidades a producir del producto j en la Planta B, para el consumo nacional.*

X_6*: Unidades a producir del producto j en la Planta B, para la exportación.*

Principio de Unicidad de coeficiente económico. Este principio no es más que un resultado de los anteriores, ya que es muy probable que un producto, al variar su origen y/o destino y/o su estructura tecnológica, modifique su coeficiente económico, es decir su costo o ganancia.

En resumen, toda variable debe ser representativa de un producto o actividad con origen único, destino único, estructura tecnológica única y un coeficiente económico único, en función del marco del problema a resolver.

Otro aspecto a tener en cuenta es el referido a **la definición dimensional y temporal de las variables**.

La **definición dimensional** es muy importante, ya que se refiere a la unidad de medida en que debe ser expresada la variable.

La **definición temporal** sólo es necesaria cuando todos los datos no están expresados en la misma unidad de tiempo y por tanto se hace necesario definir la variable en el tiempo y ser consecuente con esa definición durante todo el planteamiento del modelo.

Paso 2: Construcción de la función objetivo.

Respecto a la construcción de la función objetivo deben señalarse 3 aspectos que resultan de vital importancia a la hora de plantear la función objetivo de cualquier modelo de programación lineal:

- En la función objetivo deben aparecer todas las variables definidas en el modelo, aún cuando éstas tomen valor cero.
- Esta expresa el objetivo económico que se persigue con la solución del modelo, ganancia, costo, etc. y su dirección, ya sea, máximo o mínimo.
- El coeficiente Cj adapta la dimensión de la variable de decisión al criterio económico que expresala función objetivo.

Para culminar con aspectos referidos a la construcción de los modelos lineales, debe quedar bien claro al estudiante el carácter lineal del modelo, por lo cual **no es posible nunca** tanto en el sistema de restricciones como en la función objetivo, incluir variables en el denominador pues se perdería la linealidad del modelo.

Paso 3: Construcción del sistema de restricciones.

Primeramente debe destacarse que en el modelo sólo se plantearán como restricciones las que realmente constituyen limitantes al problema. Una vez establecido esto, se deben determinar las variables que deben incluirse en esa restricción, el signo que debe llevar la misma y los parámetros que están presentes en ella.

Debe tenerse cuidado con el aspecto dimensional con vistas a cumplir el supuesto de aditividad de todo modelo lineal, pues se hace necesario adaptar **la dimensión de la variable a la dimensión de la restricción**, la cual viene dada por el término independiente (bi). Esto se realiza mediante el llamado coeficiente de conversión (aij) que acompaña a la variable en la restricción.

- Otros aspectos importante es el signo de la restricción, que pueden ser: (≤, =, ≥).

Se utiliza (=) cuando en el término independiente (bi) se tiene un requisito exacto.

Si se plantea: **Cuando mucho**, significa (≤),

Ej. A es cuando mucho el doble de B (A ≤ 2B); (A – 2B ≤ 0)

Se utiliza (≥) cuando en el término independiente (bi) se expresa la cantidad mínima posible a utilizar, ya sea un requerimiento mínimo de un recurso determinado o una cota mínima de producción

Si se plantea: **Por lo menos**, significa (≥)

Ej. A es por lo menos el doble de B (A ≥ 2B); (A – 2B ≥ 0)

Se utiliza (=) cuando en el término independiente (bi) se tiene un requisito exacto.

- Al multiplicar una desigualdad por -1 el sentido de la desigualdad se invierte.

Ej. A sea por lo menos tan grande como (B – 2) (A ≥ B – 2) (A - B ≥ – 2) (B – A ≤ 2)

- Para convertir una desigualdad a igualdad solo hay que agregar o restar una variable (S) que llamaremos variable de holgura.

Ej. B menos A es como máximo 2 $(B – A \leq 2)$ es igual que $(B – A + S = 2)$

Ej. B menos A es como mínimo 2 $(B – A \geq 2)$ es igual que $(B – A - S = 2)$

Ej. B menos 2A es como mínimo 0 $(B – 2A \geq 0)$ es igual que $(B – 2A - S = 0)$

- Restricción de No negatividad: la PL requiere que todas las variables sean positivas (+), no tiene sentido una solución que sea producir -2 productos, o contratar – 3 empleados.

De tener un problema en que se requiera que sea una variable negativa, lo que se hace es representar esa variable negativa por dos variables positivas

Ej. C (variable negativa) = A – B (variables positivas)

2.5. MÉTODO DE SOLUCIÓN GRÁFICO:

Como su nombre lo indica, el método gráfico es un procedimiento que permite obtener la solución o soluciones óptimas a un modelo de programación lineal a través del uso de representaciones gráficas

Existen dos procedimientos diferentes para determinar la solución óptima a partir de la región de soluciones factibles, y que denomina respectivamente: de prueba – error, y a través de líneas de indiferencia.

Pasos para determinar la solución óptima de un modelo lineal a través del Método Gráfico:

1. Representar gráficamente, en un eje cartesiano cada una de las restricciones asociadas al modelo lineal y **determinar el semiespacio generado** por cada una de ellas.

2. Determinar la región de soluciones posibles o factible, y **los puntos extremos**. Para ello debe determinarse el conjunto de puntos que corresponde a la intersección de los semiespacios generados por cada restricción en el punto anterior. Al respecto debe observar, que si esta región existe, queda inscrita en el primer cuadrante del eje cartesiano, en la región de soluciones posibles. Dentro de este conjunto deben determinarse los puntos extremos.

3. Determinar el punto geométrico que corresponde con la solución óptima. Para ello se puede utilizar uno de los siguientes procedimientos:

4. Determinar los posibles puntos óptimos. Estos se corresponden con los puntos extremos del conjunto de soluciones posibles, y **evaluar (sustituyendo) con ellos la función objetivo.** Seleccionar aquel que ofrece un mejor valor para la función objetivo.

5. Trazar la familia de rectas que representa a la función objetivo, y seleccionar como óptimo, a aquel punto de la región que corresponde al mejor valor de ella.

6. En cualquiera de los procedimientos utilizados debe hacerse notar que si más de un punto ofrece el mismo valor extremal para la función objetivo, entonces se tiene una **solución óptima alterna y existen infinitas soluciones óptimas.**

A fin de consolidar sus conocimientos le proponemos

Hallar gráficamente la solución al siguiente modelo de Programación lineal:

$X_1, X_2 \geq 0$

$-2X_1 + X_2 \leq 5$ Restricción 1

$4X_1 + 5X_2 \leq 40$ Restricción 2

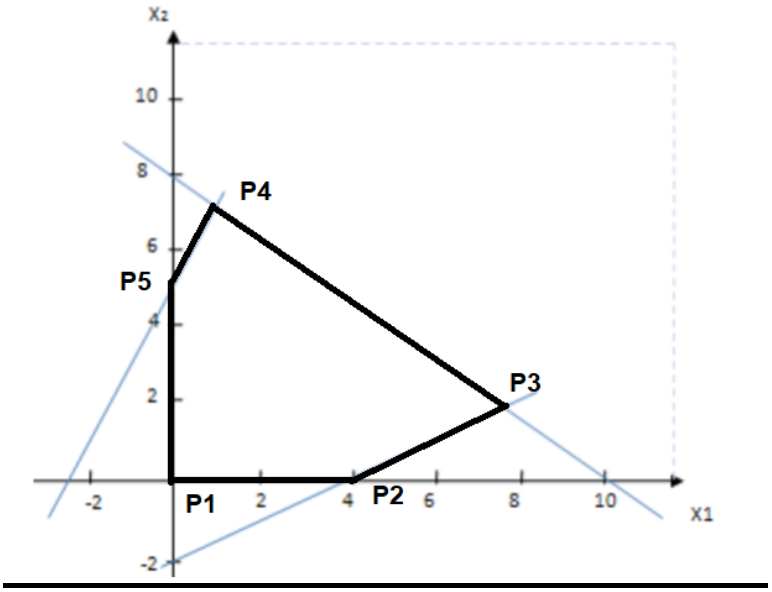
$X_1 - 2X_2 \leq 4$ Restricción 3

$MAX\ Z = 6X_1 + 5X_2$ Función objetivo

Paso1. Representación gráfica de las restricciones y determinación de semiespacios generados.

Restricciones	**Interceptos con los ejes de coordenadas**
$-2x_1 + X_2 \leq 5$	(0, 5) y (-2.5, 0)
$4X_1 + 5X_2 \leq 40$	(0, 8) y (10, 0)
$X_1 - 2X_2 \leq 4$	(0, -2) y (4, 0)

Figura 1-Representación gráfica de las restricciones



Paso 2. Encontrar los Puntos extremos, en este ejemplo ilustrativo los puntos serían:

P1: (0, 0); **P2**: (4,0); **P3**: (7.69, 1.8) (Se obtiene de simultanear las restricciones 2 y 3)

P4: (1.07, 7.14) (Se obtiene de simultanear las restricciones 1 y 2); **P5**: (0, 5)

Paso 3. Procedimiento prueba-error. Evaluando estos puntos en la función objetivo, se tiene:

Z1 = 6 (0) + 5(0) = 0

Z2 = 6 (4) + 5(0) = 24

Z3 = 6 (7.69) + 5(1.8) = 55.14

Z4 = 6 (1.07) + 5(7.14) = 42.12

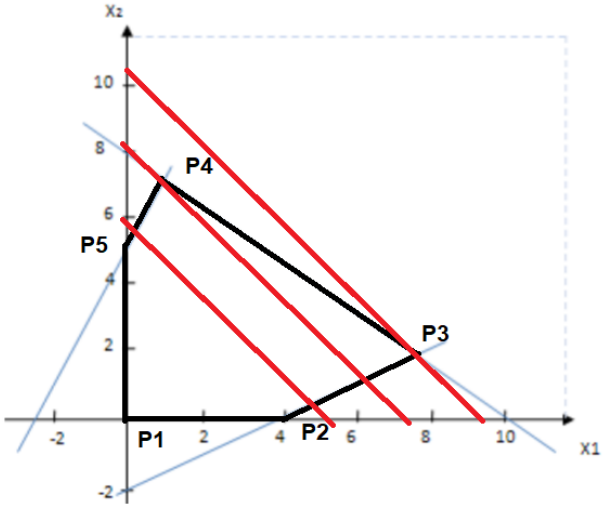
Z5 = 6 (0) + 5(6) = 30

Siendo la función objetivo Maximizante, debe observarse que el punto P3 proporciona el mayor valor de la función objetivo (55.14), y por esto la solución óptima al modelo es X1 = 1.8 y X2 = 7.69 .

El método gráfico tiene otro procedimiento Línea de indiferencia, que consiste la representación gráfica de Z .

Para trazar una de las rectas que representa a la familia de Z asígnele un valor arbitrario cualquiera. Para facilitar el cálculo y la representación gráfica en este caso se consideró Z1 = 30, con lo cual sus interceptos son (0,6) y (5,0). El resto de las posibles soluciones de Z son paralelas a esta línea de indiferencia, y la solución óptima es aquella que toca uno de los puntos y que esté más alejada del origen.

Figura ' -Representación gráfica de las lineas de indiferencia



Cuando gráficamente la función objetivo se superpone con una de las líneas de restricción del conjunto de soluciones posibles estamos en presencia de un tipo especial de solución llamada **Solución óptima alterna**, y ello significa que existen infinitas soluciones óptimas para el problema en cuestión

El método gráfico tiene como limitante que solo se puede emplear cuando existen dos variables decisión o esenciales

Propiedades básicas de la solución al problema de Programación Lineal.
Estas propiedades se expresan en los siguientes Teoremas
Teorema 1. El conjunto M de soluciones posibles a un problema de Programación Lineal constituye un **conjunto convexo**, siempre que no sea vacío.
Teorema 2. Si el problema de Programación Lineal posee una solución óptima, la función objetivo alcanza su valor óptimo (máximo ó mínimo) en al menos un punto extremo del conjunto M de soluciones posibles.
Teorema 3. Los puntos extremos del conjunto convexo M de soluciones posibles se corresponden con las soluciones posibles básicas al problema de Programación lineal y viceversa.
Teorema 4. Si el conjunto M de soluciones posibles es no vacío y la función objetivo está superiormente acotada (en problema de máximo), existe al menos una solución óptima.
Teorema 5. Si el conjunto M de soluciones posibles es cerrado y la función objetivo toma su valor óptimo en más de un punto extremo, entonces la totalidad de las soluciones óptimas resulta de la combinación convexa de las soluciones posibles básicas óptimas.

2.6. MÉTODO DE SOLUCIÓN SIMPLEX.

El Método Simplex es un método analítico iterativo de solución de problemas de programación lineal capaz de resolver modelos más complejos que los resueltos mediante el método gráfico sin restricción en el número de variables.
Este famosísimo método fue creado en el año de 1947 por el estadounidense George Bernard Dantzig y el ruso Leonid Vitalievich Kantorovich, con el ánimo de crear un algoritmo capaz de solucionar problemas de m restricciones y n variables.
Como estudiamos anteriormente
Este modelo puede ser siempre transformado de forma tal que el sistema de restricciones esté constituido solo por ecuaciones lineales. Esta transformación puede ser llevada a cabo de una forma muy simple introduciendo algunas variables adicionales, las cuales se denominan

Tipo de desigualdad	Tipo de variable que aparece
≤	+ holgura
≥	- exceso + artificial
=	+ artificial

Desde el punto de vista dimensional, la variable de holgura adopta la dimensión de la restricción en que se encuentra, esto es, si la restricción representa disponibilidad en Kg. de materia prima K, la variable de holgura representa la diferencia entre la disponibilidad y lo que se debe utilizar de esa materia prima, a partir de los valores que toman las variables en la solución optima.

Dado el siguiente modelo de Programación Lineal añadir las variables de hogura y artificiales

$$4X_1 + 7X_2 + 5X_3 \leq 400$$
$$2X_1 + X_2 \geq 50$$
$$2X_1 + 4X_2 + 5X_3 = 310$$
$$X_j \geq 0 \qquad J = 1, 2, 3$$
$$MAX\ Z = 2X_1 + 5X_2 + 3X_3$$

$$4X_1 + 7X_2 + 5X_3 + X_4 = 400$$
$$2X_1 + X_2 - X_5 + X_6 = 50$$
$$2X_1 + 4X_2 + 5X_3 + X_7 = 310$$
$$X_j \geq 0 \qquad J = 1, \ldots, 7$$
$$MAX\ Z = 2X_1 + 5X_2 + 3X_3 + 0X_4 + 0X_5 - WX_6 - WX_7$$

Criterio de optimalidad

Para Maximizar: si para todos los vectores a_{ij} se tiene que $(Zj - Cj) \geq 0$

Para Minimizar: si para todos los vectores a_{ij} se tiene que $(Zj - Cj) \leq 0$

2.6.1 INTERPRETACIÓN ECONÓMICA DE LA SOLUCIÓN ÓPTIMA UTILIZANDO LA TABLA SIMPLEX

- Si las variable esenciales toma valor positivo indicará la cantidad que se producirá del producto. Si toma valor cero indicará la no producción del producto.
- Si la variable de holgura se añade a una restricción cuyo signo es ≤ su valor indica la cantidad subutilizada del recurso (o la demanda insatisfecha del producto).
- Si la variable de holgura se añade a una restricción cuyo signo es ≥ su valor indica la cantidad sobre utilizada del recurso (o la sobre producción del producto).
- Por último el valor de la función objetivo Z_j así como su interpretación económica, que puede ser un mínimo de costo ó un máximo de ganancia

Ejemplo

Considere el siguiente modelo de programación lineal y su iteración óptima.
Se pide realizar la interpretación de la solución.

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$
$$12X_1 + 6X_2 + 2X_3 \leq 6400 \quad \text{Horas del Departamento Mezclado}$$
$$X_1 + 10X_2 + 2X_3 \leq 2000 \quad \text{Horas del Departamento Condensado}$$
$$4X_1 + X_2 \geq 1600 \quad \text{Horas del Departamento Secado}$$
$$2X_1 + X_2 + X_3 \geq 1200 \quad \text{Horas del Departamento Envasado}$$
$$MIN\ Z = 10X_1 + 50X_2 + 20X_3 \quad (\textbf{COSTO})$$

Donde se definen las siguientes Variables de decisión:

X_1: Unidades de producto A a producir al año.
X_2: Unidades de producto B a producir al año.
X_3: Unidades de producto C a producir al año.

Iteración óptima

Base		Cj	10	50	20	0	0	0	0
C_B	Variables	X_B	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
0	X6	400	0	1	0	1/2	0	1	1
0	X5	1100	0	19/2	0	3/8	1	0	11/4
10	X1	500	1	½	0	1/8	0	0	1/4
20	X3	200	0	0	1	-1/4	0	0	-3/2
	Z_j		10	5	20	-15/4	0	0	-55/4
	Z_j-C_j		0	-45	0	-15/4	0	0	-55/4

A partir de la información que proporciona la Tabla simplex correspondiente a la iteración optima se realiza la interpretación de la solución optima al modelo como sigue:

Interpretación del vector solución.

Las decisiones óptimas asociadas a la situación descrita a partir de la Tabla simplex son:

$X_1 = 500$ Producir 500 unidades de producto A al año.
$X_2 = 0$ No producir el producto B.
$X_3 = 200$ Producir 200 unidades de producto C al año.
$X_4 = 0$ Utilizar el total de horas disponibles en el Dpto. Mezclado. (Recurso Crítico).
$X_5 = 1100$ Utilizar 900 horas del total disponible en el Dpto. Condensado (Dejar de utilizar o subutilizar 1100 horas).
$X_6 = 400$ Utilizar 2000 horas en el Dpto. Secado. (Utilizar 400 horas por encima de las 1600 horas establecidas como mínimo).
$X_7 = 0$ Utilizar las 1200 horas establecidas como mínimo en el Dpto. Envasado. (Recurso crítico).
$Z = 9000$ Al aplicar estas decisiones se alcanzará un costo mínimo de 9000 unidades monetarias.

2.7 MÉTODO DE SOLUCIÓN CON PAQUETES INFORMÁTICOS (EXCEL, SOLVER, WINQS)

2.7.1. SOLUCIÓN CON LA APLICACIÓN SOLVER.

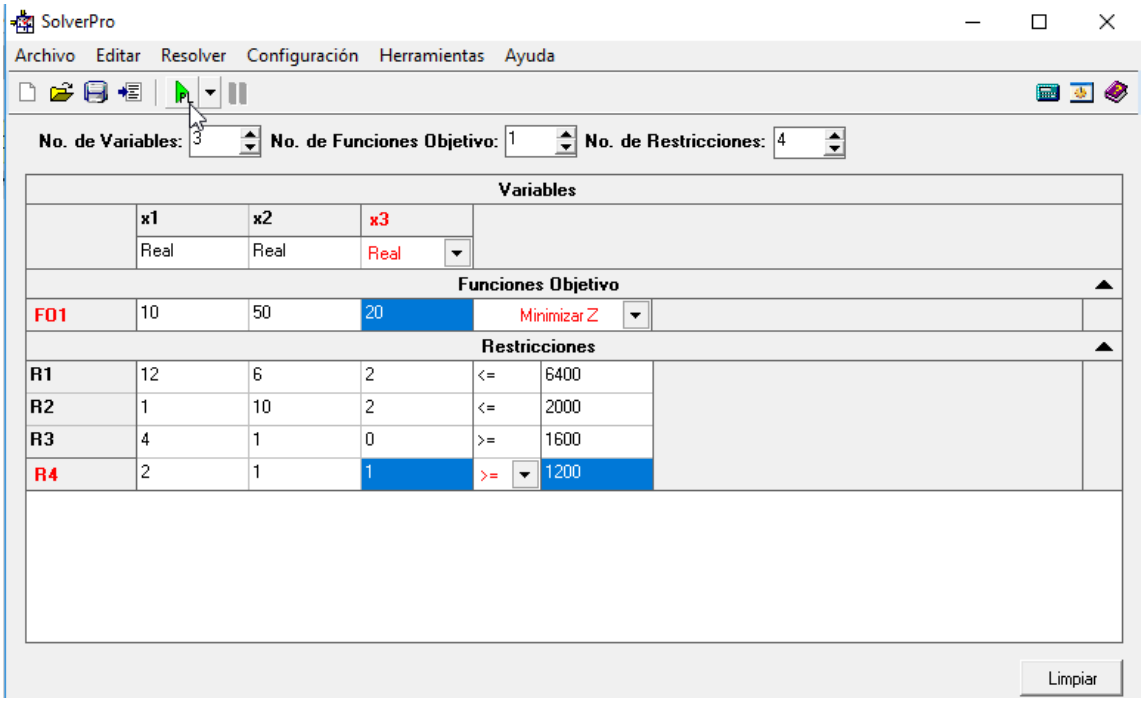
Ejemplo

Considere el siguiente modelo de programación lineal y su iteración óptima. Se pide realizar la interpretación de la solución.

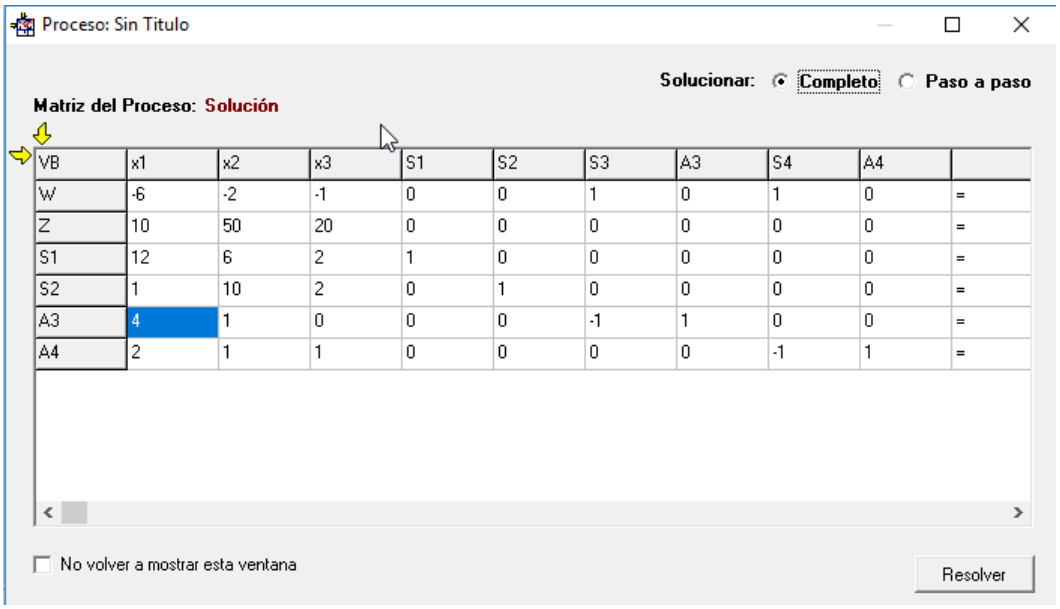
$$X_1,\ X_2,\ X_3 \geq 0$$

$$12X_1 + 6X_2 + 2X_3 \leq 6400 \quad \text{Horas del Departamento Mezclado}$$
$$X_1 + 10X_2 + 2X_3 \leq 2000 \quad \text{Horas del Departamento Condensado}$$
$$4X_1 + X_2 \geq 1600 \quad \text{Horas del Departamento Secado}$$
$$2X_1 + X_2 + X_3 \geq 1200 \quad \text{Horas del Departamento Envasado}$$
$$\text{MIN } Z = 10X_1 + 50X_2 + 20X_3 \quad (\textbf{COSTO})$$

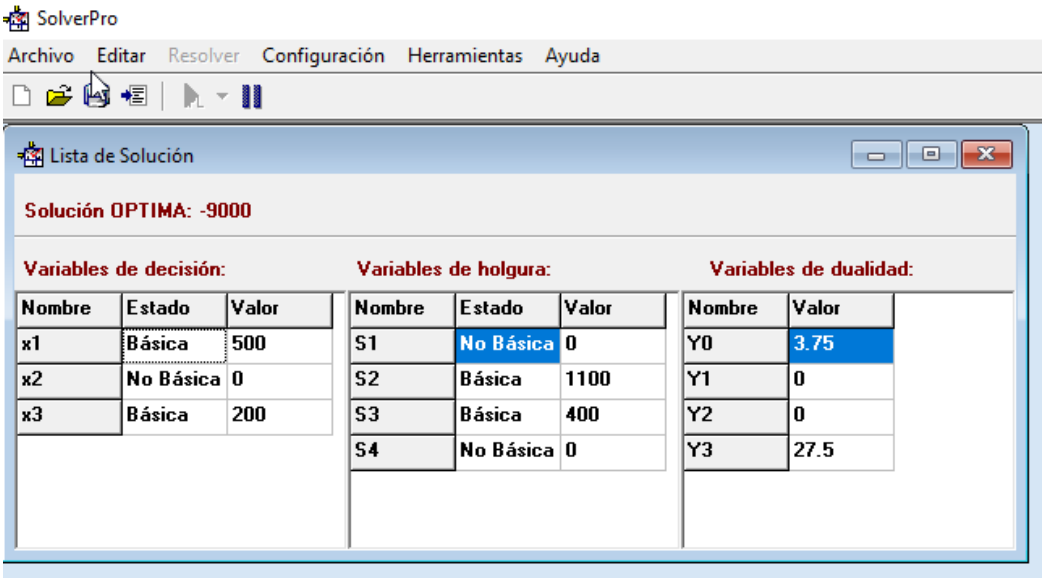
Comenzamos introduciendo los datos de la matriz algebraica.



Una vez que se introducen los datos corremos la aplicación



En el cuadro de dialogo seleccionamos que tipo de solución deseamos en este caso Solucionar y damos clic en resolver



Nombre	Estado	Valor
x1	Básica	500
x2	No Básica	0
x3	Básica	200

Nombre	Estado	Valor
S1	No Básica	0
S2	Básica	1100
S3	Básica	400
S4	No Básica	0

Nombre	Valor
Y0	3.75
Y1	0
Y2	0
Y3	27.5

Obtenemos los resultados de la solución óptima

Donde se definen las siguientes Variables de decisión:

X_1: Unidades de producto A a producir al año.

X_2: Unidades de producto B a producir al año.

X_3: Unidades de producto C a producir al año.

Solución: producir **500** unidades del producto A; no producir el B y producir **200** unidades del C.

Como la R1 es de **≤** el resultado **0** indica que **no queda tiempo disponible**, se consume todas las horas del departamento de mezclado (6400) **(recurso crítico).**

Como la R2 es de **≤** el resultado **1100** indica que **quedan disponible 1100** h del departamento de condensado, solo se consumieron de las 2000 h 900 h.

Como la R3 es de **≥** el resultado **400** indica **utilizar 400 por encima de las 1600 h** disponible computándose 2000 horas en el departamento de secado

Como la R4 es de **≥** el resultado **0** indica **utilizar todas las horas**, del departamento de envasado o sea las 1200 h **(recurso crítico)**

2.7.2. SOLUCIÓN CON LA APLICACIÓN EXCEL.

Excel tiene el complemento Solver, ver videos adjunto a esta conferencia.

2.7.3. SOLUCIÓN CON EL PROGRAMA WINQSB (QUANTITATIVE SYSTEM FOR BUSSINES) PARA WINDOWS INTERPRETACIÓN DE LA TABLA DE SALIDA.

A continuación se ilustra con algunas imágenes, los principales elementos de su MENU para el uso de la programación lineal, la forma implícita de entrada de datos y una tabla de salida correspondiente a la solución del modelo.

Tabla 1- Datos iniciales del modelo

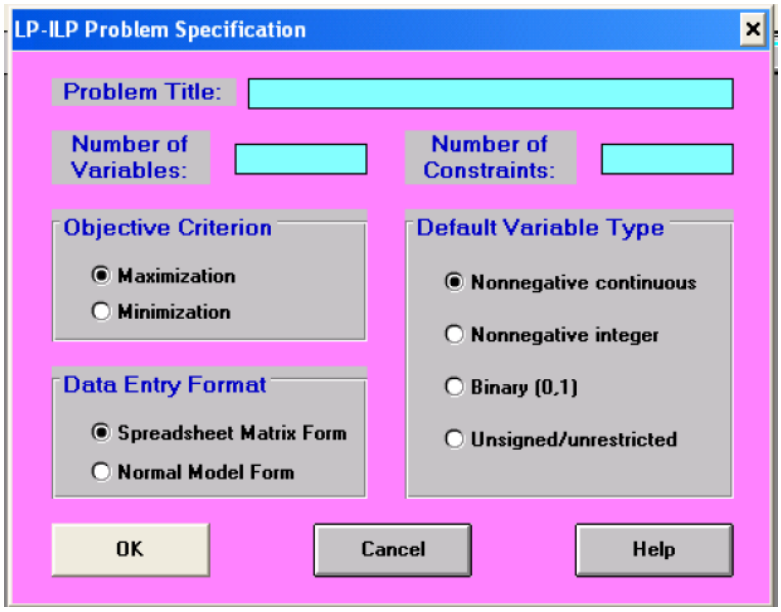


Tabla 2- Forma en que se introducen los datos concretos del modelo

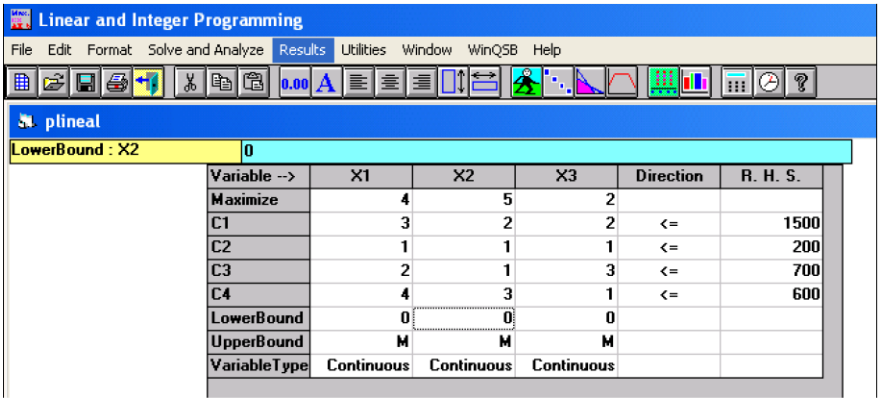


Tabla 3- Tabla de salida con la solución óptima al modelo

	12:23:19		Thursday	May	08	2008		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	500,0000	10,0000	5.000,0000	0	basic	-M	40,0000
2	X2	0	50,0000	0	45,0000	at bound	5,0000	M
3	X3	200,0000	20,0000	4.000,0000	0	basic	5,0000	M
	Objective	Function	(Min.) =	9.000,0000				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	6.400,0000	<=	6.400,0000	0	-3,7500	5.600,0000	7.200,0000
2	C2	900,0000	<=	2.000,0000	1.100,0000	0	900,0000	M
3	C3	2.000,0000	>=	1.600,0000	400,0000	0	-M	2.000,0000
4	C4	1.200,0000	>=	1.200,0000	0	27,5000	1.066,6670	1.600,0000

Como puede apreciarse, la Tabla de salida consta de 2 partes, una referida a las variables de decisión del modelo (Decision variable) y otra referida a las restricciones (Constraint).

En la primera columna de la 1ra parte de la tabla, denominada Decision Variable, aparecen las variables de decisión y a continuación en la columna Solution Value, se muestra el valor que toman en la solución óptima, esto es: X1 = 500, X2= 0 y X3 = 200, valores que por supuesto son los mismos ya vistos en la solución obtenida con la Tabla Simplex.

En el centro de la Tabla aparece una fila identificada por Objective Function y a continuación (Min.) = 9000, lo cual indica directamente el valor óptimo de la función objetivo.

En la 2da. Parte de la Tabla, la primera columna denominada Constraint identifica a las restricciones que aparecen con la letra C y un número que indica el número de la restricción tal como aparecen en el modelo.

Recuerde que para resolver el modelo de programación lineal, a cada restricción que corresponde a una desigualdad se le agrega una variable de holgura. Por tanto:

A la restricción identificada con C1, le corresponde la variable de holgura X4

A la restricción identificada con C2, le corresponde la variable de holgura X5

A la restricción identificada con C3, le corresponde la variable de holgura X6

A la restricción identificada con C4, le corresponde la variable de holgura X7

El valor óptimo que toman esas variables aparece en la columna 5, identificada por Slack or Surplus, pudiendo identificarse que:

X4 = 0, X5 = 1100, X6= 400, y X7= 0, los cuales por supuesto coinciden con los valores que se vieron en la Tabla simplex de la iteración óptima.

La interpretación ya fue realizada con anterioridad con los resultados de la Tabla simplex, pero esto se hizo con fines ilustrativos, de manera que sirva de base para la comprensión de la interpretación y su relación con la Tabla de salida.

2.8. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD.

La Tabla de salida que proporciona el WINQSB permite hacer el análisis de sensibilidad, pues ésta proporciona directamente los intervalos de variación tanto de los Cj como de los bi.

Los intervalos de variación para los coeficientes de la función objetivo se toman de las 2 últimas columnas de la Tabla, identificadas por Allowable Min. (cj) (que indica el valor mínimo que puede tomar el coeficiente) y Allowable Máx. (cj)), (que indica el valor máximo que puede tomar el coeficiente) correspondientes a las filas que identifican a las variables de decisión, teniendo en este caso que:
Los Intervalos de variación admisibles para los coeficientes de la función objetivo (costos de producción) son los siguientes:
Producto A…… (-M, 40)

Producto B……. (5, M)

Producto C…… (5, M)

Donde M identifica un número muy grande. Si aparece con signo negativo, o sea, (-M), esto indica un número muy pequeño y con signo positivo indica que es un número muy grande.

Nótese que para el producto A el limite inferior es –M, el cual es un limite matemático, sin embargo, **dado que este coeficiente representa costo, no se puede tener un costo negativo, por tanto, el limite inferior del intervalo es 0.** En el caso de los productos B y C, el intervalo indica que los coeficientes puede aumentar sin limite.

Si el nuevo coeficiente se mantiene entre estos intervalos puede afirmarse que se mantiene la solución óptima hallada, y solo se tendrá afectaciones en el valor de la función objetivo. Si la variación excede al intervalo, se afecta la solución óptima hallada y entonces se recomienda recalcular la solución óptima al modelo.

Intervalos de variación admisibles de los términos independientes (correspondientes a restricciones de recursos, demanda, etc.):

Horas del Departamento Mezclado……. (5600, 7200)
Horas del Departamento Condensado…… (900, M)
Horas del Departamento Secado …… (0, 2000)
Horas del Departamento Envasado……. (1 066.66, 1600)

Nótese que en el intervalo que corresponde a las Horas del Dpto. de Secado, aunque en la Tabla de salida aparece un –M, se ha tomado el valor 0 como límite inferior al intervalo, por la misma razón señalada anteriormente.

Si el cambio que se produce en el valor del termino independiente se mantiene dentro de su intervalo, puede decirse que conviene producir los productos que indica la solución óptima, aunque el valor de las variables se modificará en dependencia de si se dispone de más o de menos recurso.

Para hallar la solución óptima en esas condiciones se recomienda recalcular de nuevo la solución óptima.

Por ejemplo, si las Horas del Dpto. de Mezclado, disminuyen hasta 5600 o aumentan hasta 7200, esto significa que conviene seguir produciendo los productos A y C, aunque pueden varían sus cantidades en dependencia de la disponibilidad de Horas en el Dpto.

Si la variación en las horas cae fuera del intervalo puede ya no ser conveniente producir los productos A y/o C, por lo que se afecta completamente la solución, la cual hay que recalcular.

2.9. EL PROBLEMA DUAL

Todo problema de PL está asociado con un problema complementario llamado dual, al problema original se le llama problema primal, si el problema primal trata de maximizar el problema dual será minimizar.

Por ejemplo si un fabricante tiene dos recursos disponibles R_1 y R_2 los que pueden usarse para producir diferentes productos A y B de acuerdo a las siguientes reglas

$$A+B \leq 3 \text{ (recursos } R_1)$$

$$4A + 2B \leq 8 \text{ (recursos } R_2) \text{ y } \quad A \text{ y } B \geq 0$$

Maximizar Z = 3.5 A + 2.5 B

El problema primal es cuantos productos A y B fabricar para maximizar las ganancias.

Entonces el problema dual es a que precio mínimo se deben venderse los recursos R_1 y R_2 para obtener la misma ganancia, en lugar de cogerlos para producir los productos A y B,

Representando ambos problemas en forma matricial tenemos:

Consideremos el siguiente modelo de programación lineal al que llamaremos Problema Primal.

$$MAX\ Z = C\ X$$

$$A\ X \leq b$$

$$X \geq 0$$

Asociado a este problema primal existe otro problema de programación lineal, llamado Problema Dual, el cual se define de la forma siguiente:

$$MIN\ V = b^T\ Y$$

$$A^T\ Y \geq CT$$

$Y \geq 0$

Denotándose las variables esenciales del dual con la letra Y.

A partir de los planteamientos Primal y Dual se puede identificar la correspondencia entre dicho modelos como sigue:

PROBLEMA PRIMAL		PROBLEMA DUAL
Coeficientes de la Función Objetivo	⟺	Términos independientes
Términos independientes	⟺	Coeficientes de la Función objetivo
Matriz de coeficientes	⟺	Matriz de coeficientes transpuesta
Función Objetivo Máximo	⟺	Función Objetivo Mínimo
Restricciones	⟺	Variables esenciales
Variables esenciales	⟺	Restricciones

A partir de la definición de los problemas primal y dual y su correspondencia se observa que:

- A cada restricción del primal le corresponde una variable esencial del dual, por tanto el modelo dual tendrá tantas variables esenciales como restricciones tiene el modelo primal.
- A cada variable esencial del primal le corresponde una restricción del dual, por tanto, el modelo dual tendrá tantas restricciones como variables esenciales tenga el primal.
- En el Primal, la función objetivo es de Máximo y todas las restricciones son de**.**
- La función objetivo del dual es de Mínimo y todas las restricciones tienen signo de **≥.**

Todos estos elementos deben ser tenidos en cuenta cuando se vaya a plantear el dual de un problema primal dado.

Además, debe destacarse que, entre las variables del primal y el dual existen las siguientes relaciones:

PROBLEMA PRIMAL		PROBLEMA DUAL
Variables esenciales	⟺	Variables de holgura
Variables de holgura	⟺	Variables esenciales

Nótese que en este caso:
La función objetivo del Primal es de Mínimo y todas las restricciones tienen signo de **≥**

La función objetivo del Dual es de Máximo y todas las restricciones tienen signo de **≤**

La dualidad se sustenta en un conjunto de Teoremas de los cuales solo se hará referencia a algunos de ellos:

- El dual del dual es el primal.
- Si el primal tiene una solución óptima y el dual también, entonces, el valor óptimo de la función objetivo del primal es igual al valor óptimo de la función objetivo del dual.
- Si una variable de holgura del primal toma valor positivo en la solución óptima, la variable esencial del dual que le corresponde toma valor cero en la solución óptima del dual.
- Si una variable esencial toma valor positivo en la solución óptima del primal, entonces la variable de holgura del dual que le corresponde toma valor cero en la solución optima del dual. Esto significa que la restricción del dual se cumple como igualdad

Ejemplo: continuemos con el ejemplo que se esta desarrollando:

Ejemplo

El ejemplo que se presenta a continuación permite ilustrar la forma de plantear el dual a partir del primal. Utilizaremos para ello el planteamiento del modelo de programación lineal correspondiente a Ejemplo 12.

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

$12 X_1 + 6 X_2 + 2 X_3 \leq 6400$ Horas del Departamento Mezclado

$X_1 + 10 X_2 + 2 X_3 \leq 2000$ Horas del Departamento Condensado

$4 X_1 + X_2 \geq 1600$ Horas del Departamento Secado

$2 X_1 + X_2 + X_3 \geq 1200$ Horas del Departamento Envasado

MIN $Z = 10 X_1 + 50 X_2 + 20 X_3$ (**COSTO**)

Donde se definen las siguientes Variables de decisión:

X_1: Unidades de producto A a producir al año.

X_2: Unidades de producto B a producir al año.

X_3: Unidades de producto C a producir al año.

Dado que el problema primal tiene una función objetivo de Mínimo, para plantear el Dual primeramente es necesario Homogeneizar el sistema de restricciones, pues todas deben tener signo de >=. Para ello se multiplica por (-1) las restricciones 1 y 2, quedando el sistema de restricciones como sigue:

$- 12 X1 - 6 X2 - 2 X3 \geq - 6400$

$- X1 - 10 X2 - 2 X3 \geq - 2000$

$4 X1 + X2 \geq 1600$

$2 X1 + X2 + X3 \geq 1200$

Dado que se tienen 4 restricciones en el primal, entonces el dual tendrá 4 variables esenciales, las cuales se asocian a las restricciones de la forma siguiente:

Variables duales		**Restricciones**
Y_1	⟶	$- 12 X1 - 6 X2 - 2 X3 \geq - 6400$
Y_2	⟶	$- X1 - 10 X2 - 2 X3 \geq - 2000$
Y_3	⟶	$4 X1 + X2 \geq 1600$
Y_4	⟶	$2 X1 + X2 + X3 \geq 1200$

Entonces el Dual queda planteado de la siguiente forma:

$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \geq 0$

$-12 Y_1 - Y_2 + 4 Y_3 + 2 Y_4 \leq 10$ (Producto A)

$- 6 Y_1 - 10 Y_2 + Y_3 + Y_4 \leq 50$ (Producto B)

$- 2 Y_1 - 2 Y_2 + Y_4 \leq 20$ (Producto C)

Max $V = - 6400 Y_1 - 2000 Y_2 + 1600 Y_3 + 1200 Y_4$

En nuestro curso las variables duales van a ser definidas en forma general de la manera siguiente:

Variable esencial dual:

Yi = Efecto económico (Costo o Ganancia) calculada/ unidad de recurso i

Variable de holgura dual:

Yj= Diferencia entre el efecto económico calculado y el real/unidad de producto j

El valor óptimo de las variables duales.

Y_1 : Costo calculado por Hora del Dpto. de Mezclado
Y_2 : Costo calculado por Hora del Dpto. de Condensado
Y_3 : Costo calculado por Hora del Dpto. de Secado
Y_4 : Costo calculado por Hora del Dpto. de Envasado
Y_5 : Diferencia entre el costo calculado y real del Producto A
Y_6 : Diferencia entre el costo calculado y real del Producto B
Y_7 : Diferencia entre el costo calculado y real del Producto C

La relación que se establece entre las variables primales y duales es la siguiente:

	Primal	Dual	
Variables Esenciales	X_1	Y_5	Variables de Holgura
	X_2	Y_6	
	X_3	Y_7	
Variables de Holgura	X_4	Y_1	Variables Esenciales
	X_5	Y_2	
	X_6	Y_3	
	X_7	Y_4	

Los valores de las variables esenciales y de holgura del dual en la solución óptima se obtienen directamente de la Tabla de salida con la solución óptima del problema primal, la cual para este problema se presentó en la Tabla 5 y que se reproduce a continuación:

Ejemplo Tabla de salida

	12:23:19		Thursday	May	08	2008		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c[j]	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c[j]	Allowable Max. c[j]
1	X1	500,0000	10,0000	5.000,0000	0	basic	-M	40,0000
2	X2	0	50,0000	0	45,0000	at bound	5,0000	M
3	X3	200,0000	20,0000	4.000,0000	0	basic	5,0000	M
	Objective	Function	(Min.) =	9.000,0000				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	6.400,0000	<=	6.400,0000	0	-3,7500	5.600,0000	7.200,0000
2	C2	900,0000	<=	2.000,0000	1.100,0000	0	900,0000	M
3	C3	2.000,0000	>=	1.600,0000	400,0000	0	-M	2.000,0000
4	C4	1.200,0000	>=	1.200,0000	0	27,5000	1.066,6670	1.600,0000

Como ya fue visto con anterioridad al interpretar la solución óptima de este modelo, las líneas correspondientes a la columna Constraint se corresponden con cada una de las restricciones del modelo, habiéndose definido que:

A la restricción identificada con C1, le corresponde la variable de holgura X4
A la restricción identificada con C2, le corresponde la variable de holgura X5
A la restricción identificada con C3, le corresponde la variable de holgura X6
A la restricción identificada con C4, le corresponde la variable de holgura X7

Los valores que aparecen en la columna identificada por Shadow Price indican directamente los valores de las variables esenciales del dual. Teniendo en cuenta la relación entre variables primales y duales previamente establecidas puede entonces establecerse que:

Y1 = 3.75
Y2 = 0
Y3 = 0
Y4 = 27.5

Nótese que aunque en la Tabla de salida aparece -3.75 como valor para la variable Y1, se toma como positivo el valor de la variable dual. La presencia de signo negativo en el valor de la variable dual sucede en ocasiones y es debido a la forma en que se programa el algoritmo computacional con que se da solución al problema de programación lineal.

Los valores para las variables de holgura se toman directamente de la columna Reduced Cost que aparece en la primera parte de la Tabla, la cual esta referida a las variables esenciales del modelo primal. Por las relaciones entre las variables primales y duales, entonces puede establecerse que:

Y5 = 0
Y6= 45
Y7 = 0

El valor óptimo para la función objetivo del dual y el primal coinciden y es 9000.00.

Por ejemplo, cuando se realizó la interpretación de la solución óptima del modelo primal se pudo determinar que la solución implica utilizar todas las horas disponibles en el departamento de Mezclado, siendo éste un recurso crítico, y que limita la solución obtenida. Si se dispusiera de una hora adicional en el Dpto. de Mezclado ¿Qué efecto tiene sobre la función objetivo, o sea, se aumenta o no el costo total? Respuesta a esta pregunta la proporciona el valor de la variable dual correspondiente a esta restricción, la cual es: Y1 = 3.75, lo que se interpreta diciendo que cada hora adicional en el Dpto. de Mezclado implica un incremento en 3.75 en el costo total, lo cual se explica por el hecho de que al disponer de una hora adicional puede lograrse un incremento en la producción, lo que trae aparejado un incremento en el costo. Debe destacarse que ese efecto es el que se obtiene incrementando en 1 hora ese recurso manteniendo el resto constante, pero debe destacarse que el número de horas a incrementar para el cual es válido ese efecto esta limitado por el intervalo superior de variación para ese bi tal como se vio en el análisis de sensibilidad

Por otra parte, el valor que toman las variables de holgura del dual permite fundamentar si es o no conveniente la producción de un producto. Veamos el análisis que se puede realizar por el dual.

En este ejemplo la solución óptima indica que conviene producir el producto A. La restricción dual correspondiente a este producto es:

$$-12\ Y_1 - Y_2 + 4\ Y_3 + 2\ Y_4 \leq 10 \quad \text{Producto A}$$

Agregando la variable de holgura se tiene:

$$-12\ Y_1 - Y_2 + 4\ Y_3 + 2\ Y_4 + Y_5 = 10$$

Sustituyendo en la restricción el valor de las variables esenciales duales se tiene que:

$$-12\ (3.75) - (0) + 4\ (0) + 2\ (27.5) + (0) = 10$$

Al sustituir los valores la restricción se cumple como igualdad, pero nótese que en este caso el valor de la variable de holgura es cero. Esto permite verificar lo planteado en el siguiente Teorema que sustenta la dualidad: Si una variable esencial toma valor positivo en la solución óptima del primal, entonces la variable de holgura del dual que le corresponde toma valor cero en la solución óptima del dual.

Por otra parte la solución óptima indica que no resulta conveniente producir el producto B. La restricción dual correspondiente a este producto es la siguiente:

$$-6\ Y_1 - 10\ Y_2 + Y_3 + Y_4 <= 50 \quad \text{(Producto B)}$$

La cual al agregar la variable de holgura se convierte en:

$$-6\ Y_1 - 10\ Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_6 = 50$$

Sustituyendo los valores se tiene:

$$-6\ (3.75) - 10\ (0) + (0) + (27.5) + (45) = 50$$

Nótese que la variable de holgura del dual para esa restricción toma un valor diferente de cero, por lo que se incumple lo planteado en el teorema anteriormente señalado, lo cual indica que no resulta conveniente la producción del producto B.

CONCLUSIONES

En esta Conferencia se han establecido las bases teóricas fundamentales de la técnica cuantitativa conocida como Programación Lineal. Se definió el tipo de problema que puede ser resuelto utilizando esta técnica, se presentó la formulación matemática del modelo de programación lineal y los supuestos correspondientes. El procedimiento para la construcción de modelos, al cual debe prestar atención especial en su estudio independiente.

También se estudiaron aspectos muy importantes en el marco de la programación lineal, referidos a los métodos que permiten determinar la solución óptima a un modelo, tanto en forma manual como mediante un paquete de programas para microcomputadora, la interpretación económica de la solución, el análisis de sensibilidad y la dualidad, todo lo cual amplía y evidencia las posibilidades que brinda el uso de esta técnica para la solución de problemas reales que se presentan en las empresas

ESTUDIO INDEPENDIENTE

Resolver los ejercicios de la próxima Clase Práctica

CARRERA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Asignatura: Investigación de operaciones Año: 3er.
Modalidad de estudio: Curso POR ENCUENTRO.

EJERCICIOS DE LA CLASE PRÁCTICA 1 PRIMERA PARTE

TEMA 1. Programación Lineal.

Ejercicio 1. En una MIPYME que está encadenada con la Fábrica de Cemento de Artemisa se reparan equipos ligeros y equipos pesados a la población, obteniendo $300 de utilidades por cada equipo ligero reparado y $400 por cada equipo pesado. Tienen la limitante que no se pueden reparar más de 300 equipo ligeros y no más de 200 equipos pesados. La MIPYME cuenta con 900 horas de tiempo disponible cada mes, mientras que el tiempo de reparar los equipos ligeros es de 2 horas y el de los pesados es de 3 horas. ¿Cuántos equipos ligeros y pesados deben repararse para maximizar las utilidades

Datos:

EQUIPOS	**LIGERO**	**PESADO**	**DISPONIBILIDAD**
utilidad	**300**	**400**	
restricción 1	**≤300**		
Restricción 2		**≤200**	
Restricción 3	**2 h**	**3h**	**≤900**

Paso 1: Definición de las variables de decisión.

X_1: Cantidad equipos ligeros que deben reparase.

X_2: Cantidad equipos pesados que deben reparase.

Paso 2: Construcción de la función objetivo.

Máx. $Z = 300X_1 + 400X_2$

Paso 3: Construcción del sistema de restricciones.

$X_1 \leq 300$ para equipos ligeros

$X_2 \leq 200$ para equipos pesados

$2X_1 + 3X_2 = 900$

$X_i \geq 0$ restricción de no negatividad, entero

Ejercicio 2. Unos grandes almacenes encargan a un fabricante pantalones y chaquetas deportivas. El fabricante dispone para la confección de 750 m de tejido de algodón y 1000 m de tejido de poliéster. Cada pantalón precisa 1 m de algodón y 2 m de poliéster, y cada chaqueta precisa 1,5 m de algodón y 1 m de poliéster. El precio del pantalón se fija en 50 $ y el de la chaqueta en 40 $. ¿Qué número de pantalones y chaquetas debe suministrar el fabricante a los almacenes para que éstos consigan una venta máxima?

Datos.

Artículos Restricciones	**Pantalones**	**Chaquetas**	**Disponibilidad**
Precio	**50 $**	**40 $**	
Algodón	**1 m**	**1.5 m**	**≤ 750**

Poliester	**2 m**	**1 m**	**≤ 1000**

Paso 1: Definición de las variables de decisión.

X_1: número de pantalones.

X_2: número de chaquetas

Paso 2: Construcción de la función objetivo.

Máx. $Z = 50X_1 + 40X_2$

Paso 3: Construcción del sistema de restricciones.

$X_1 + 1.5X_2 \leq 750$ para los pantalones

$2X_1 + X_2 \leq 1000$ para las chaquetas

$X_i \geq 0$ restricción de no negatividad, entero

Ejercicio 3. Una Cia. Minera internacional extrae mineral base de dos minas (A y B) .
El mineral de la mina A contiene como promedio 20% de Cobre, 20% de Zinc y 15% de Manganeso.
El mineral de la mina B contiene como promedio 30% de Cobre, 25% de Zinc y 10% de Manganeso.
Extraer una tonelada de mineral de la mina A cuesta $90 y de la mina B cuesta $120.
A la compañía minera le acaban de hacer un pedido y necesita entregar al menos 8 ton. de Cobre, al menos 6 ton de Zinc y al menos 5 ton de Manganeso con el menor costo posible**.**

Datos:

Minas	**A**	**B**	**Solicitud**
Costo	**$90**	**$120**	
Cu	**0.20**	**0.30**	**≥ 8 t**
Zinc	**0.20**	**0.25**	**≥ 6 t**
Mg	**0.15**	**0.10**	**≥ 5 t**

Paso 1: Definición de las variables de decisión.

X_1: Cantidad extraído de la mina A.

X_2: Cantidad extraído de la mina B.

Paso 2: Construcción de la función objetivo.

Min. $Z = 90X_1 + 120X_2$

Paso 3: Construcción del sistema de restricciones.

$0.20X_1 + 0.30X_2 \geq 8$ para el Cobre

$0.20X_1 + 0.25X_2 \geq 6$ para el Zinc

$0.15X_1 + 0.10X_2 \geq 5$ para el Manganeso

$Xi; \geq 0$ restricción de no negatividad

Ejemplo 4. (De mezcla Libro de texto "Métodos cuantitativos para la toma de decisiones en administración" pág. 162.)

Una MIYME que da servicio de limpieza prepara sus propias soluciones mezclando dos ingredientes para preparar una solución que tiene lo que considera de fosfato y cloruro. Un ingrediente tiene un 5% de

fosfato y 2% de cloruro y cuesta 25 cent/oz. El otro ingrediente tiene 7% de fosfato y 1% de cloruro y cuesta 20 cent/oz. La MIPYME necesita que la mezcla final tenga no más de 6% de fosfato y no más de 11/2% de cloruro. El objetivo es minimizar costos

Datos

Ingrediente	1	2	limitante
Costo (cent/oz)	25	20	
Restric. 1 Fosfato %	5	7	≤ 6
Restric. 2 Cloruro%	2	1	≤ 1 1/2
Restric. 3 Proporción	1	1	= 1

Paso 1: Definición de las variables de decisión.

X_1: onza del ingrediente 1 por onza de solución

X_2: onza del ingrediente 2 por onza de solución

Paso 2: Construcción de la función objetivo.

MÁX. $Z = 25 X_1 + 20 X_2$

Paso 3: Construcción del sistema de restricciones.

Restricción 1 $5 X_1 + 7 X_2 \geq 6$ para fosfato
Restricción 2 $2 X_1 + X_2 \geq 1.5$ para cloruro
Restricción 3 $X_1 + X_2 = 1$ conformación de la mezcla
Restricción 4 $Xi \geq 0$ $i = 1, 2$ $Xi \geq 0$ $i = 1, 2$ No negatividad de las variables

Ejemplo 5. (De mezcla Libro de texto "Métodos cuantitativos para la toma de decisiones en administración" pág. 164.)

Una empresa cuenta con un fondo de inversión de $10 000 y existen dos proyectos A y B para invertir, para estar seguro se piensa que la inversión en el proyecto A no debe ser superior a 25% del total y debe ser por lo menos el 10%. En el proyecto B se quiere invertir por lo menos $4 000, Se estima que la tasa anual de rendimiento del proyecto A es de 10% y del proyecto B es de 8%. Cuanto se debe invertir el cada proyecto para maximizar las ganancias.

Proyecto	Proy. A (X_1)	Proy. B (X_2)	limitante
Tasa anual de rendimiento	10	8	
Presupuesto 1	1	1	≤ 10 000
Restricción 2	1		≤ 25%($X_1 + X_2$)
Restricción 3	1		≥ 10% ($X_1 + X_2$)
Restricción 4		1	≥ $4 000

Paso 1: Definición de las variables de decisión.

X_1: Dinero invertido en el proyecto A

X_2: Dinero invertido en el proyecto B

Paso 2: Construcción de la función objetivo.

MÁX. $Z = 10X_1 + 8X_2$

Paso 3: Construcción del sistema de restricciones.

Restricción 1 $X_1 + X_2 \leq 10\,000$ dinero máximo a invertir (fondo de inversión)
Restricción 2 $X_1 \leq 0.25 (X_1 + X_2)$ transformando se tiene
$X_1 \leq 0.25 X_1 + 0.25X_2$
$X_1 - 0.25 X_1 - 0.25X_2 \leq 0$
$0.75X_1 - 0.25X_2 \leq 0$
Restricción 3 $X_1 \geq 10\% (X_1 + X_2)$ transformando se tiene
$X_1 \geq 0.1X_1 + 0.1X_2$
$X_1 - 0.1X_1 - 0.1X_2 \geq 0$
$0.9X_1 - 0.1X_2 \geq 0$
Restricción 4 $X_2 \geq \$4\,000$
Restricción 5 $Xi \geq 0$ $i = 1, 2$ **No negatividad de las variables**

Ejercicio 6. Un fabricante de gasolina de avión vende dos clases de combustible A y B. El combustible A tiene un 25% de gasolina grado 1, un 25% de gasolina grado 2 y un 50% de gasolina grado 3. El combustible B tiene un 50% de gasolina grado 2 y otro 50% de gasolina grado 3. Dispone para producir 500 gl /h de gasolina grado 1 y de 200 gl/h respectivamente de la gasolina grado 2 y grado 3. Los costos son 30 centavos por litro la de grado 1, 50 centavos por litro la de grado 2 y 60 centavos por litro la de grado 3. El combustible A puede venderse a 75 centavos litro y el combustible B a 90 centavos el litro. ¿Qué cantidad debe producirse para obtener las mayores utilidades?

Datos.

Combustible	**A**	**B**	**Disponibilidad**	**Costo**
G 1º	**0.25**	**0.00**	**≤ 500**	**30 cent/l**
G 2º	**0.25**	**0.50**	**≤ 200**	**50 cent/l**
G 3	**0.50**	**0.50**	**≤ 200**	**60 cent/l**
Venta combustible	**75 cent/l**	**90 cent/l**		
Costo Combustible	**0.25(30) +0.25(50) +0.50(60) = 50**	**0.00(30) +0.50(50) +0.50(60) = 55**		
Utilidad	**75 -50 = 25**	**90 – 55 = 35**		

Paso 1: Definición de las variables de decisión.

X_1: cantidad de combustible A.

X_2: cantidad de combustible B.

Paso 2: Construcción de la función objetivo.

Máx. $Z = 25X_1 + 35X_2$

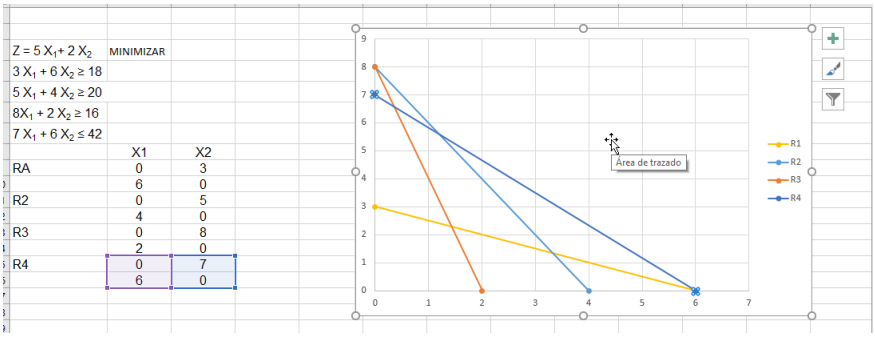
Paso 3: Construcción del sistema de restricciones.

$0.25X_1 \leq 500$ para la G 1º

$0.25X_1 + 0.50X_2 \leq 200$ para la G 2º

$0.50X_1 + 0.50X_2 \leq 200$ para la G 3º

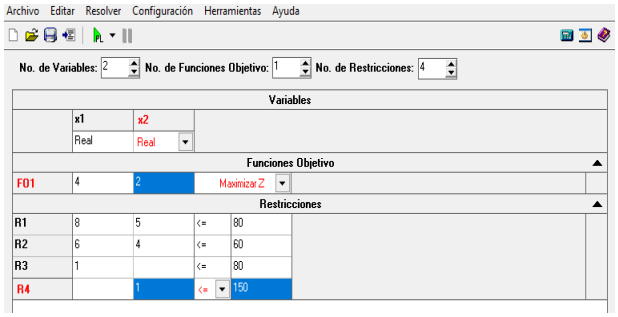
Ejercicio 7 Determine gráficamente la solución óptima al siguiente problema de programación lineal
MIN Z = 5 X_1+ 2 X_2 Sujeto a:
3 X_1 + 6 X_2 ≥ 18
5 X_1 + 4 X_2 ≥ 20
8X_1 + 2 X_2 ≥ 16
7 X_1 + 6 X_2 ≤ 42
X_1, X_2 ≥ 0
Solución
Ejercicio 1 X_1= 6; X_2= 0; Z= 30

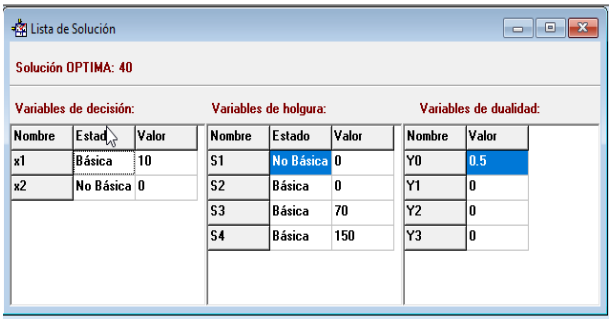


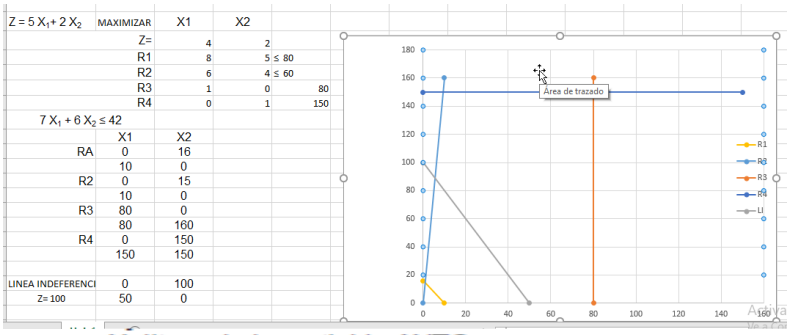
Ejercicio 8 La empresa ELINSEC fabrica dos tipos de insecticidas y cada uno requiere de una técnica diferente de fabricación. Cada litro de insecticida ANTO requiere 8 horas de mezclado, 6 horas de proceso y se obtiene una ganancia de $ 4.00. Cada litro de insecticida BENTO requiere 5 horas de mezclado, 4 horas de proceso y se obtiene una ganancia de $ 2.00. Se dispone de 80 horas para mezclado y 60 horas para proceso cada mes. Se ha pronosticado que la demanda mensual del insecticida ANTO no es más de 80 litros y para el BENTO no más de 150 litros.
a) Plantee el modelo de programación lineal correspondiente a la situación antes descrita si lo que se quiere es maximizar la ganancia.
b) Resuelva el problema por el método gráfico.

Solución

VARIABLES	X1 (ANTO)	X2 (BENTO)	DISPONIBLE
R1 MEZCLADO	8	5	≤ 80 HORAS
R2 PROCESO	6	4	≤ 60 HORAS
PRODUCCIÓN ANTO	X1	0	≤ 80
PRODUCCIÓN BENTO	0	X2	≤ 150
MAX Z	2	2	







X_1 litros de insecticida ANTO
X_2 Litros de insecticida BENTO

$8\ X_1 + 5\ X_2 \leq 80$ Horas de mezclado
$6\ X_1 + 4\ X_2 \leq 60$ (horas proceso)
$X_1 \leq 80$
$X_2 \leq 150$
MAX $Z = 4\ X_1 + 2\ X_2$ (GANANCIA)
Se deben producir 10 litros de insecticida ANTO, no se produce el insecticida BENTO y se logra una ganancia de $ 40

Ejercicio 9 Una fábrica elabora 2 tipos de envases, envases plásticos y envases de metal. Cada uno de ellos debe ser procesado en 2 máquinas diferentes. Una máquina tiene capacidad disponible 24 horas/día y la otra 16 horas/día. Cada envase de plástico requiere de 2 horas en cada máquina. Cada envase de metal necesita de 3 horas en la primera máquina y de 1 hora en la segunda. La ganancia que se obtiene es de $2 por envase de plástico y $1 por envase de metal. La fábrica puede vender tantos envases como pueda. El objetivo de la empresa es maximizar las ganancias. ¿Cuántas envases debe producir de cada tipo?

a) Plantee el modelo de programación lineal correspondiente a la situación antes descrita.

b) Resuelva el problema por el método gráfico.

Solución

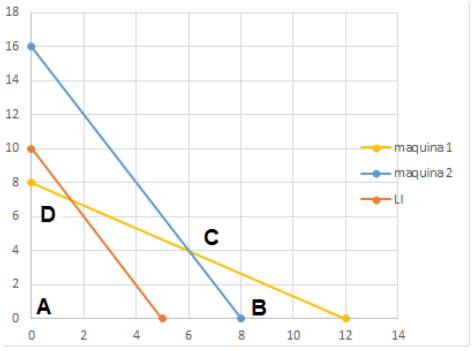
VARIABLES	X1 (plástico)	X2 (metal)	DISPONIBLE
R1 Máquina 1	2	3	≤ 24 HORAS
R2 Máquina 2	2	1	≤ 16 HORAS
MAX Z	$ 2	$ 1	

SOLUCIÓN

Variables: X_1 envases plásticos
X_2 envases de metal

F.O: MAX $Z = 2X_1 + X_2$

$2X_1 + 3X_2 \leq 24$
$2X_1 + X_2 \leq 16$
$X_1, X_2 \geq 0$



SOLUCIONES ACEPTABLES		
Z_A	= 2(0) + 1(0)	= 0
Z_B	= 2(8) + 1(0)	**= 16 S.O**
Z_C	= 2(6) + 1(4)	**= 16 S.O**
Z_D	= 2(0) + 1(8)	= 8

Respuesta: Producir 6 envases plásticos y 4 de metal con una ganancia de $ 16 otra solución puede ser producir 8 envases de plástico y ninguno de metal también con ganacia de $16.

Ejercicio 10 La Constructora Casas Ltda., se ha adjudicado la construcción de 100 casas. El contrato la obliga a construir dos tipos de casas. Para los beneficiarios las casas tienen el mismo costo, pero para la Constructora Casas, éstas tienen un margen de utilidad diferente, así las casas tipo campo arrojan $ 5 100 y las de tipo rancho $ 5 000. El contrato obliga a entregar las casas dentro de los nueve meses de firmado el contrato. Otra información relevante se resume en la siguiente tabla:

Recurso por tipo de casa		Disponibilidad de horas	
Campo	Rancho		
200	100	12000	Carpintero
210	120	16800	Albañil

a) Formule el problema de programación lineal.
b) Encuentre la solución óptima gráficamente.

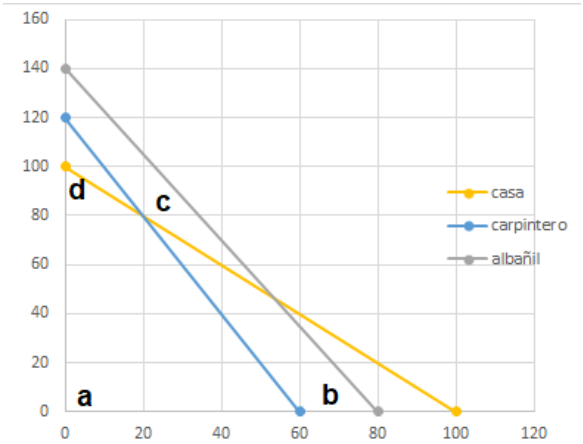
SOLUCIÓN

Variable: X_1 casa campo
X_2 casa rancho

F.O: MAX Z = 5 100 X_1 + 5000 X_2

Restricciones

$X_1 + X_2 = 100$
$200\ X_1 + 100\ X_2 \leq 12\ 000$ carpintero
$210\ X_1 + 120\ X_2 \leq 16\ 800$ albañil
$X_1, X_2 \geq 0$



SOLUCIONES ACEPTABLES		
Z_s	= 5100(0) + 5000(0)	= 0
Z_b	= 5100(60) + 5000(0)	= 306 000
Z_c	= 5100(20) + 5000(80)	**= 502 000 S.O**
Z_d	= 5100(0) + 5000(100)	= 500 000

Respuesta Se deben construir 20 casa de campo y 80 tipo rancho obteniéndose una ganancia de $ 502 000

TEMA 2 PROGRAMACIÓN LINEAL CLASE PRACTICA 2 SEGUNDA PARTE

Ejercicio 5

Considere el siguiente problema de programación lineal

$$\text{MAX } Z = 20X_1 + 25X_2 + 30X_3 + 10X_4$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeto a: } & 5X_1 + 3X_2 + 4X_3 + 5X_4 \leq 1400 \\ & 2X_1 + 4X_2 + 3X_3 + 5X_4 \leq 1200 \\ & 1.5X_1 + 2X_2 + X_3 + 4X_4 \geq 500 \\ & 3X_1 + 4X_2 + 6X_3 + 5X_4 \geq 1100 \\ & X_j \geq 0 \qquad j=1....4 \end{aligned}$$

Se pide:

a) Agregue las variables necesarias para lograr una solución básica inicial donde B= I
b) Construya la tabla simplex correspondiente a la iteración cero.
c) Diga si la solución del inciso anterior es óptima. Justifique su respuesta.
d) Si la solución hallada en el inciso c) no es óptima, determine el vector que entra a la base y el vector que sale de la base

Solución

a) Solución básica inicial (X_5, X_6, X_9, X_{10}) X_B = (1400; 1200; 500; 1100)

b) Iteración Cero

	Base	Cj	20	25	30	10	0	0	0	0	-w	-w
CB	Variables	XB	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
0	X_5	1400	5	3	4	5	1	0	0	0	0	0
0	X_6	1200	2	4	3	5	0	1	0	0	0	0
-w	X_9	500	1.5	2	1	4	0	0	-1	0	1	0
-w	X_{10}	1100	3	4	6	5	0	0	0	-1	0	1
	Zj - Cj	Z= -1600w	-4.5w -20	-6w-25	-7w-30	-9w-10	0	0	w	w	0	0

c) La solución hallada no es la óptima, todos los Zj – Cj tienen que ser ≥ que 0 para que sea la óptima. No se cumple el criterio de optimalidad.
d) Vector que entra a_4
Vector que sale a_9

Ejercicio 6

Dado el siguiente modelo de programación lineal

$$\text{Min } Z \quad 50X_1 + 25X_2 + 40X_3 + 25X_4 \text{ (GANANCIA)}$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} & 3X_1 + 4X_2 + 3X_3 + 5X_4 \leq 1700 \text{ kg de materia prima B} \\ & X_1 + X_2 + 5X_3 + 8X_4 \leq 1150 \text{ horas en el equipo H} \\ & 3X_1 + 4X_2 + 6X_4 \geq 500 \text{ kg de materia prima F} \\ & X_1 + X_2 + X_3 + 6X_4 \geq 500 \text{ producción total mínima.} \\ & X_j \geq 0 \qquad j=1\ldots4 \end{aligned}$$

Se pide:

a) Agregue las variables necesarias para lograr una solución básica inicial.
b) Construya la tabla simplex correspondiente a la iteración cero
c) Determine el vector entrante y el vector saliente

Solución

a) Solución básica inicial (X_5, X_6, X_9, X_{10}) X_B = (1700; 1150; 500; 500)

b) Iteración Cero

	Base	Cj	50	25	40	25	0	0	0	0	-w	-w
CB	Variables	XB	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
0	X_5	1700	3	4	3	5	1	0	0	0	0	0
0	X_6	1150	1	1	5	8	0	1	0	0	0	0
-w	X_9	500	3	4	0	6	0	0	-1	0	1	0
-w	X_{10}	500	1	1	1	6	0	0	0	-1	0	1
Zj - Cj		Z= 1000w	4w-50	5w-25	w - 40	12w- 25	0	0	-w	-w	0	0

c) La solución hallada no es la óptima, todos los Zj – Cj tienen que ser ≤ que 0 para que sea la óptima. No se cumple el criterio de optimalidad.

d) Vector que entra a_4
Vector que sale a_9 o a_{10}

Ejercicio 7

Dado el siguiente modelo de Programación Lineal y su iteración óptima, y donde

X_j - unidades a elaborar de los productos I, II y III

$$12X_1 + 6X_2 + 2X_3 \leq 320 \text{ horas del departamento A}$$
$$X_1 + 10X_2 + 2X_3 \leq 100 \text{ horas del departamento B}$$
$$4X_1 + X_2 + \geq 80 \text{ horas del departamento C}$$
$$2X_2 + X_2 + X_3 \geq 60 \text{ horas del departamento D}$$

$$X_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3$$

$$\text{MIN } Z = 10X_1 + 50X_2 + 20X_3 \quad \text{(costo)}$$

Personal Offer

Iteración Optima

BASE		C_J	10	50	20	0	0	0	0
C	X_B	X_B	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
0	X_6	20	0	1	0	1/2	0	1	1
0	X_5	55	0	19/2	0	3/8	1	0	11/4
10	X_1	25	1	1/2	0	1/8	0	0	1/4
20	X_3	10	0	0	1	-1/4	0	0	-3/2
Z_j - C_j			0	-45	0	-15/4	0	0	-55/2

a. Calcule el valor de la función objetivo y diga su significado económico.
b. Analice el vector solución
c. Diga cuántas horas se utilizaron en el departamento C
d. Si se incrementa en 1 hora el recurso horas del departamento A, cómo se ve afectado el vector solución y la función objetivo.
e. Cuál será el efecto sobre las horas sobre utilizadas en el departamento
C, por disminuir en 10 las horas del departamento A y disminuir en 15 las horas en el departamento D, simultáneamente.

Solución:

a. Z = 0(20) + 0(55) + 10(25) + 20(10) = 450 Costo Total Mínimo.
b. X_1 = 25 se elaborarán 25 unidades de producto I
X_2 = 0 no se elaborará el producto II
X_3 = 10 se elaborarán 10 unidades de producto III
X_4 = 0 utilización plena de las horas del departamento A
X_5 = 55 55 horas subutilizadas en el departamento B
X_6 = 20 20 horas sobre utilizadas en el departamento C
X_7 = 0 utilización total del mínimo de horas en el departamento D

Ejercicio 8
Una fábrica de ropa produce tres líneas de productos: trusas, sacos y vestidos para señoras. Definiendo las variables de decisión X1, X2 y X3, que representan la cantidad de lotes de trusas, de sacos y vestidos para señora a fabricar, respectivamente, se ha formulado el siguiente modelo de programación lineal:

$$MAXZ = 400X_1 + 200X_2 + 300X_3 \text{ (Ganancia)}$$

$4X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 16$ cortadores
$X_1 + 2X_2 + 2X_3 \leq 41$ máquinas de coser
$X_1 + X_2 + X_3 \leq 20$ empacadores

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$
Y su solución óptima obtenida utilizando el paquete computacional WIN QSB aparece en la tabla 1:

Tabla 1

Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
X1	0	400.00	0	-800.00	at bound	-M	1200.00
X2	0	200.00	0	-400.00	at bound	-M	600.00
X3	16.00	300.00	4800.00	0	basic	100.00	M
Objective	Function	(Max.) =	4800.00				
Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
C1	16.00	<=	16.00	0	300.00	0	20.00
C2	32.00	<=	41.00	9.00	0	32.00	M
C3	16.00	<=	20.00	4.00	0	16.00	M

a) ¿Es posible despedir cortadores o empacadores manteniendo el nivel de producción? ¿Cuántos?
b) La ganancia por lote de trusas puede ser aumentada a $ 500 o en $ 850, ¿cuál debe ser la actitud de la empresa? ¿Cómo cambia la solución óptima?

Solución

a) Los cortadores no se pueden despedir, pues se utilizan todos. Se pueden despedir 4 empacadores y se mantiene el nivel de producción.
b) Si la ganancia por metro de trusa aumenta a 500 no sucede nada a la solución óptima. Si aumenta en 850 (400 + 850 = 1250) si se afecta la solución óptima, pues solo puede aumentar hasta 1200. La actitud de la empresa debe ser aumentar a 500.

Ejercicio 9

Una empresa de productos electrónicos fabrica teléfonos celulares.
El objetivo es determinar cuántas unidades del producto se debe vender por sector para maximizar la utilidad total (diferencia entre ganancia total y costo total) de la empresa. Definiendo las variables de decisión X1, X2 y X3 como segmento A, segmento B, segmento C respectivamente, el modelo de programación lineal es el siguiente:

$$MAX \quad Z = 80X_1 + 52X_2 + 76X_3$$

$$10X_1 + 18X_2 + 8X_3 \leq 5\,000 \text{ publicidad}$$
$$2.5X_1 + 3X_2 + 1.5X_3 \leq 1\,200 \text{ horas de venta}$$
$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 600 \text{ capacidad máxima de producción}$$
$$Xi \geq 0 \quad j = 1,2,3$$

a) La empresa no sabe si gastar $500 más en publicidad o aumentar la capacidad de producción en 20 unidades. La empresa no quiere variar la base óptima. Aconseje usted que debe hacer la empresa.
b) Si la empresa decidiera contratar más personal para aumentar la disponibilidad en el tiempo de venta ¿Sería conveniente? ¿Por qué?
c) La empresa sabe que el sector A está reclamando por el valor del celular, pero no quiere perderlos como clientes. ¿Hasta qué precio estaría dispuesto a rebajar el valor del celular?
d) Si la empresa quiere disminuir los gastos de publicidad sin variar la base óptima. ¿Cuánto es lo máximo que podría ahorrar?

Y su solución óptima obtenida utilizando el paquete computacional WIN QSB aparece en la tabla 2:

Tabla 2

Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
X1	100.00	80.00	8000.00	0	basic	76.00	95.00
X2	0	52.00	0	-44.00	at bound	-M	96.00
X3	500.00	76.00	38000.00	0	basic	64.00	80.00
Objective	Function	(Max.) =	46000.00				
Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
C1	5000.00	<=	5000.00	0	2.00	4800.00	5400.00
C2	1000.00	<=	1200.00	200.00	0	1000.00	M
C3	600.00	<=	600.00	0	60.00	520.00	625.00

Solución

a) La empresa no debe gastar 500 más en publicidad, pues solo puede aumentar la publicidad hasta 5400. La capacidad de producción puede aumentar a 20 u y la base óptima no varia. Se le aconseja a la empresa que aumente la capacidad de producción.

b) Si decidiera aumentar la disponibilidad en el tiempo de venta seria conveniente matemáticamente, pues no se afectaría la solución óptima hallada, pero económicamente esto no le reportaría nada, pues la ganancia se mantendría igual y a las empresas lo que les interesa es aumentar sus ganancias.

c) Estaría dispuesto a rebajar hasta $76.

d) Podría ahorrar solo $ 200. Se puede disminuir a $ 4800.

Ejercicio 10

Considere el siguiente modelo de programación lineal:

$$Máx.Z=8X_1 + 14X_2 + 30X_3 + 50X_4$$

$$X_1 + 2X_2 + 10X_3 + 16X_4 \leq 800 \quad \text{Disponibilidad de Materia Prima en Kgs.}$$
$$1.5X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 5X_4 \leq 1000 \quad \text{Minutos del Equipo Principal}$$
$$0.5X_1 + 0.6X_2 + X_3 + 2X_4 \leq 340 \quad \text{Horas-Hombre}$$
$$X_j \geq 0 \quad j=1,4$$

Donde: X_1: cantidad de ladrillos de tipo 1 a producir
X_2: cantidad de ladrillos de tipo 2 a producir
X_3: cantidad de ladrillos de tipo 3 a producir
X_4: cantidad de ladrillos de tipo 4 a producir

Y su solución óptima obtenida utilizando el paquete computacional WIN QSB aparece en la tabla 3:

Tabla 3

Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
X1	400.00	8.00	3200.00	0	basic	7.00	9.82
X2	200.00	14.00	2800.00	0	basic	11.89	16.00
X3	0	30.00	0	-28.00	at bound	-M	58.00
X4	0	50.00	0	-40.00	at bound	-M	90.00
Objective	Function	(Max.) =	6000.00				
Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
C1	800.00	<=	800.00	0	5.00	666.67	1000.00
C2	1000.00	<=	1000.00	0	2.00	800.00	1050.00
C3	320.00	<=	340.00	20.00	0	320.00	M

Con esta información a usted se le pide:

a) Interprete económicamente la solución óptima indicando que ladrillos conviene producir y en qué cantidades, así como la ganancia que se obtendría con esa producción.
b) Diga cuáles son los recursos críticos e interprete el valor que toma la variable X_7.
c) Plantee la primera restricción del dual y fundamente mediante el dual la razón por la cual no resulta conveniente producir ladrillos del tipo 4.
d) Si las horas Hombres disminuyen a 300 horas. ¿Se afectaría la optimalidad de la actual solución hallada?

Solución

a) Conviene producir 400 ladrillos tipo 1
Conviene producir 200 ladrillos tipo 2
Con esta producción se obtendría una ganancia de $ 6000.

b) Recursos críticos
- Disponibilidad de materia prima
- Minutos en el equipo principal

X7 = 20 Se subutilizan 20 horas - hombre

c) Primera restricción de dual $Y1 + 1.5\ Y2 + 0.5\ Y3 \geq 8$
X4 → Y7 = 40 como hay diferencia entre la ganancia calculada y la real por cantidad de ladrillos tipo 4 a producir, no conviene su producción.

d) Si se afecta la optimalizad, pues las horas hombres solo pueden disminuir a 320.

Ejercicio 11

Considere el siguiente modelo de programación lineal:

$$\text{MIN } Z = 2X_1 + 3X_2 + 5X_3 + 6X_4 + 5X_5 \text{ (Costo)}$$

Sujeto a:

$$0.15X_1 + 0.2X_2 + 0.12X_3 + 0.1X_4 + 0.18X_5 \leq 1020 \text{ (Minutos Equipo Principal)}$$
$$0.04X_1 + 0.05X_2 + 0.03X_3 + 0.05X_4 + 0.025X_5 \leq 900 \text{ (Kgs de hojalata)}$$
$$0.02X_1 + 0.018X_2 + 0.015X_3 + 0.02X_4 + 0.016X_5 \leq 300 \text{ (Litros de laca)}$$
$$X_1 \geq 1500 \text{ (Producción mínima envases A)}$$
$$X_2 + X_3 \geq 2500 \text{ (Producción mínima envases B)}$$
$$X_4 + X_5 \geq 1800 \text{ (Producción mínima envases C)}$$

Donde:

X_1 -> Envases tipo A para el consumo nacional
X_2 -> Envases tipo B para el consumo nacional
X_3 -> Envases tipo B para la exportación
X_4 -> Envases tipo C para el consumo nacional
X_5 -> Envases tipo C para la exportación

Y su solución óptima obtenida utilizando el paquete QSB aparece en la tabla 4. Con esta información se le pide:

a) A partir de la solución óptima diga que envases conviene producir y en que cantidades así como el costo total que implica esa producción. Señale además la utilización de recursos que esta solución implica.
b) Plantee el dual correspondiente
c) Diga el valor de la segunda variable esencial del dual y su significado económico
d) Diga el valor de la cuarta variable de holgura del dual y su significado económico
e) Fundamente mediante el dual la razón par la cual no resulta conveniente la producción del envase B para la exportación
f) Diga en cuánto puede disminuir el costo del envase A para el consumo nacional. ¿Considera usted que en la práctica el costo de ese producto puede disminuir hasta el extremo inferior del intervalo?
g) Si el costo del envase C para la exportación fuera realmente de 6.5 ¿Se afectaría la solución óptima hallada? ¿Por qué?
h) Determine un valor apropiado para la disminución del costo del envase C para el consumo nacional que no implique cambio en los tipos de producto que recomienda la solución óptima
i) Determine en cuánto puede disminuir o aumentar los minutos en el equipo principal.
j) ¿Que efecto tendría sobre la solución óptima hallada la disminución en 300 del requerimiento mínimo de producción del envase A para el consumo nacional?
k) Si se aumenta en 1000 la producción mínima de envases tipo C. Se afectaría el plan de producción que implica la solución óptima.

Tabla 4

Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
X1	1500.00	2.00	3000.00	0	basic	-1.88	M
X2	2500.00	3.00	7500.00	0	basic	-2.50	4.00
X3	0	5.00	0	1.00	at bound	4.00	M
X4	362.50	6.00	2175.00	0	basic	5.00	7.00
X5	1437.50	5.00	7187.50	0	basic	4.00	6.00
Objective	Function	(Min.) =	19862.50				
Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
C1	1020.00	<=	1020.00	0	-12.50	905.00	1049.00
C2	239.06	<=	900.00	660.94	0	239.06	M
C3	105.25	<=	300.00	194.75	0	105.25	M
C4	1500.00	>=	1500.00	0	3.88	1306.67	2266.67
C5	2500.00	>=	2500.00	0	5.50	2355.00	3075.00
C6	1800.00	>=	1800.00	0	7.25	1638.89	2950.00

Solución

a) Conviene producir

X1 - Envase tipo A para el consumo nacional = 1500 e

X2 - Envases tipo B para el consumo nacional = 2500 e

X4 - envases tipo C para el consumo nacional = 362.50 e

X5 - Envases tipo C para la exportación = 1437.5 e

Se obtiene un costo total mínimo de $19862.50

Se consumen 1020 minutos en el equipo principal (X6)

Se consumen 239.06 kilogramos de hojalata (X7)

Se consumen 105.25 litros de laca (X8)

Se producen 1500 envases de A (X9)

Se producen 2500 envases de B (X10)

Se producen 1800 envases de C (X11)

b)
$$
\begin{aligned}
-0.15Y_1 - 0.04Y_2 - 0.02Y_3 + Y_4 &\le 2\\
-0.2Y_1 - 0.05Y_2 - 0.018Y_3 + Y_5 &\le 3\\
-0.12Y_1 - 0.03Y_2 - 0.015Y_3 + Y_5 &\le 5\\
-0.1Y_1 - 0.05Y_2 - 0.02Y_3 + Y_6 &\le 6\\
-0.18Y_1 - 0.025Y_2 - 0.016Y_3 + Y_6 &\le 5
\end{aligned}
$$

Max $V = -1020Y_1 - 900Y_2 - 300Y_3 + 1500Y_4 + 2500Y_5 + 1800Y_6$

c) $Y_2 = 0$ Costo calculado por kilogramo de hojalata

d) $Y_{10} = 0$ Diferencia entre el costo calculado y el costo real por unidad de producto tipo C para el consumo nacional.

e) Como toma un valor diferente de cero (1.00) la variable de holgura del DUAL eso significa que en el primal no conviene producir los envases tipo C para la exportación.

f) Puede disminuir en $3.88.

En la práctica no tiene sentido el intervalo inferior de variación, pues el costo no puede ser negativo y de producirse el producto tendría algún costo.

g) Si se afectaría la solución óptima hallada, este costo solo puede aumentar hasta $6.00 sin que se afecte la optimalidad.

h) El valor apropiado de disminución es $1.00 para que no cambie la solución óptima

i) Los minutos en el equipo principal solo pueden disminuir en 115 minutos y aumentar en 29 minutos sin que se afecte la optimalidad de la solución.

j) Se afectaría la optimalidad de la actual solución pues esta solo puede disminuir en 193.33

k) No se afecta la optimalidad de la solución hallada pues esta puede aumentar en 1150.

Ejercicio 12

Considere el siguiente modelo de programación lineal:

MAX $Z = 2X_1 + 3X_2 + X_3 + 2X_4 + X_5$ (Ganancia)

Sujeto a:

$$4X_1 + 5X_2 + 3X_3 + 3X_4 + X_5 \leq 4000 \quad \text{(Minutos Equipo Principal)}$$
$$2X_1 + X_2 + 0.5X_3 + 1.2X_4 + 0.8X_5 \leq 1040 \quad \text{(Kgs de Fibra Nacional)}$$
$$4X_1 + 3X_2 + 2X_3 + X_4 + 2X_5 \leq 3000 \quad \text{(Kgs de Fibra importada)}$$
$$X_1 + X_2 \geq 200 \quad \text{(Producción mínima Tejido A)}$$
$$X_3 \geq 800 \quad \text{(Producción mínima Tejido B)}$$
$$X_4 + X_5 \geq 300 \quad \text{(Producción mínima Tejido C)}$$

Donde:

X_1-> Metros de Tejido A para el consumo nacional
X_2-> Metros de Tejido A para la exportación
X_3-> Metros de Tejido B para el consumo nacional
X_4-> Metros de Tejido C para el consumo nacional
X_5-> Metros de Tejido C para la exportación

Y su solución óptima obtenida utilizando el paquete QSB aparece en la tabla 5. Con esa información se le pide:

a) Interprete económicamente la solución óptima indicando que tejidos conviene producir y en que cantidades, así como la ganancia que se obtendría con esa producción
b) Diga la utilización de los recursos.
c) Plantee el dual correspondiente.
d) Fundamente mediante el dual la razón por la cual no resulta conveniente la producción del tejido A para el consumo nacional
e) Diga como se afectaría la solución óptima si se incrementa en 60 la disponibilidad de la fibra nacional
f) ¿En cuanto tendría que aumentar la ganancia por metro del Tejido A destinado al consumo nacional para que fuese conveniente su producción?
g) Si la ganancia por metros del Tejido B para el consumo nacional fuese cero ¿Seria aun conveniente su producción en las cantidades que se indica en la solución óptima?
h) Si se dispusiese de 30 horas adicionales en el Equipo Principal ¿Seria conveniente continuar con la producción de los tejidos que indica la solución óptima? ¿Por qué?
i) ¿Que efecto tendría sobre la solución óptima hallada la disminución en 100 del requerimiento mínimo de producción del Tejido C?
j) En cuanto puede disminuir o aumentar el requerimiento mínimo establecido para la producción del tejido B e interprete la misma
k) Si la ganancia por metro de Tejido C para la exportación aumenta a 5 ¿Se afectaría la optimalidad de la actual solución hallada? ¿Por qué?

Tabla 5

Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
X1	0	2.00	0	-0.60	at bound	-M	2.60
X2	200.00	3.00	600.00	0	basic	2.40	3.60
X3	800.00	1.00	800.00	0	basic	-M	2.20
X4	80.00	2.00	160.00	0	basic	1.57	3.00
X5	360.00	1.00	360.00	0	basic	0.67	4.00
Objective	Function	(Max.) =	1920.00				
Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
C1	4000.00	<=	4000.00	0	0.60	3800.00	4175.00
C2	984.00	<=	1040.00	56.00	0	984.00	M
C3	3000.00	<=	3000.00	0	0.20	2650.00	3233.33
C4	200.00	>=	200.00	0	-0.60	157.58	257.14
C5	800.00	>=	800.00	0	-1.20	740.43	900.00
C6	440.00	>=	300.00	140.00	0	-M	440.00

Solución

a) Conviene producir
- X_2 - Metros de tejido A para la exportación = 200 u
- X_3 - Metros de tejido B para el consumo nacional = 800 u
- X_4 - Metros de tejido C para el consumo nacional = 80 u
- X_5 - Metros de tejido C para la exportación = 360 u

Se obtiene una ganancia máxima de $ 1920

b) Se consumen 4000 minutos en el equipo principal (X_6)
Se consumen 984 kilogramos de fibra nacional (X_7)
Se consumen 3000 kilogramos de fibra nacional (X_8)

Se producen 200 metros de tejido A (X_9)
Se producen 800 metros de tejido B (X_{10})
Se producen 440 metros de tejido C (X_{11})

c) $4Y_1 + 2Y_2 + 4Y_3 - Y_4 \geq 2$
$5Y_1 + Y_2 + 3Y_3 - Y_4 \geq 3$
$3Y_1 + 0.5Y_2 + 2Y_3 - Y_5 \geq 1$
$3Y_1 + 1.2Y_2 + Y_3 - Y_6 \geq 2$
$Y_1 + 0.8Y_2 + 2Y_3 - Y_6 \geq 4$
$\text{Min } V = 4000Y_1 + 1040Y_2 + 3000Y_3 - 200Y_4 - 800Y_5 - 300Y_6$

d) La variable de holgura del DUAL correspondiente a la producción de tejido A para el consumo nacional (X1) tiene un valor = 0.6 y cuando toma un valor diferente de cero es que en el PRIMAL, no conviene producirlo.

e) No le sucede nada a la Solución Óptima si se incremente en 60 la disponibilidad de la fibra nacional, pues la fibra nacional puede aumentar hasta infinito.

f) Tendría que aumentar en $0.6 la ganancia para que fuese conveniente la producción de tejido A para el consumo nacional.

g) Si es conveniente su producción (Tejido B para el consumo nacional) pues esta ganancia puede disminuir hasta - infinito, esto es matemáticamente, pero económicamente no tendrá sentido producirlo si la ganancia es cero.

h) Si tengo 30 horas adicionales en el equipo principal = 30 • 60 = 1800 min. No es conveniente la producción que indica la solución óptima pues los minutos en este equipo pueden aumentar hasta 4175 min y si aumenta 30 h se pasa de esto, sería 4000 + 1800 = 5800 min

i) No sucederá nada pues esta producción puede disminuir hasta – M, es decir hasta - infinito. La solución óptima seguirá teniendo las mismas variables básicas.

j) El requerimiento mínimo de B puede disminuir en 59.57 metros y aumentar en 100 metros y se mantiene la optimalidad planteada.

k) Si se afecta la optimalidad de la actual solución pues la ganancia por metro de tejido C para la exportación solo puede aumentar hasta $4.00.

CARRERA INGENIERÍA INDUSTRIAL

ASIGNATURA: INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES **Año: 3er.**

TEMA 3. PROGRAMACIÓN ENTERA.

3.1. INTRODUCCIÓN.

3.2. TIPOS DE MODELOS DE PROGRAMACIÓN ENTERA (PE).

3.3. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE (PE).

3.3.1. MÉTODO DE SOLUCIÓN DE PE POR REDONDEO .

3.3.2. MÉTODO DE SOLUCIÓN DE PE POR RAMIFICACIÓN Y ACOTAMIENTO.

3.4. PROBLEMAS DE TRANSPORTE

3.4.1. MÉTODO DE SOLUCIÓN DE LA ESQUINA NOROESTE

3.4.2. SOLUCIÓN CON SOFT WARE WINQSB

3.4.3. SOFT WARE SOLVER.

3.5. PROBLEMAS DE ASIGNACIÓN,

3.6. ASIGNACIÓN DE TAREAS.

3.7. ASIGNACIÓN DE CAPITAL.

3.8. PROBLEMAS DE LA MOCHILA

3.9. COSTOS FIJOS.

3.10. FORMULACIÓN DE ALGUNAS RESTRICCIONES

Objetivos: Que el alumno sea capaz de:

Construir y resolver problemas de programación lineal entera apoyado en el método de ramificación y acotamiento y con aplicaciones informáticas

Método: Elaboración conjunta

Medios: Tiza y pizarra, Libro de texto, MDD, alicaciones informáticas teléfonos móviles.

Forma de enseñanza: Clase Encuentro

Bibliografía:

Métodos cuantitativos para la toma de decisiones en Administración. Editirial Felix Varela 2005.

Materiaes Didñactics Digitales entregados por el profesor.

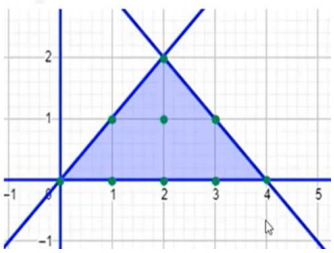
DESARROLLO.

3.1. INTRODUCCIÓN

PROGRAMACIÓN ENTERA

La Programación Entera es un conjunto de técnicas de la Investigación Operativa que permiten solución cuando todas o algunas de las variables de decisión no pueden tomar valores fraccionarios.

Para el modelo de Programación Lineal se optimiza una función sobre una región convexa, mientras que en la Programación Entera se optimiza sobre una región de factibilidad que generalmente no es convexa. Por lo tanto, la solución de problemas enteros; resulta más complicada que la Programación Lineal



TIPOS DE VARIABLES

- Reales: cantidades divisibles (pesos, volúmenes, tiempo, etc.)
- Enteras: cantidades no divisibles (personal, vehículos, objetos, etc.)
- Binarias: dos estados posibles. Toman valor 0 o 1.

Encendido / Apagado Sí / No Se usa / No se usa

Si se requiere que todas las variables sean enteras se habla de programación lineal entera pura; si se necesita que algunas de las variables de decisión sean números enteros, se tiene un problema de programación lineal entera mixta.

3.2. TIPOS DE MODELOS DE PE

MODELOS ENTERO PUROS (PE)

Es una variante del Programa Lineal, para el cual todas las variables de decisión además de cumplir la condición de no negatividad deben ser todas enteras

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{Sujeto a: } x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad \textbf{Enteras}$$

MODELOS ENTEROS MIXTOS (PEM)

En esta variante de Programa Lineal, todas las variables de decisión son positivas y solamente algunas de ellas deben ser enteras

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{Sujeto a: } x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1 \quad \textbf{Enteras}$$

MODELOS BINARIOS

Esta variante del Programa Lineal, suele utilizarse para modelar problemas con actividades que deben o no ejecutarse. Por analogía con el sistema de los números binarios, las variables de decisión toman un único valor entero entre 0 y 1. Esto es, si la actividad no se ejecuta la variable correspondiente toma el valor 0, de lo contrario el valor 1

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2$$
$$\text{Sujeto a: } x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$x_i \in \{0, 1\}$$

Algunas aplicaciones de la PE

Problemas de asignación

Costo fijos

Ubicación de instalaciones

Secuencias de maquinas

Enrutamiento de vehículos

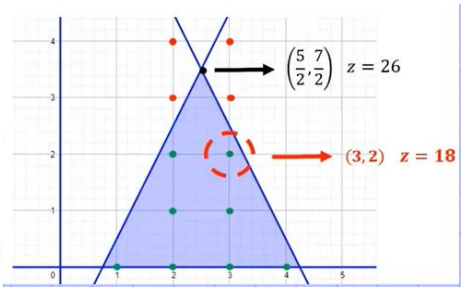
Características de lo problemas de PE.

- Si bien las restricciones pueden paracer inofensivas en realidad tienen efectos de gran alcance.
- Permite modelar restricciones de productos que deben ser fabricados en cantidades enteras.
- La otra cara de la potencialidad del modelo con variables enteras es la dificuktad de los problemas resultantes.
- Con variables enteras se pueden modelar requerimientos lógicos de costos fijos, planificar actividades y muchos otros tipos de problemas.
- Tambien con problemas de apenas 80 vriables pueden superar la capacidad de cálculo de computadoras sofisticadas.
- El estudio de esta árae de la programación lineal es de mucha importancia.

3.3. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PE

- Con una solución optima

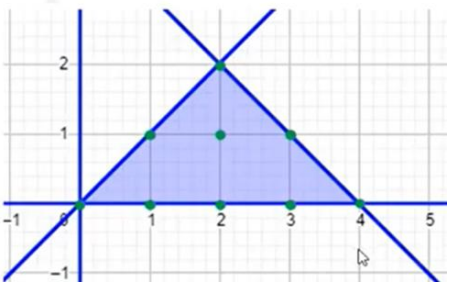
$$Maximizar \ \ z = 2x_1 + 6x_2$$
$$Sujeto\ a \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \geq 3 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 17 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ y } \textbf{enteras} \end{cases}$$



- Con un número finito de soluciones óptima

$$Maximizar\ z = x + y$$

$$Sujeto\ a \begin{cases} x + y \leq 4 \\ x - y \geq 0 \\ x, y \geq 0 \\ x, y \ \text{ENTERO} \end{cases}$$



Con un número infinito de soluciones

$$Minimizar\ z = x - y$$

$$Sujeto\ a \begin{cases} x - y \geq 0 \\ x, y \geq 0 \\ x, y \ \textit{enteras} \end{cases}$$



Métodos de solución:

Redondeo de la solución del problema de PL.

Enumeracion explicita completa.

Ramificación y acotamiento

Planos de cortes

3.3.1. MÉTODO DE SOLUCIÓN POR REDONDEO

Seguramente una empresa que fabrica camas sujetos a ciertas restricciones obtiene como solución para Maximizar las ganancias que se produzcan 325,47 camas. En tales situaciones, a menudo se adopta la solución no entera al requerimiento de enteros simplemente redondeando los resultados al entero más próximo 325 ó 326 camas. Esto produce lo que se llama la “solución redondeada”.

Mediante ese recurso de redondear la solución obtenida del PL al PE se obtienen soluciones aceptables para el administrador, porque no hay diferencia significativa, entre producir 325.47 camas y producir 325 ó 326 camas. En realidad, probablemente baste para el ajuste de los datos del modelo que satisfaga al administrador una producción cercana a los 325 camas

Existen problemas importantes en los que la “solución redondeada” simplemente no funciona. Esta complicación puede deberse a la escala de las variables por considerar. Por ejemplo, si la solución de un modelo de programación lineal recomienda que la Boeing construya 11,6 aparatos 747 y 6,8 aparatos 727, el administrador probablemente no quedara contento con la simple medida de tomar la decisión de construir 11 de los primeros y 6 de los segundos, o cualquier otra solución redondeada, porque la magnitud del rendimiento y la asignación de recursos asociados con cada unidad del problema aconsejan determinar la mejor solución entera posible.

Otro ejemplo, veremos que problemas en los que queramos que una variable “x” sea igual a 1 si vamos a construir una inversión o “x” sea igual a cero (si-no). Supóngase que la solución de una versión de programación lineal de este problema produce un valor no entero, por ejemplo, x = 0,38. Vemos que este valor no contiene información aprovechable como solución al problema real.

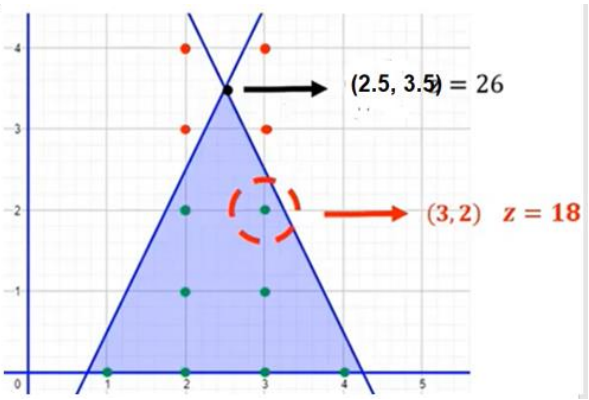
En ambos casos el redondeo del resultado de PL a PE no es apropiado.

Veamos esto desde el método gráfico.

$$Maximizar\ z = 2x_1 + 6x_2$$

$$Sujeto\ a \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \geq 3 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 17 \\ x_1, x_2 \geq 0\ y\ enteras \end{cases}$$

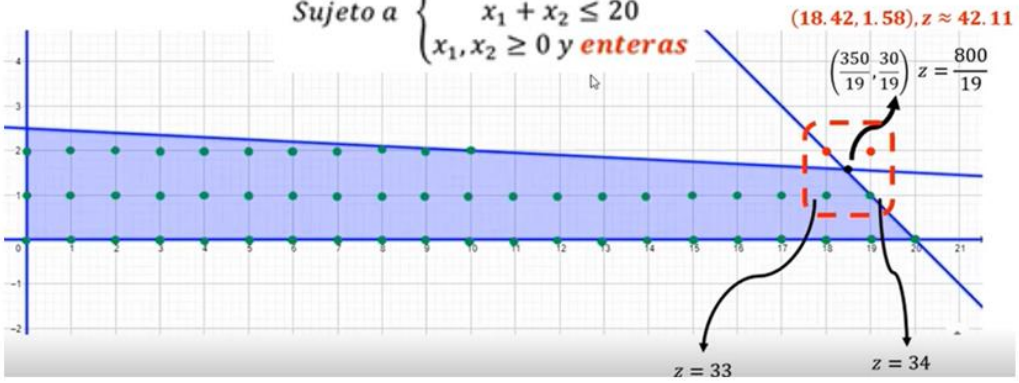
solución (2.5, 3.5)



En este ejemplo el redondeo a los valores más cercanos a la solución del problema relajado no es apropiado porque esos valores no son solución del problema PE

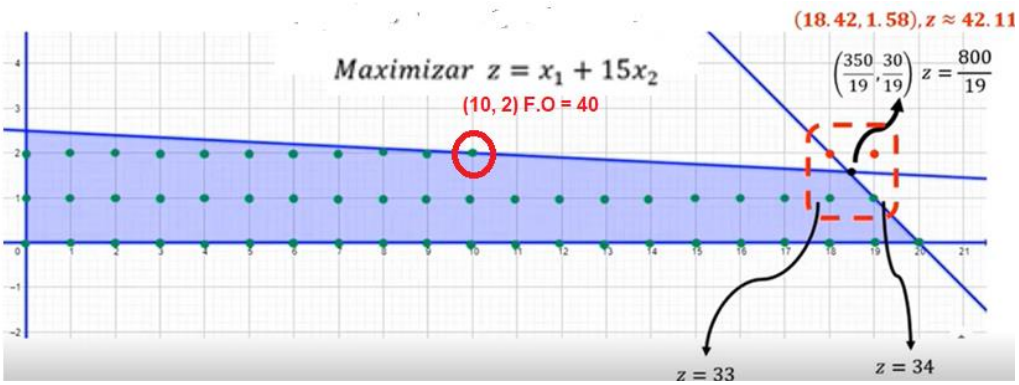
$$Maximizar\ z = x_1 + 15x_2$$

$$Sujeto\ a \begin{cases} x_1 + 20x_2 \leq 50 \\ x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0\ y\ enteras \end{cases}$$



En este ejemplo el redondeo a los valores enteros más cercanos a la solución del problema relajado no es apropiado para dos soluciones pero si para otras dos pero sin embargo…

Vemos que la solución al PE esta lejos del problema a la solución del modelo relajado



De todo lo anterior se puede concluir que el método de redondeo de la solución del problema lineal relajado al problema de programación entera no siempre es acertado.

3.3.2. MÉTODO DE SOLUCIÓN POR RAMIFICACIÓN Y ACOTAMIENTO

Este método puede ser aplicarse a cualquier problema de programación Entera.

Consiste en ir resolviendo una serie de problemas de PL, empezando por el problema relajado aplicando diferentes criterios y técnicas.

- **(Ramificación):** Si la solución no es entera se definen dos nuevos problemas que deben resolverse (se crean dos ramas que excluya la solución no entera encontrada).
- **(Acotamiento):** Si la solución de una de las ramas es entera se asume como posible solución. Si la solución de la otra rama no es entera se continua resolviendo por esa rama hasta que el valor de la F.O. sea inferior al de la candidata a solución óptima.

Consideremos el siguiente problema de Programación Lineal Entera:

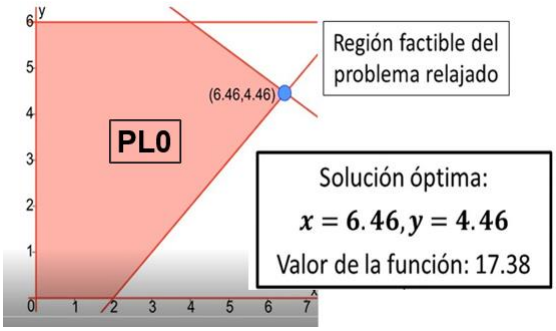
Ejemplo:

$$\text{máx } 2x + y$$
$$\text{s.a.} \begin{cases} 5x + 8y \leq 68 \\ x - y \leq 2 \\ y \leq 6 \\ x, y \geq 0 \\ x, y \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Problema relajado:

$$\text{máx } 2x + y$$
$$\text{s.a.} \begin{cases} 5x + 8y \leq 68 \\ x - y \leq 2 \\ y \leq 6 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

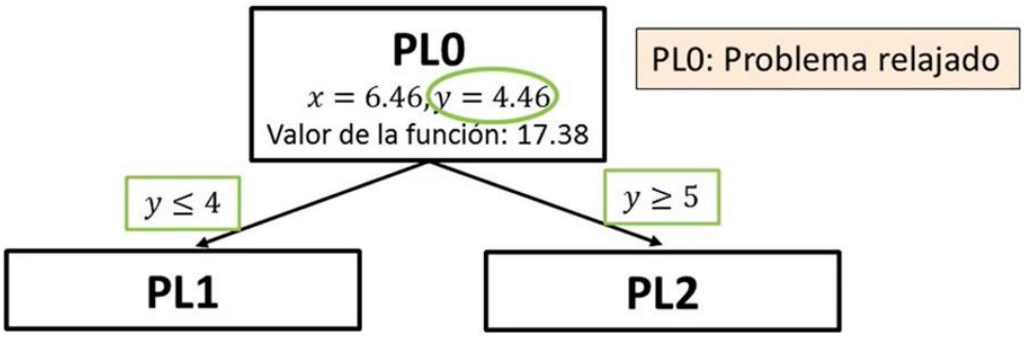
Aplicando el método gráfico o cualquier otro método de solución se obtiene:

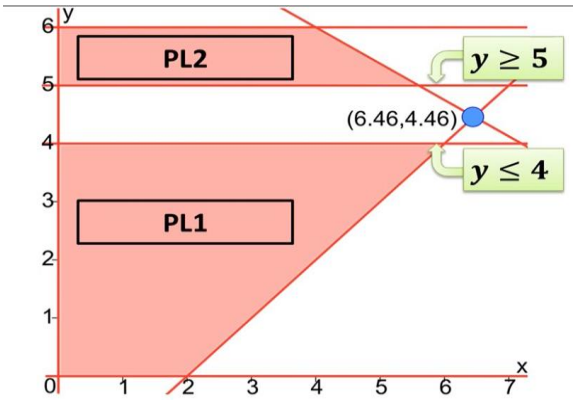


Ramificación:

Si la solución óptima no cumple la condición de números enteros:

- Se elige una variable que no cumpla esta condición: $x_i = a$
- Se definen dos nuevos problemas con una nueva restricción cada uno, según la variable elegida y su valor: $x_i \leq [a], x_i \geq [a] + 1$





Problema PL1: Problema PL0 + restricción $y \leq 4$

$$\text{máx } 2x + y$$
$$\text{s.a.} \begin{cases} 5x + 8y \leq 68 \\ x - y \leq 2 \\ y \leq 6 \\ y \leq 4 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Resolución

Solución óptima: $x = 6, y = 4$

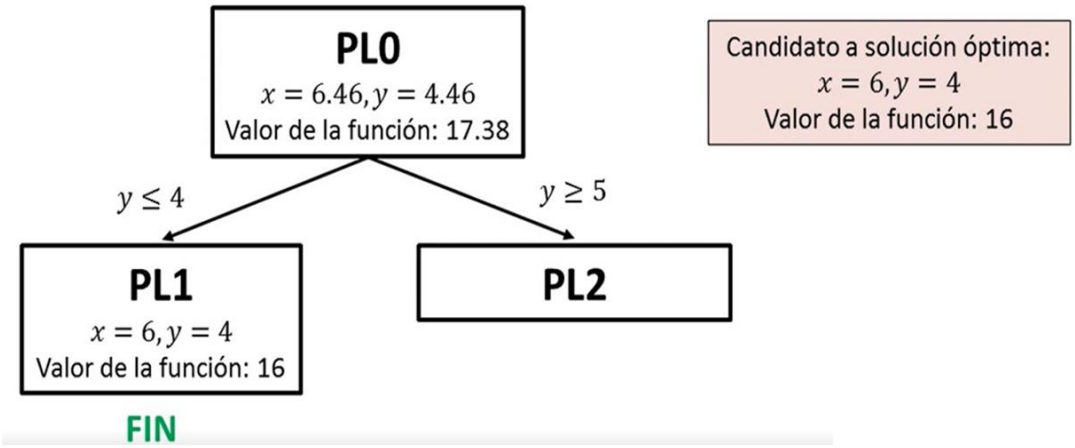
Valor de la función objetivo: 16

El valor de la función objetivo siempre empeora

Cumple las condiciones de valores enteros

Candidato a solución óptima

Será la solución óptima si no se encuentra ninguna solución mejor.



Problema PL2: Problema PL0 + restricción $y \geq 5$

$$\text{máx } 2x + y$$
$$\text{s. a.} \begin{cases} 5x + 8y \leq 68 \\ x - y \leq 2 \\ y \leq 6 \\ y \geq 5 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Resolución

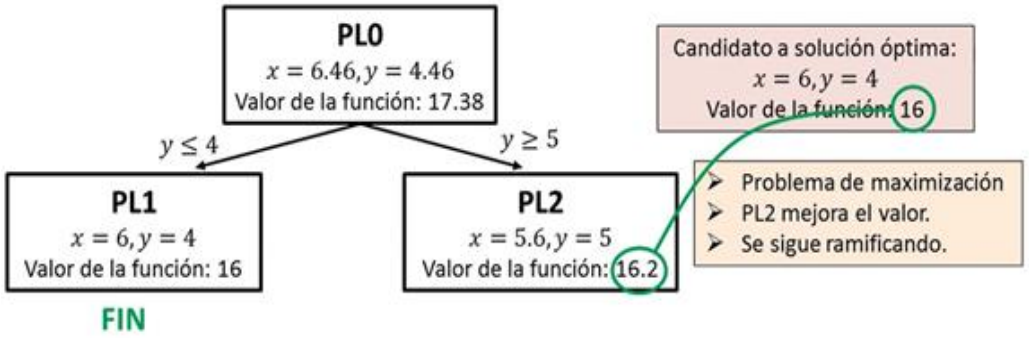
Solución óptima: $\boldsymbol{x = 5.6, y = 5}$

Valor de la función objetivo: 16.2

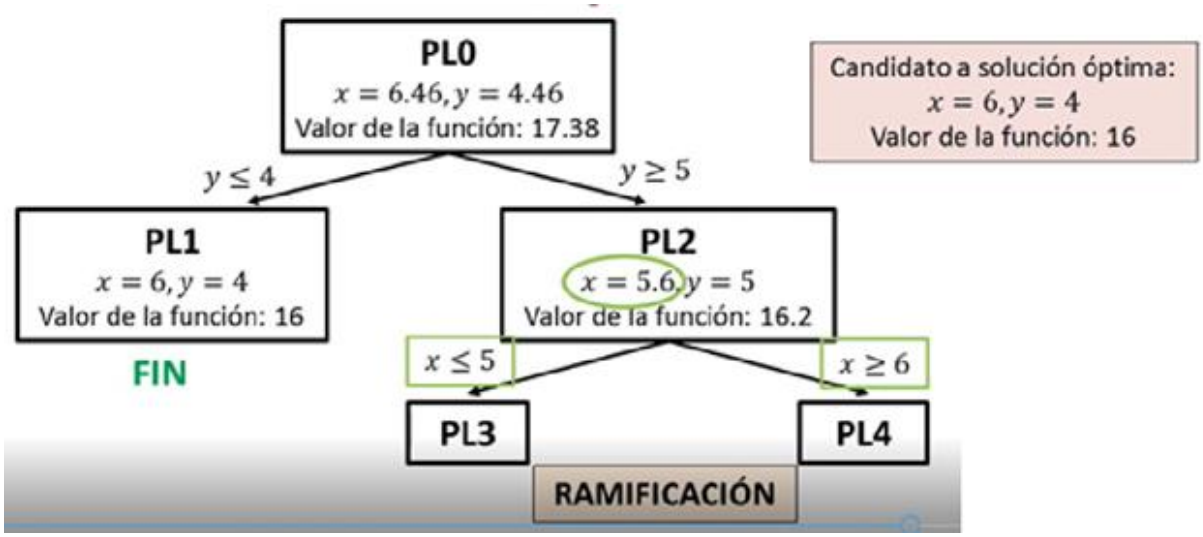
No cumple las condiciones de valores enteros

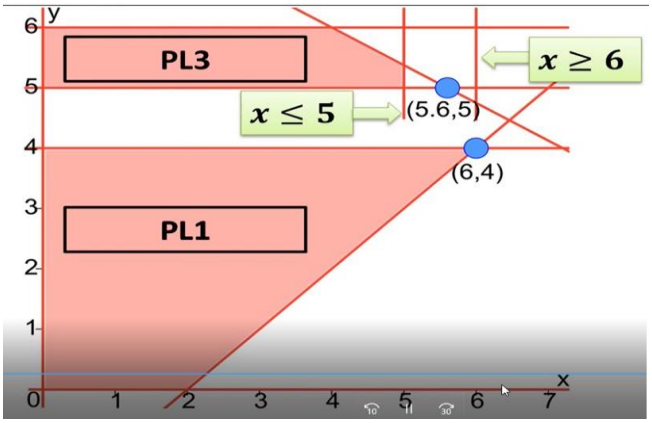
Ya tenemos un candidato. ¿Merece la pena seguir?
Depende del **valor de la función objetivo: ACOTACIÓN**

Acotación

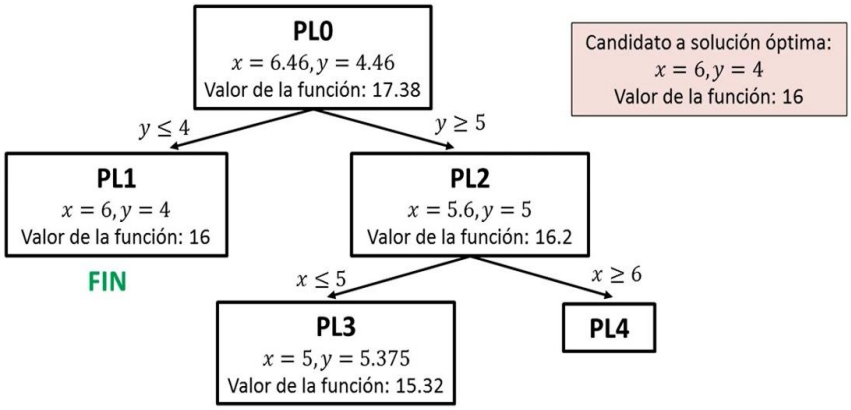


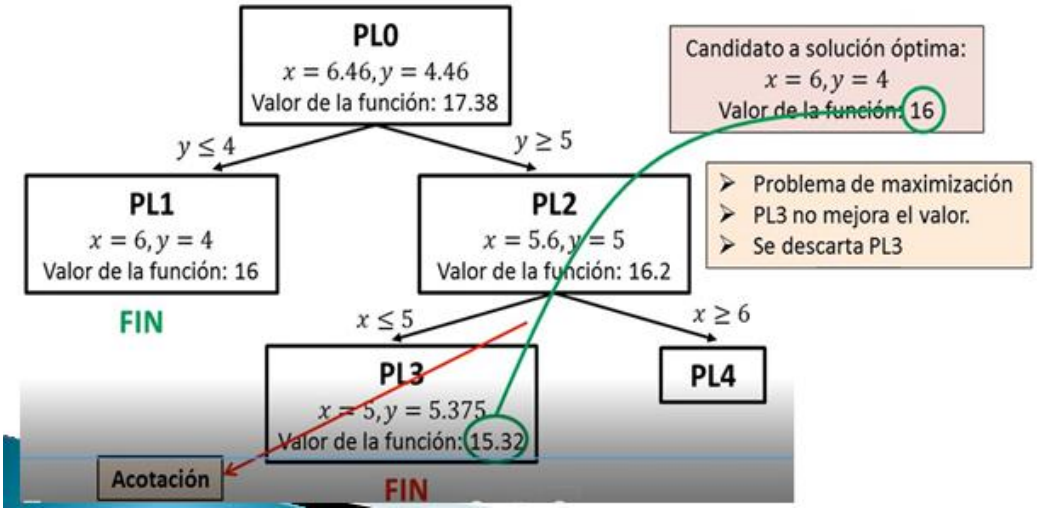
ACOTACIÓN:
Si la solución **no mejora** la del último candidato,
el problema se **descarta** (no se sigue ramificando).

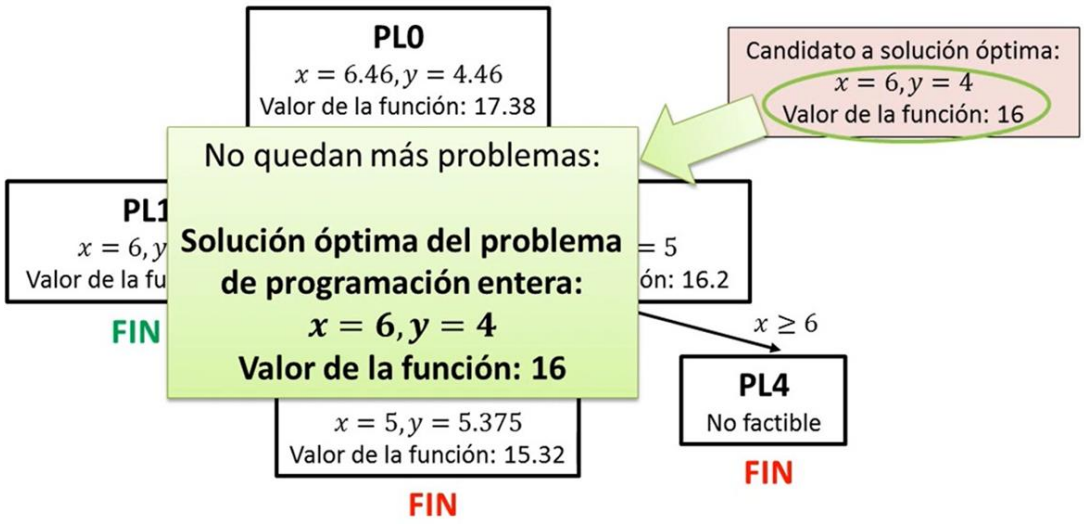

PL0
$x = 6.46, y = 4.46$
Valor de la función: 17.38
$y \leq 4$
$y \geq 5$
PL1
$x = 6, y = 4$
Valor de la función: 16
FIN
PL2
$x = 5.6, y = 5$
Valor de la función: 16.2
$x \leq 5$
$x \geq 6$
PL3
PL4
RAMIFICACIÓN
Candidato a solución óptima:
$x = 6, y = 4$
Valor de la función: 16


y
x
PL3
PL1
$x \leq 5$
$x \geq 6$
(5.6,5)
(6,4)
0
1
2
3
4
5
6
7

Esquema


PL0
$x = 6.46, y = 4.46$
Valor de la función: 17.38
$y \leq 4$
$y \geq 5$
PL1
$x = 6, y = 4$
Valor de la función: 16
FIN
PL2
$x = 5.6, y = 5$
Valor de la función: 16.2
$x \leq 5$
$x \geq 6$
PL3
$x = 5, y = 5.375$
Valor de la función: 15.32
PL4
Candidato a solución óptima:
$x = 6, y = 4$
Valor de la función: 16





3.4. EL MODELO DE TRANSPORTE

El transporte desempeña un papel importante en la economía y en las decisiones administrativas de las empresas. Entre los múltiples problemas de decisión que puede enfrentar una empresa productora está el referido a como distribuir de la forma más económica su producción terminada, que puede constar de uno o varios productos, desde sus instalaciones productivas (fabricas) hasta sus clientes.

El problema clásico de transporte. Formulación del problema.

El problema clásico de transporte, de manera general, consiste en determinar las cantidades que de un único tipo producto se debe transportar desde un conjunto de puntos llamados orígenes (fábricas) hasta un conjunto de puntos llamados destinos (almacenes), de manera que se haga mínimo el costo total de transportación, queden satisfechas las demandas de cada destino y se logre el envío de las ofertas de cada origen.

En la formulación del problema clásico de transporte se parte de considerar que existe una situación de Equilibrio, esto es, la OFERTA TOTAL del producto coincide con la DEMANDA TOTAL del producto

Formulación matemática del modelo clásico de transporte.

Notación:

Variables de decisión:

Xij: Unidades de producto a transportar desde el origen i hasta el destino j donde i=1,…m y j=1,…n

Parámetros: Oi: Oferta (Cantidad de producto disponible) en el origen i, i=1,…m

Dj: Demanda (Requerimiento del producto) en el destino j, j=1,…n

Cij : Costo de transportar una unidad de producto desde el origen i hasta el destino j.

MODELO CLÁSICO DE TRANSPORTE

$Min\,Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} CijXij$ (**Objetivo**: Minimizar el costo total de transportación)

Sujeto a:

$\sum_{j=1}^{n} Xij = Oi \quad i = 1,..m$ (**Restricciones de Oferta**: Lo que se envíe desde el origen i a los destinos j tiene que se igual a la oferta de ese origen)

$\sum_{i=1}^{m} Xij = Dj \quad j = 1,...n$ (**Restricciones de Demanda**: Lo que recibe el destino j de los orígenes i debe ser igual a lo que se demanda en ese destino)

Xij $\geq 0 \quad i = 1,...m \quad j = 1,...n$ (Condición de no negatividad)

Dado que se presenta una situación de equilibrio, esto implica que se pueden enviar los productos disponibles en todos los orígenes con lo que se satisface completamente la demanda de todos los destinos. Nótese que en este caso tanto las restricciones de oferta como de demanda tienen signo de (=).

Este modelo consta de (m **x** n) variables y (m+n) restricciones. Hay (m) restricciones de Oferta y (n) restricciones de demanda.

Desequilibrio en los problemas de transporte. Debe destacarse que la formulación del modelo clásico realizada corresponde a la situación en que el modelo se encuentra en equilibrio, es decir que la oferta total es igual a la demanda total. Si esto no ocurre, entonces existe desequilibrio, o sea, este se presenta siempre que la oferta total es desigual a la demanda total. Esta es la situación que más se presenta en la práctica.
A continuación se muestran las modificaciones que se introducen en el modelo clásico de transporte en caso de que exista desequilibrio El desequilibrio se puede presentar en dos formas:

- Oferta Total < Demanda Total

Si la Oferta Total <u>es menor</u> que la Demanda Total el modelo se plantea de la forma siguiente:

$$Min\,Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} CijXij$$

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = O_i$ donde $i = 1....m$ (restricciones de oferta) (signo =)

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq D_j$ donde $j = 1....n$ (restricciones de demanda) (signo $\leq$)

$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1....m \qquad j = 1....n$

- Oferta Total > Demanda Total

Si la Oferta Total es mayor que la Demanda Total el modelo se plantea de la forma siguiente:

$$Min\, Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} CijXij$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le S_i \text{ donde } \quad i = 1....m \text{ (restricciones de oferta) (signo } \le \text{)}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = D_j \text{ donde } \quad j = 1....n \text{ (restricciones de demanda) (signo =)}$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad i = 1....m \qquad j = 1....n$$

Ejemplo 4 (De Trasporte)

Dos fábricas pertenecientes a una empresa elaboran un solo producto, el cual se envía a 3 almacenes que se encargan de distribuirlo, satisfaciendo así la demanda de los clientes. La empresa cuenta con varios camiones de un mismo tipo, no existiendo limitaciones de capacidad para el traslado de los productos a los almacenes.

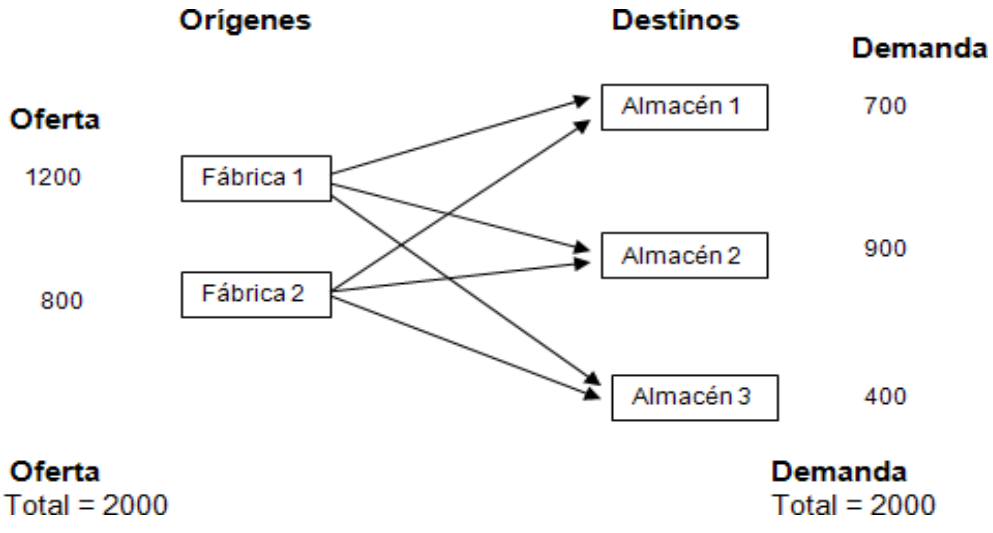
En la siguiente tabla se muestran los datos correspondientes a la producción mensual de cada fábrica en unidades, la demanda en unidades del producto y el costo unitario de transporte desde cada fábrica hasta cada almacén.

	COSTO ($/Unidad)			
	ALMACENES			
Fabricas	A-1	A-2	A-3	Producción
F-1	5	4	6	1200
F-2	2	3	8	800
Demanda	700	900	400	

La dirección de la empresa quiere determinar la cantidad de producto que mensualmente debe enviar desde cada fábrica hasta cada almacén si quiere lograr la distribución que haga mínimo el costo total de transportación.

Este problema de transporte puede ser representado gráficamente mediante la llamada **red de transporte**, la cual se presenta a continuación:

El planteamiento del modelo de transporte es como sigue:



Paso 1: Definición de variables:

Xij-> Unidades de producto a enviar desde la fabrica i al almacén j i=1,2 j= 1,.3

De acuerdo con lo anterior en este modelo se tienen 6 variables de decisión en total que son:

X_{11}, X_{12}, X_{13} X_{21}, X_{22}, X_{23}

Declarar las variables:

X11: cantidad de productos enviados de F1 al almacén 1

X12: cantidad de productos enviados de F1 al almacén 2

X13: cantidad de productos enviados de F1 al almacén 3

X21: cantidad de productos enviados de F2 al almacén 1

X22: cantidad de productos enviados de F2 al almacén 2

X23: cantidad de productos enviados de F2 al almacén 3

Paso 2: construcción de la función objetivo

MIN Z = 5 X_{11} + 4 X_{12} + 6 X_{13} + 2 X_{21} + 3 X_{22} + 8 X_{23}

Paso 3: Construcción del sistema de restricciones.

Sujeto a:

$X_{11} + X_{12} + X_{13} = 1200$ (Oferta Fabrica 1)

$X_{21} + X_{22} + X_{23} = 800$ (Oferta Fabrica 2)

$X_{11} + X_{21} = 700$ (Demanda Almacén 1)

$X_{12} + X_{22} = 900$ (Demanda Almacén 2)

$X_{13} + X_{23} = 400$ (Demanda Almacén 3)

$Xij \geq 0$ i=1,2 j=1,2,.3

3.4.1. MÉTODO DE SOLUCIÓN DE LA ESQUINA NOROESTE

Planta	Almacen A	Almacen B	Almacen C	Capacidad
P1	8.0	9.0	8.4	700
P2	10	7.6	9.6	800
Requisitos	400	600	500	1500 / 1500

Planta	Almacen A	Almacen B	Almacen C	Capacidad
P1	400 8.0	9.0	8.4	700-400 = 300
P2	10	7.6	9.6	800
Requisitos	~~400~~	600	500	1500 / 1500

Planta	Almacen			Capacidad
	A	B	C	
P1	400 8.0	☆ 9.0	8.4	300
P2	10	7.6	9.6	800
Requisitos	~~400~~	600	500	1500 / 1500

Planta	Almacen			Capacidad
	A	B	C	
P1	400 8.0	☆ 300 9.0	8.4	~~300~~
P2	10	7.6	9.6	800
Requisitos	~~400~~	600 - 300 = 300	500	1500 / 1500

Planta	Almacen			Capacidad
	A	B	C	
P1	400 8.0	☆ 300 9.0	8.4	~~300~~
P2	10	☆ 7.6	9.6	800
Requisitos	~~400~~	600 - 300 = 300	500	1500 / 1500

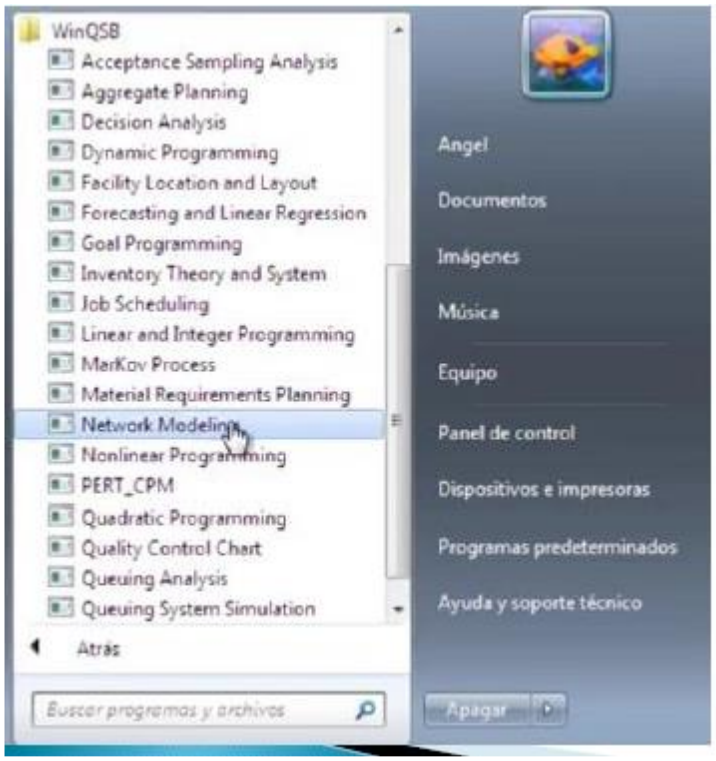
Planta	Almacen A	Almacen B	Almacen C	Capacidad
P1	400 (8.0)	☆ 300 (9.0)	(8.4)	~~300~~
P2	(10)	300 (7.6)	(9.6)	800 - 300 = 500
Requisitos	~~400~~	600 - 300 = ~~300~~	500	1500 / 1500

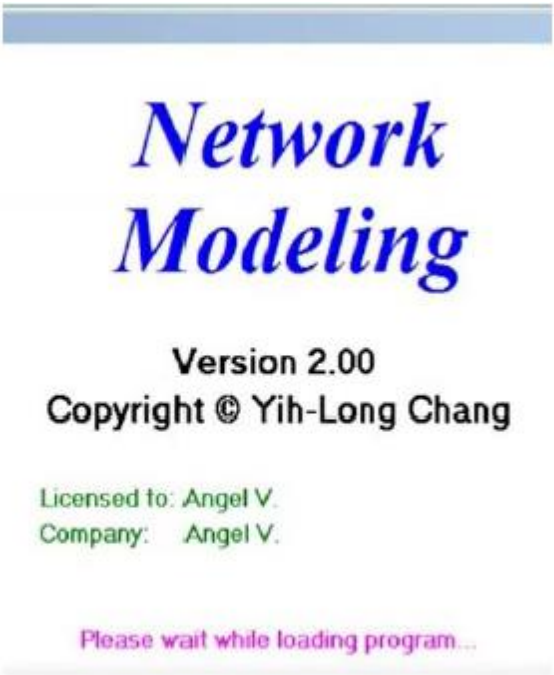
Planta	Almacen A	Almacen B	Almacen C	Capacidad
P1	400 (8.0)	300 (9.0)	(8.4)	700
P2	(10)	300 (7.6)	500 (9.6)	800
Requisitos	400	600	500	1500 / 1500

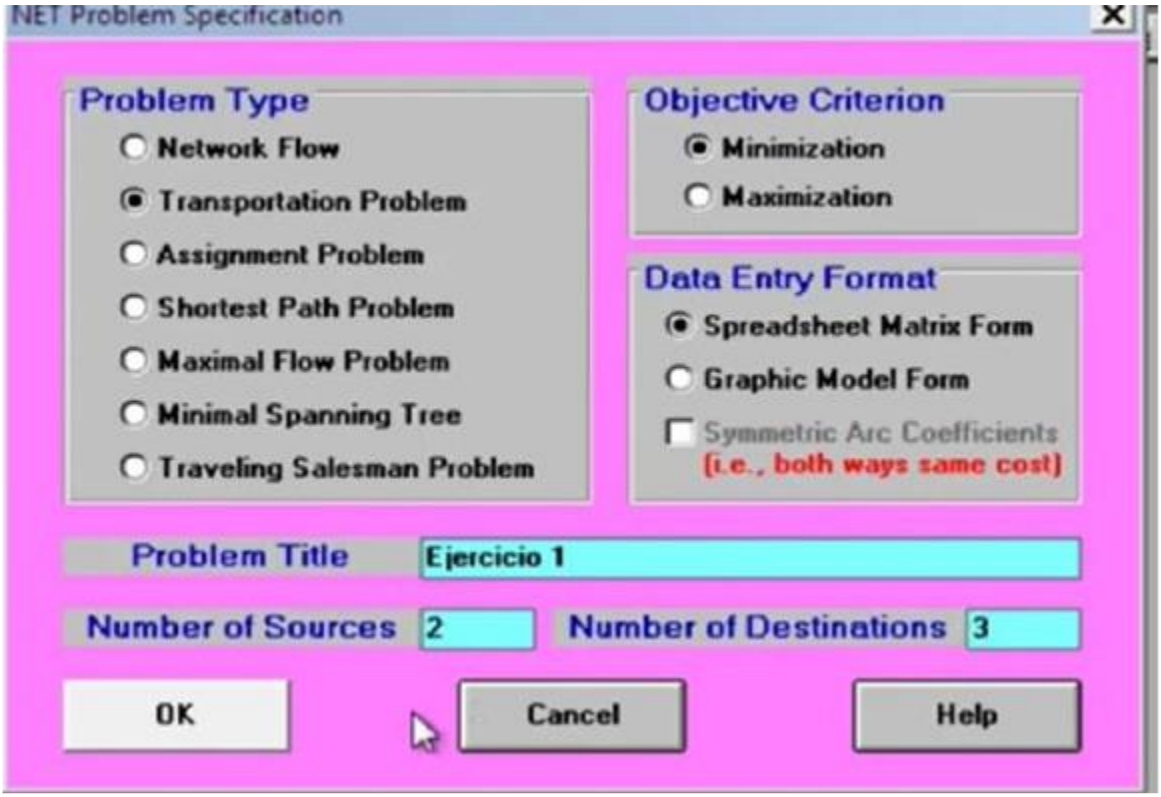
Planta	Almacen A	Almacen B	Almacen C	Capacidad
P1	400 (8.0)	☆ 300 (9.0)	(8.4)	~~300~~
P2	(10)	300 (7.6)	500 (9.6)	~~500~~
Requisitos	~~400~~	600 - 300 = ~~300~~	~~500~~	1500 / 1500

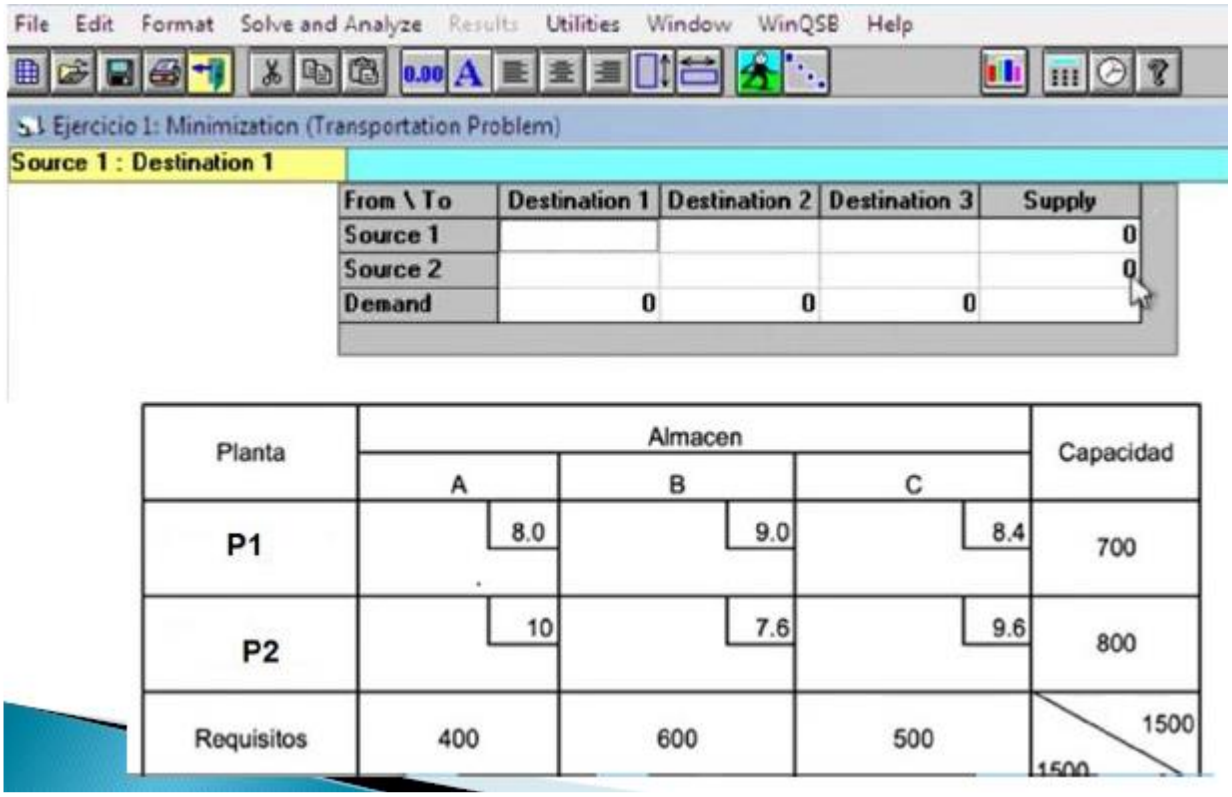
F.O. = 400*8 + 300*9 + 300*7.6 + 500*9.6 = 12980

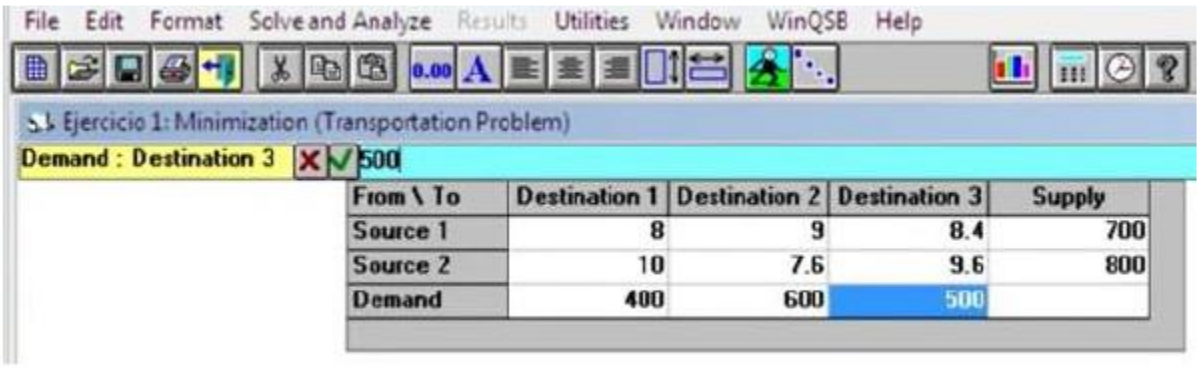
3.4.2. SOLUCIÓN CON SOFT WARE WINQSB

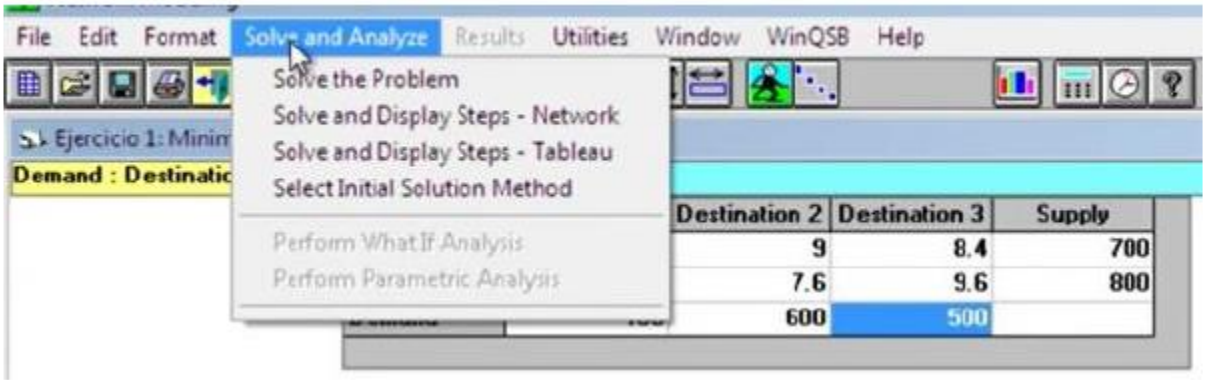




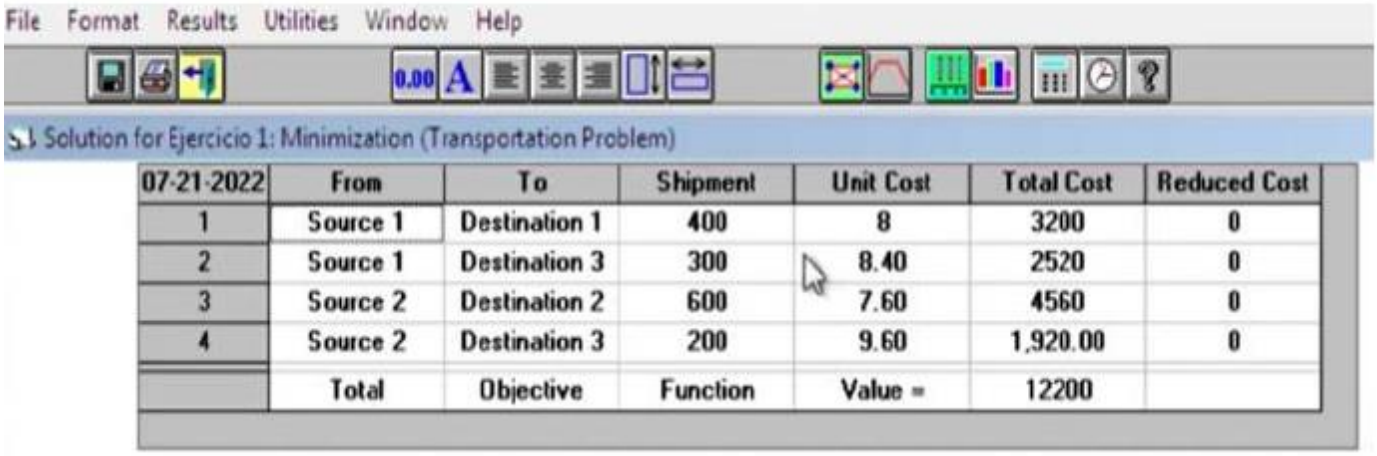



File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help
Ejercicio 1: Minimization (Transportation Problem)
Source 1 : Destination 1
From \ To | Destination 1 | Destination 2 | Destination 3 | Supply
Source 1 | | | | 0
Source 2 | | | | 0
Demand | 0 | 0 | 0 |
Planta | Almacen | | | Capacidad
A | B | C
P1 | 8.0 | 9.0 | 8.4 | 700
P2 | 10 | 7.6 | 9.6 | 800
Requisitos | 400 | 600 | 500 | 1500
1500


File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help
Ejercicio 1: Minimization (Transportation Problem)
Demand : Destination 3
500
From \ To | Destination 1 | Destination 2 | Destination 3 | Supply
Source 1 | 8 | 9 | 8.4 | 700
Source 2 | 10 | 7.6 | 9.6 | 800
Demand | 400 | 600 | 500 |

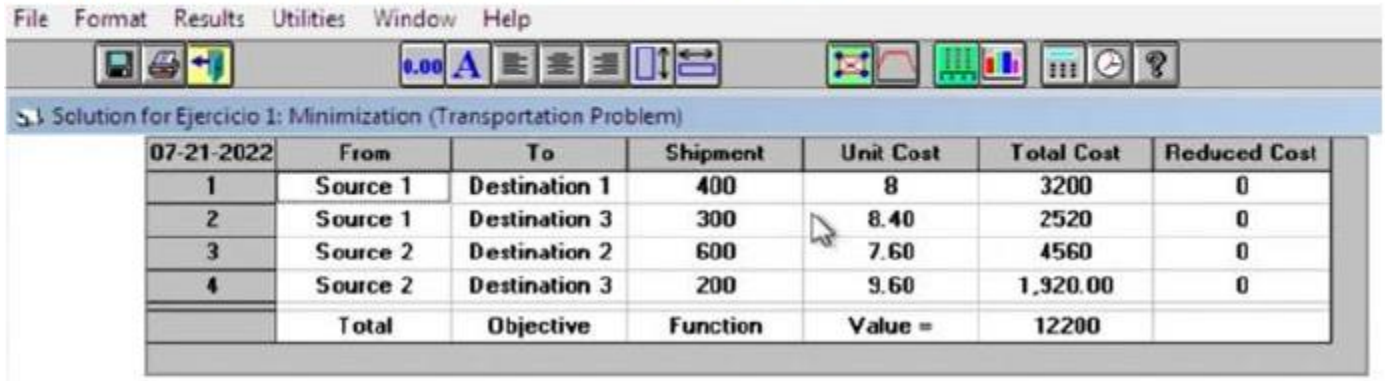

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help
Solve the Problem
Solve and Display Steps - Network
Solve and Display Steps - Tableau
Select Initial Solution Method
Perform What If Analysis
Perform Parametric Analysis
Destination 2 | Destination 3 | Supply
9 | 8.4 | 700
7.6 | 9.6 | 800
600 | 500 |

SOLUCION DEL PPL CON WINQSB



07-21-2022	From	To	Shipment	Unit Cost	Total Cost	Reduced Cost
1	Source 1	Destination 1	400	8	3200	0
2	Source 1	Destination 3	300	8.40	2520	0
3	Source 2	Destination 2	600	7.60	4560	0
4	Source 2	Destination 3	200	9.60	1,920.00	0
	Total	Objective	Function	Value =	12200	

INTERPRETACION DE RESULTADOS



07-21-2022	From	To	Shipment	Unit Cost	Total Cost	Reduced Cost
1	Source 1	Destination 1	400	8	3200	0
2	Source 1	Destination 3	300	8.40	2520	0
3	Source 2	Destination 2	600	7.60	4560	0
4	Source 2	Destination 3	200	9.60	1,920.00	0
	Total	Objective	Function	Value =	12200	

Transportar de P1 al almacén A 400 u

Transportar de P1 al almacén B 0 u

Transportar de P1 al almacén C 300 u

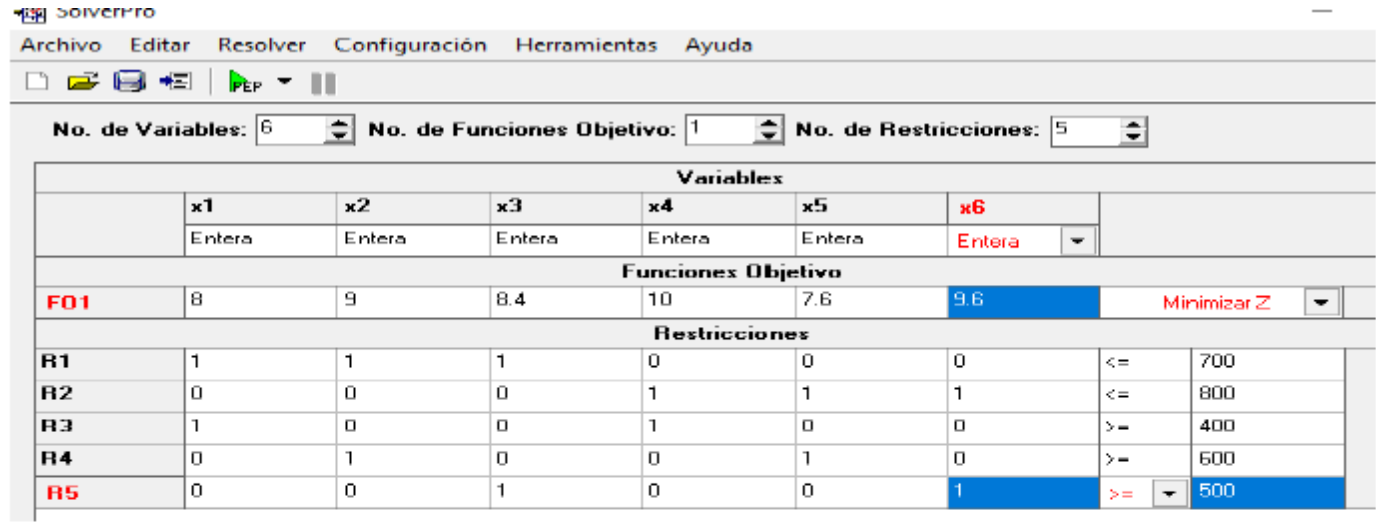
Transportar de P2 al almacén A 0 u

Transportar de P2 al almacén B 600 u

Transportar de P2 al almacén C 200 u

F.O: El costo mínimo de transportación con esta solución es de 12 200 pesos

3.4.3. SOFT WARE SOLVER.



Para P1 R_1: $X_1 + X_2 + X_3 \leq 700$

Para P2 R_2: $X_4 + X_5 + X_6 \leq 800$

Para A R_3: $X_1 + X_4 \geq 400$

Para B R_4: $X_2 + X_5 \geq 600$

Para C R_5: $X_3 + X_6 \geq 500$

NO NEGATIVIDAD R_6: $X_{1.....}X_6 \geq 0$

Solución OPTIMA: -12199

Variables de decisión:

Nombre	Estado	Valor
x1	Básica	400
x2	No Básica	0
x3	Básica	300
x4	No Básica	0
x5	Básica	600
x6	Básica	200

Variables de holgura:

Nombre	Estado	Valor
S1	No Básica	0
S2	Básica	0
S3	No Básica	0
S4	No Básica	0
S5	No Básica	0

Variables de dualidad:

Nombre	Valor
Y0	1.2
Y1	0
Y2	9.2
Y3	7.6
Y4	9.6

Transportar de P1 al almacén A 400 u

Transportar de P1 al almacén B 0 u

Transportar de P1 al almacén C 300 u

Transportar de P2 al almacén A 0 u

Transportar de P2 al almacén B 600 u

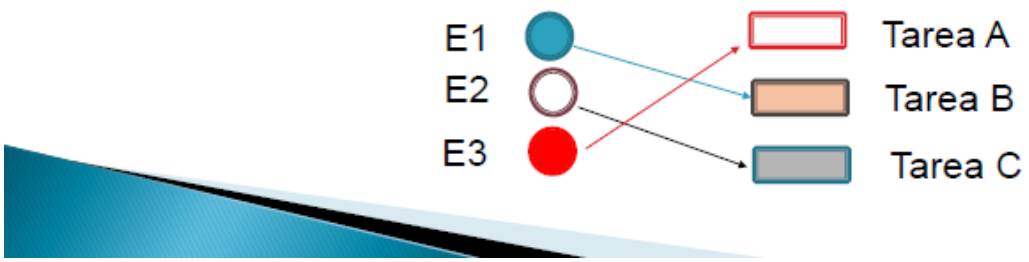
Transportar de P2 al almacén C 200 u

F.O: El costo mínimo de transportación con esta solución es de $12 199

3.5. PROBLEMAS DE ASIGNACIÓN,

El **problema de asignación** es un caso particular del **problema** de **transporte** y constituyen la clase más sencilla de los **problemas** lineales, consiste en encontrar la forma de asignar ciertos recursos disponibles (máquinas o personas) para la realización de determinadas tareas al menor coste o mayor beneficio, suponiendo que cada recurso se destina a una tarea, y que cada tarea es ejecutada por uno solo de los recursos

El modelo se puede aplicar a la asignación de empleados a tareas, de fábricas a productos, de vendedores a territorios. etc

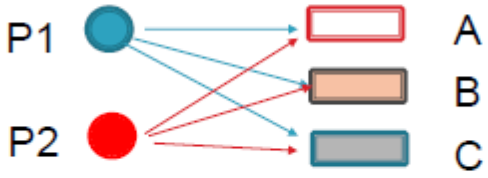


Los problemas de asignacion presentan una estructura similar a los de transporte, pero con dos diferencias: asocian igual número de orígenes con igual número de demandas y las ofertas en cada origen es de valor uno, como lo es la demanda en cada destino.

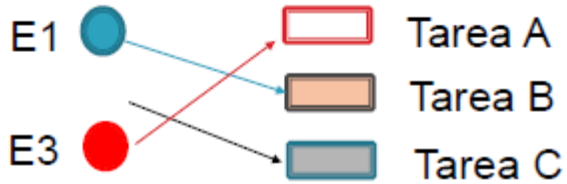
La restricción importante para cada agente es que será asignado a una sola tarea.

Diferencias con el Modelo de Transporte y Asignación

• En el problema de transporte existen orígenes y destinos, y el flujo se realiza desde un origen hacia cada uno de los diferentes destinos.



•En los problemas de asignación las ofertas en cada origen es de valor uno, como lo es la demanda en cada destino; una gran diferencia con respecto a los problemas de transporte.



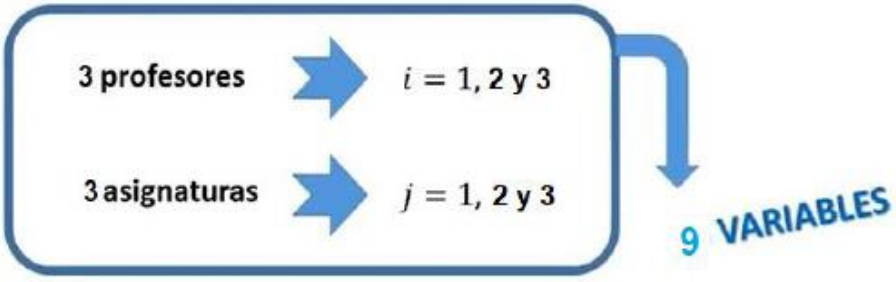
3.5.1. PROBLEMAS DE ASIGNACIÓN DE TAREAS

En un departamento de una Universidad se desea definir la carga docente de 3 profesores: $A, B, C,$. Cada uno debe dictar 1 asignaturas de un conjunto de 3. Cada profesor define su grado de preferencia para dictar un curso determinado con un número del 1 al 10, según se ilustra en la tabla siguiente, colocando un 0 en la asignatura que no puede dictar.

	A	B	C
Optimización 1	10	0	10
Optimización 2	9	2	10
Simulación	10	8	8

✓ Variables de decisión

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, si\ el\ profesor\ i\ \textbf{SI}\ se\ asigna\ a\ la\ asignatura\ j \\ 0, si\ el\ profesor\ i\ \textbf{NO}\ se\ asigna\ a\ la\ asignatura\ j \end{cases}$$



✓ Función objetivo

	A	B	C
Optimización 1	10	0	10
Optimización 2	9	2	10
Simulación	10	8	8

Maximizar

$$z = 10x_1 + 9x_2 + 10X_3 + 0x_4 + 2x_5 + 8X_6 + 10X_7 + 10X_8 + 8X_9$$

	A	B	C
Optimización 1	X_1	X_4	X_7
Optimización 2	X_2	X_5	X_8
Simulación	X_3	X_6	X_9

✓ Restricciones

Cada **profesor** debe ser asignado a **1 asignaturas**

Profesor A $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

Profesor B $x_4 + x_5 + x_6 = 1$

Profesor C $x_7 + x_8 + x_9 = 1$

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, 2 \text{ y } 3$$

3 RESTRICCIONES

✓ Restricciones

Cada **asignatura** debe ser asignada exactamente a **UN profesor**

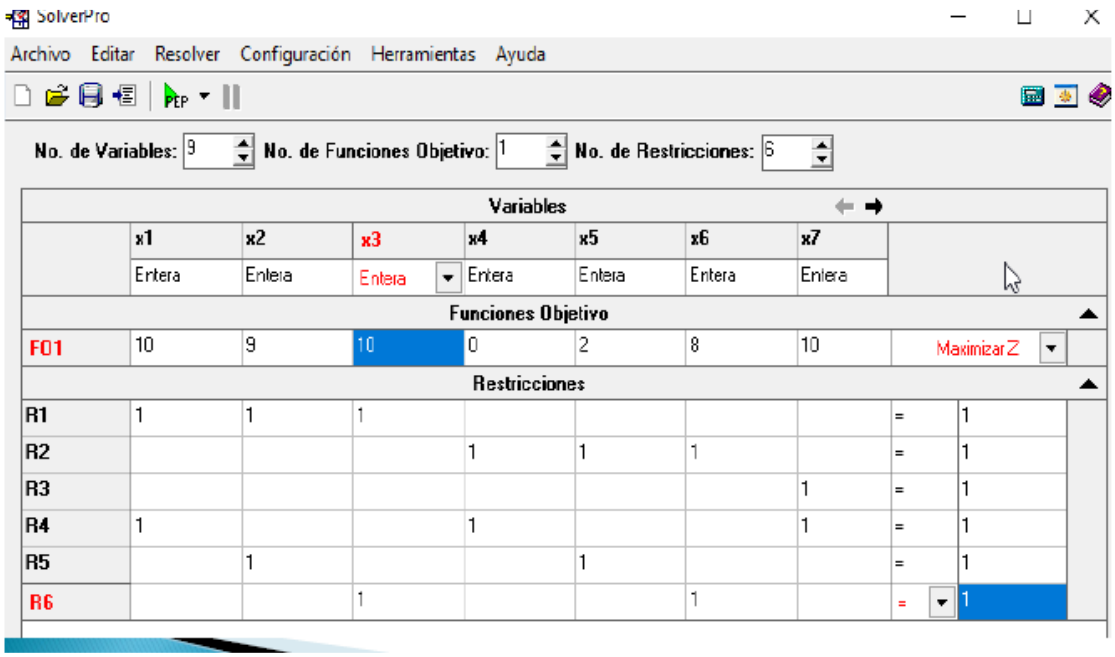
Asignatura 1 $x_1 + x_4 + x_7 = 1$

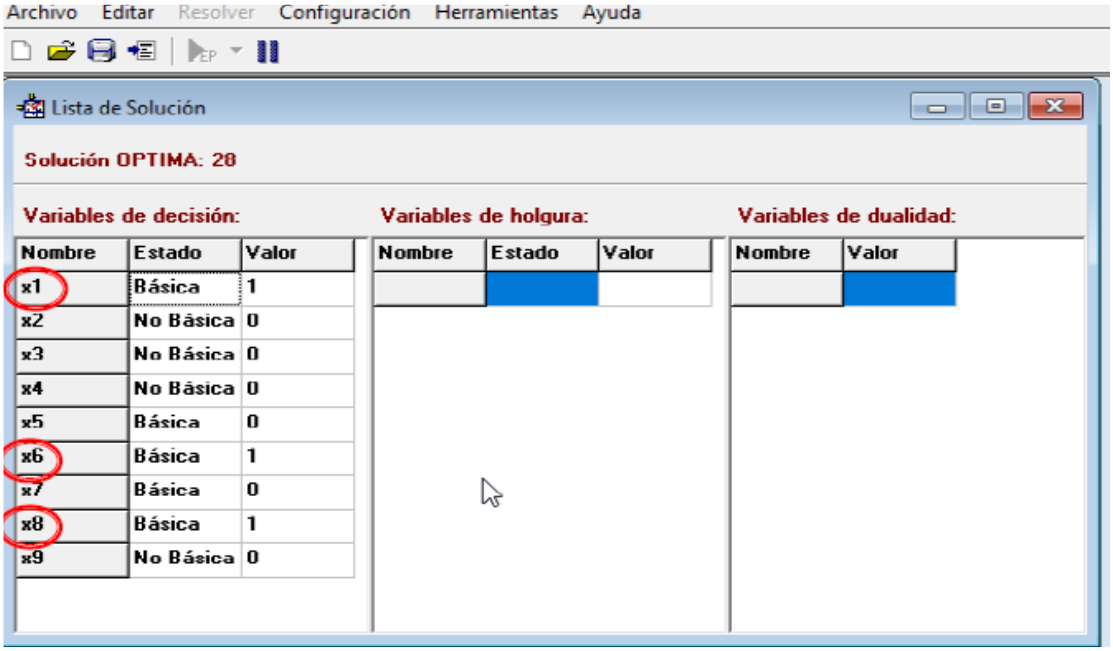
Asignatura 2 $x_2 + x_5 + x_8 = 1$

Asignatura 3 $x_3 + x_6 + x_9 = 1$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = 1, \qquad j = 1, 2 \text{ y } 3$$

3 RESTRICCIONES





RESPUESTA:

EL PROFESOR A IMPARTE LA ASIGNATURA OPTIMIZACIÓN 1

EL PROFESOR B IMPARTE LA ASIGNATURA SIMULACIÓN

EL PROFESOR C IMPARTE LA ASIGNATURA OPTIMIZACIÓN 2

3.5.2. PROBLEMAS DE ASIGNACIÓN DE CAPITAL

Un coordinador de proyecto dispone de $14000 para invertir en un conjunto de proyectos. Existen 4 proyectos de inversión cuya información de costo-beneficio se muestra en la tabla

PROYECTO	Costo de inversión [miles $]	Beneficio [miles $]
Proyecto 1	5	16
Proyecto 2	7	22
Proyecto 3	4	12
Proyecto 4	3	8

En cuál(es) debería invertir para que la empresa obtenga el mayor beneficio económico

Presupuesto: $14.000

PROYECTO	Costo de inversión [miles $]	Beneficio [miles $]
Proyecto 1	5	16
Proyecto 2	7	22
Proyecto 3	4	12
Proyecto 4	3	8

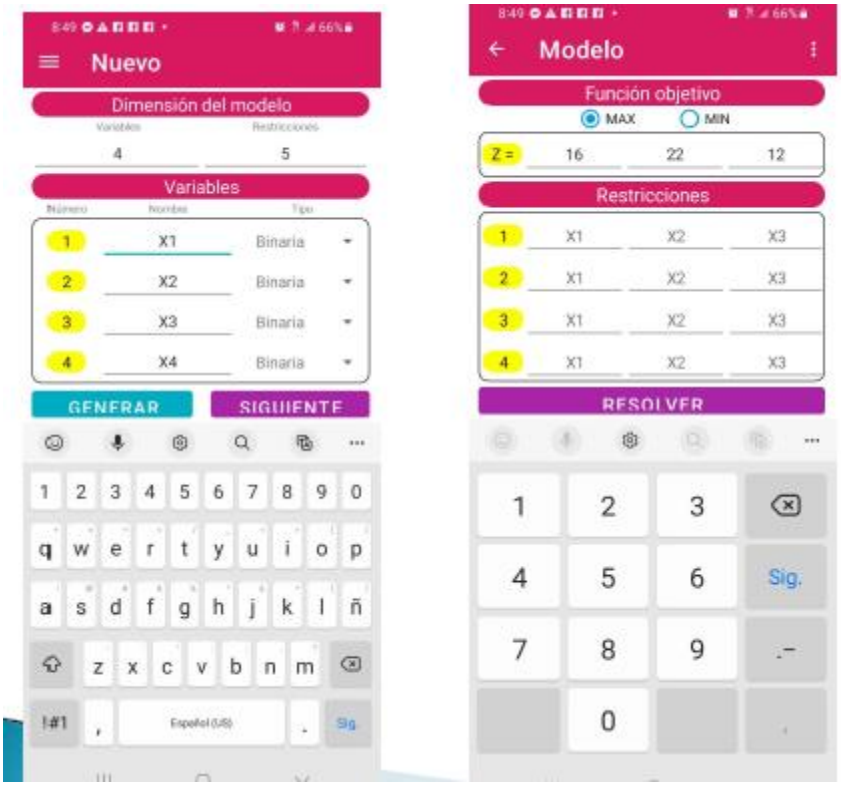
$$Maximizar\ z = 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4$$

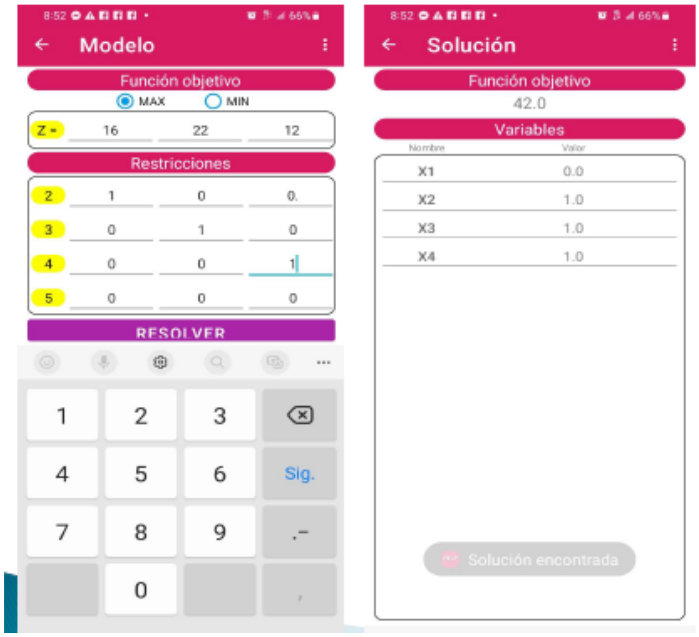
$$Sujeto\ a \begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Empleando la Apk para teléfonos móviles









R/ Los proyectos que se podrían invertir son en el 2, 3, y 4, donde el monto de la inversión es de $14 000 y reporta un beneficio máximo de $42 000

3.8. PROBLEMAS DE LA MOCHILA

Problema de la mochila (Knapsack)

Trata de un transportista que dispone de un vehículo con capacidad volumétrica de transporte b, en el que puede alojar diferentes objetos x_j de volúmenes a_j y valores económicos c_j, y desea maximizar el valor de lo transportado en cada viaje.

Se requiere cargar un camión que tiene una capacidad de 60 toneladas con 5 artículos cuyos *pesos en toneladas* y *valores económicos en miles de $* se muestran en la tabla siguiente

ARTÍCULO	1	2	3	4	5
PESO	42	23	21	15	7
VALOR	100	60	70	15	15

¿Cuáles artículos deben seleccionarse para maximizar el beneficio de lo transportado por el camión?

Variables de decisión

$$x_j = \begin{cases} 1, si\ el\ artículo\ se\ selecciona \\ 0, si\ el\ artículo\ no\ se\ selecciona \end{cases}$$

$j = 1, \ldots, 5$

Función objetivo

ARTÍCULO	1	2	3	4	5
PESO	42	23	21	15	7
VALOR	100	60	70	15	15

$$Maximizar\ z = 100x_1 + 60x_2 + 70x_3 + 15x_4 + 15x_5$$

ARTÍCULO	1	2	3	4	5
PESO	42	23	21	15	7
VALOR	100	60	70	15	15

Restricciones

Capacidad del camión es 60 toneladas

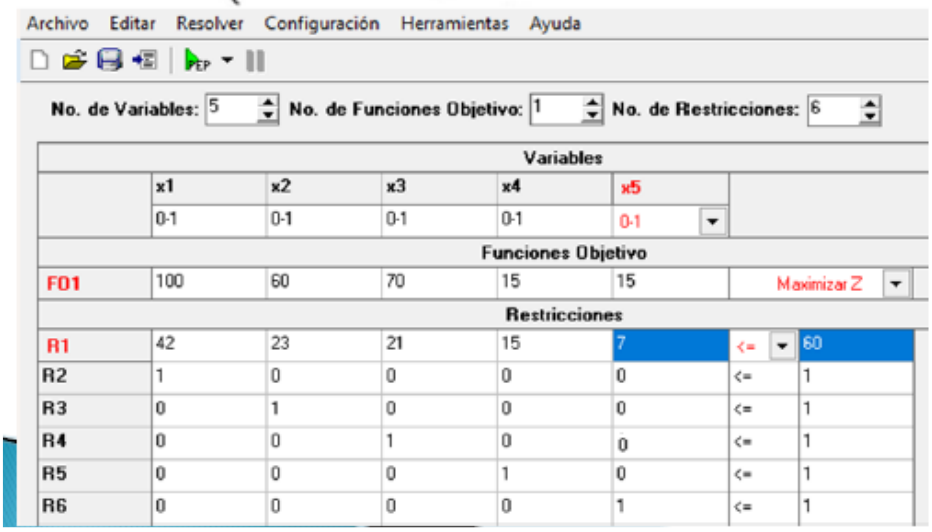
$$42x_1 + 23x_2 + 21x_3 + 15x_4 + 7x_5 \leq 60$$

$$Maximizar\ z = 100x_1 + 60x_2 + 70x_3 + 15x_4 + 15x_5$$

$$Sujeto\ a \begin{cases} 42x_1 + 23x_2 + 21x_3 + 15x_4 + 7x_5 \leq 60 \\ x_j \in \{0, 1\}, j = 1, \ldots, 5 \end{cases}$$

$$Maximizar\ z = 100x_1 + 60x_2 + 70x_3 + 15x_4 + 15x_5$$

$$Sujeto\ a \begin{cases} 42x_1 + 23x_2 + 21x_3 + 15x_4 + 7x_5 \leq 60 \\ x_j \in \{0,1\}, j = 1, \ldots, 5 \end{cases}$$





El camión debe transportar los artículos 2, 3, 4 con un peso total de 59 ton. y una ganancia de $145. Otra solución puede ser transportar los 2,3 y 4 con un peso de 51 ton. igual valor de $145

3.9. COSTOS FIJOS.

Una **panadería** dispone de **cuatro hornos** para producir barras de pan.

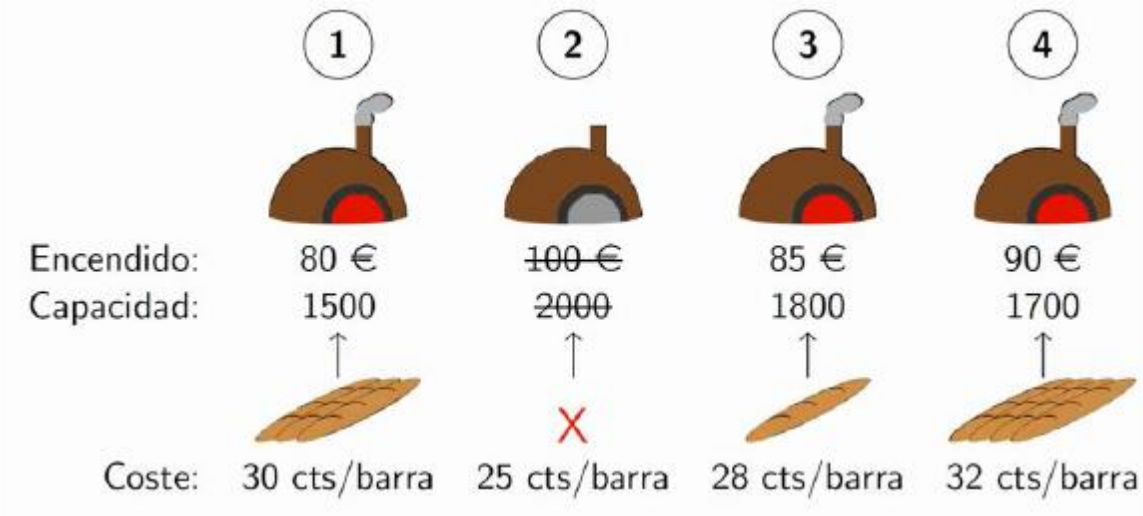
El *costo diario* por el funcionamiento de cada uno de los hornos es de **$80, $100, $85 y $90, respectivamente.**

Cada horno es capaz de hornear un máximo de **1500, 2000, 1800 y 1700 barras de pan al día.**

Para cada horno el *costo de hornear una barra de pan* es de 30, 25, 28 y 32 centavos de dólar.

La *demanda diaria* es de **3000 barras de pan.**

Plantee un modelo que permita determinar **cuales hornos deben encenderse** y **cuantas barras de pan** tienen que hacerse en cada uno de ellos para **minimizar el costo total.**



✓ Variables de decisión

x_i = Número de barras de pan horneadas en el ***horno*** i

$x_i \geq 0$ *y entera* **(X_1, X_2, X_3, X_4)**

$$y_i = \begin{cases} 1, \textit{si el horno } i \textit{ está operando} \\ 0, \textit{si el horno } i \textit{ está apagado} \end{cases}$$ **(y_1, y_2, y_3, y_4)**

✓ Función objetivo

El *costo diario* por el funcionamiento de cada uno de los hornos es de **$80, $100, $85 y $90, respectivamente.**

Para cada horno el *costo de hornear una barra de pan* es de **30, 25, 28 y 32 centavos de dólar.**

$$Minimizar\ z = (0.30x_1 + 0.25x_2 + 0.28x_3 + 0.32x_4) + (80y_1 + 100y_2 + 85y_3 + 90y_4)$$

Costo Variable — costo fijo

✓ Restricciones

La *demanda diaria* es de **3000 barras de pan.**

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3000$$

Cada horno es capaz de hornear un máximo de **1500, 2000, 1800 y 1700 barras de pan al día**.

$$\begin{cases} x_1 = 0, \text{si el horno 1 está apagado} & (y_1 = 0) \\ x_1 \leq 1500, \text{si el horno 1 está encendido} & (y_1 = 1) \end{cases}$$

$$x_1 \leq 1500y_1$$

$$x_1 - 1500y_1 = 0$$

Modelo matemático

$$\text{mín } 80y_1 + 100y_2 + 85y_3 + 90y_4 + 0{,}3x_1 + 0{,}25x_2 + 0{,}28x_3 + 0{,}32x_4$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3000 \\ x_1 - 1500y_1 \leq 0 \\ x_2 - 2000y_2 \leq 0 \\ x_3 - 1800y_3 \leq 0 \\ x_4 - 1700y_4 \leq 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z} \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \in \{0, 1\} \end{cases}$$

3.10. FORMULACIÓN DE ALGUNAS RESTRICCIONES

Si al problema anterior le agregáramos las siguientes restricciones

La empresa puede intervenir como máximo en dos proyectos → $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2$

Si la empresa invierte en el proyecto 2 también debe invertir en el proyecto 1

Implicación $A \rightarrow B$

Si $x_2 = 0$ entonces $x_1 = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

Si $x_2 = 1$ entonces $x_1 = 1$

x_2	x_1	
0	0	✓
0	1	✓
1	0	✗
1	1	✓

→ $x_2 \leq x_1$

Si invierte en el proyecto 1 no puede hacerlo en el 4

$$x_1 + x_4 \leq 1$$

Las variables son mutuamente excluyentes

Solo se puede invertir en el proyecto 3 si se invierte en 1 ó 2

Requerimientos lógicos considerados

(1) Implicación $1 \rightarrow 2$

$$x_1 \leq x_2$$

GENERALIZACIÓN

$(1 \text{ o } 2 \text{ o } \ldots n) \rightarrow m$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq n x_m$$

(2) Disyunción e implicación $(1 \text{ o } 2) \rightarrow 3$

$$x_1 + x_2 \leq 2x_3$$

Requerimientos lógicos adicionales

(3) Implicación y disyunción $1 \rightarrow (2 \text{ o } 3)$

$$x_1 \leq x_2 + x_3$$

GENERALIZACIÓN

$m \rightarrow (1 \text{ o } 2 \text{ o } \ldots \text{o } n)$

$$x_m \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

(4) Conjunción e implicación $(1 \text{ y } 2) \rightarrow 3$

$$x_1 + x_2 \leq 1 + x_3$$

Requerimientos lógicos adicionales

(5) Implicación y conjunción $1 \rightarrow (2 \text{ y } 3)$

$$2x_1 \leq x_2 + x_3$$

GENERALIZACIÓN

$m \rightarrow (1 \text{ y } 2 \text{ y } \ldots \text{y } n)$

$$nx_m \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

CARRERA INGENIERÍA INDUSTRIAL

ASIGNATURA: INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES I Año: 4to.

Tema 4. Optimización de Redes.

4.1. Introducción.

4.2. Terminología de Redes.

4.3. Problemas de la Ruta Más Corta.

4.3.1. Algoritmo de DIJKSTRA para determinar la ruta más corta.

4.3.2. Método de Programación Lineal para problemas de ruta más corta con WINQSB

4.4. Problema del Árbol de Expansión Mínima.

4.4.1. Algoritmo de PRIM para la solución de problemas del Árbol de Expansión Mínima.

4.4.2. Método de Programación Lineal para la solución de problemas del Árbol de Expansión Mínima.

4.5. Problemas del Flujo Máximo.

4.5.1. Algoritmo de Trayectoria Aumentada para problemas de flujo máximo

4.5.2. Método de Programación Lineal para problemas de flujo máximo

Objetivos: Que el alumno se capaz de:

- **Construir y resolver modelos de optimización de redes, representativos de distintas situaciones utilizando diferentes algoritmos, modelos de PL y con el empleo de la herramientas informáticas WINQSB, interpretando sus salidas.**

Método: Expositivo.

Medios: Tiza y pizarra, Libro de texto, MDD, PV.

Tipo de clase: Conferencia

Bibliografía: introducción a la Investigación de Operaciones.

Materiales Didácticos Digitales entregados por el profesor.

DESARROLLO

4.1. INTRODUCCIÓN.

Los problemas de redes surgen en una gran variedad de situaciones. Las redes de transporte, eléctricas y de comunicaciones predominan en la vida diaria. La representación de redes se utiliza de manera amplia en áreas tan diversas como producción, distribución, planeación de proyectos, localización de instalaciones, administración de recursos y planeación financiera, por mencionar sólo algunos ejemplos. En realidad, una representación de redes proporciona un poderoso apoyo
visual y conceptual para mostrar las relaciones entre las componente Muchos modelos de optimización de redes son en realidad tipos especiales de problemas de

programación lineal. Por ejemplo, tanto el problema de transporte como el de asignación, que se presentaron en el capítulo anterior, pertenecen a esta categoría debido a su representación mediante una red que se mostró en la asignatura I.O 1.

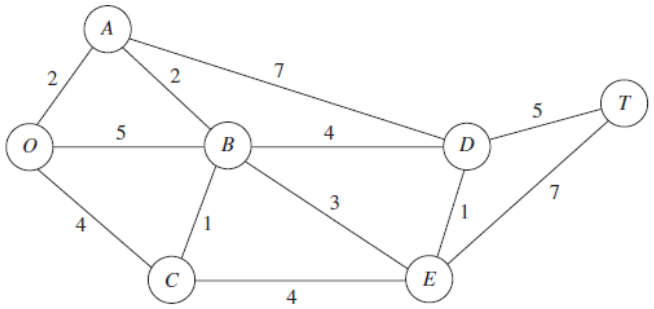
En este Tema 3 se presentará una introducción a cinco tipos importantes de problemas de redes:

- **Problema *de la ruta más corta,***

- ***Problema del árbol de mínima expansión.***
- ***Problema del flujo máximo.***
- ***Problema del flujo de costo mínimo.***
- ***Problema del modo más económico de realizar un proyecto.***
- Técnica CPM de trueque entre tiempo y costo

EJEMPLO PROTOTÍPICO

El siguiente grafico representa un parque donde *O* es la entrada al parque; las otras letras representan la localización de las casetas de los guardabosques y otras instalaciones de servicio. Los números son las distancias en km de estos caminos accidentados. El parque contiene un mirador a un hermoso paisaje en la estación *T*. Unas cuantas camionetas transportan a los visitantes desde la entrada a la estación *T* y viceversa



En este momento la administración del parque se enfrenta a tres problemas.
1. El primer problema es determinar qué ruta, desde la entrada del parque a la estación *T*, es la que representa la *distancia total más corta* para la operación de los tranvías. **(Éste es un ejemplo del problema de la ruta más corta).**

2. El segundo problema consiste en que deben instalarse líneas telefónicas subterráneas para establecer comunicación entre todas las estaciones, incluso la entrada. Debido a que la instalación es cara y perturba la ecología, se deben instalar líneas que sigan sólo los caminos necesarios para obtener comunicación entre cualquier par de estaciones. La pregunta es por dónde deben tenderse las líneas para lograr este objetivo con el *mínimo* número total de millas de cable instalado. **(Éste es un ejemplo del problema del árbol de mínima expansión)**

3. El tercer problema se refiere a que, durante la temporada pico, hay más personas que quieren tomar un tranvía a la estación *T* que aquellas a las que se les puede dar servicio. Para evitar la perturbación indebida de la ecología y de la vida silvestre de la región, se ha impuesto un racionamiento estricto al número de viajes al día que pueden hacer los tranvías en cada camino. Estos límites difieren según los caminos, de esta forma, durante la temporada pico, se pueden seguir varias rutas, sin tomar en cuenta la distancia, para aumentar el número de viajes de tranvía diarios. La pregunta es cómo planear las rutas de los distintos viajes, de manera que se *maximice* el número total de viajes que se pueden hacer al día, sin violar los
límites impuestos sobre cada camino. **(Éste es un ejemplo del problema de flujo máximo)**

4.2. TERMINOLOGÍA DE REDES

Una red consiste en un conjunto de *puntos* y un conjunto de *líneas* que unen ciertos pares de puntos. Los puntos se llaman **nodos** (o vértices); por ejemplo, la red de la figura anterior tiene siete nodos que son representados por siete círculos.
Las líneas se llaman **arcos** (o ligaduras, aristas o ramas); esta red tiene 12 arcos que corresponden a los 12 caminos del sistema del parque.

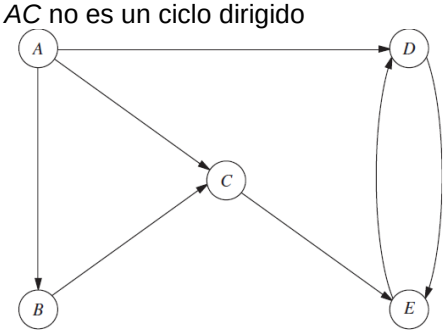
Los arcos se etiquetan al dar el nombre de los nodos en sus puntos terminales; por ejemplo, *AB* es el arco entre los nodos *A* y *B*.
Si el flujo a través de un arco se permite sólo en una dirección —como en una calle de un sentido—, se dice que el arco es un **arco dirigido**. La dirección se indica al agregar una cabeza de flecha al final de la línea que representa el arco. Cuando se etiqueta un arco dirigido con el nombre de los nodos que unen, siempre se pone primero el nodo *de donde viene* y después el nodo *hacia donde* va, esto es, un arco dirigido *del* nodo *A* al nodo *B* debe etiquetarse como *AB* y no como *BA*. Otra manera de etiquetarlo es *A* → *B*.
Si el flujo a través de un arco se permite en ambas direcciones —como una tubería que se puede usar para bombear fluido en ambas direcciones, se dice que el arco es un **arco no dirigido**. Para ayudar a distinguir entre los dos tipos de arcos, con frecuencia se hará referencia a los arcos no dirigidos con el sugestivo nombre de **ligadura.**
Una red que tiene sólo arcos dirigidos se llama **red dirigida**. De igual manera, si todos sus arcos son no dirigidos, se dice que se trata de una **red no dirig**ida

Componentes de redes representativas

Nodos	**Arcos**	**Flujo**
Ciudades	Carreteras	Vehículos
Aeropuertos	Líneas aéreas	Aviones
Estaciones de bombeo	Tuberías	Fluidos
Centros de trabajo	Rutas de manejo de materiales	Trabajos

Una **trayectoria** entre dos nodos es *una sucesión de arcos distintos* que conectan estos nodos. Por ejemplo, una de las trayectorias que conectan a los nodos *O* y *T* en la fi gura 9.1 es la sucesión de arcos *OB–BD–DT* (*O* → *B* → *D* → *T*),

Un **ciclo** es una trayectoria que comienza y termina en el mismo nodo. En una red *dirigida*, un ciclo puede ser dirigido o no dirigido, según la trayectoria en cuestión sea dirigida o no dirigida. (Como una trayectoria dirigida también es no dirigida, un ciclo dirigido es un ciclo no dirigido, pero en general el inverso no es cierto.) Por ejemplo, en la figura siguiente, *DE–ED* es un ciclo dirigido. Por el contrario, *AB–BC–AC* no es un ciclo dirigido puesto que la dirección del arco *AC* es opuesta a la de los arcos *AB* y *BC*. Por otro lado, *AB–BC–AC* no es un ciclo dirigido



Se dice que dos nodos están **conectados** si la red contiene al menos una trayectoria *no dirigida* entre ellos. (Observe que no es necesario que la trayectoria sea dirigida aun cuando la red sea dirigida.) Una **red conexa** es una red en la que cada par de nodos está conectado. Entonces, las redes de las figuras son ambas conexas. La última red no sería conexa si se eliminaran los arcos *AD* y *CE.*

Árbol de expansión, es una *red conexa* de los *n* nodos que contienen *ciclos no dirigidos*. Todo árbol de expansión tiene exactamente *n* –1 arcos, puesto que éste es el número *mínimo* de arcos necesario para tener una red conexa y el *máximo* número posible para que no haya ciclos no dirigidos.

Por último, será necesario introducir terminología adicional sobre los *flujos* en redes. La cantidad máxima de flujo (quizás infinito) que puede circular en un arco dirigido se conoce como **capacidad del arco**. Entre los nodos se pueden distinguir aquellos que son generadores netos de flujo, absolvedores netos de flujo o ninguno de los dos. Un **nodo fuente** o nodo origen tiene la propiedad de que el flujo que *sale* del nodo supera al que *entra* a él. El caso inverso es un **nodo demanda** (o nodo destino), donde el flujo que *llega* excede al que *sale* de él. Un **nodo de trasbordo** (o intermedio) satisface la *conservación del flujo*, es decir, el flujo que entra es igual al que sale

4.3. PROBLEMA DE LA RUTA MÁS CORTA

Considere una red *conexa* y *no dirigida* con dos nodos especiales llamados *origen* y *destino*. A cada *ligadura* (arco no dirigido) se asocia una *distancia* no negativa. El objetivo es encontrar la ruta más corta, la trayectoria con la mínima distancia total del origen al destino.
Se dispone de un algoritmo relativamente sencillo para manejar este problema. La esencia del procedimiento es que analiza toda la red a partir del origen; identifica de manera sucesiva la ruta más corta a cada uno de los nodos en orden ascendente de sus distancias (más cortas), desde el origen; el problema queda resuelto en el momento de llegar al nodo destino.

Problemas de aplicación de la ruta más corta.

1. Minimizar la *distancia* total recorrida, como en el ejemplo de Parque.
2. Minimizar el *costo* total de una secuencia de actividades.
3. Minimizar el *tiempo* total de una secuencia de actividades.

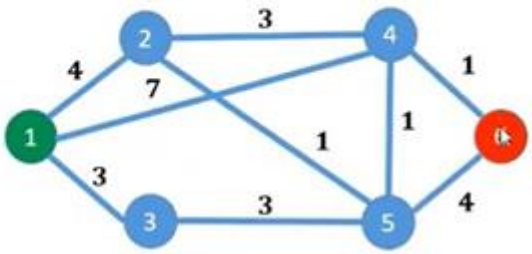
Incluso, es posible que los tres tipos coexistan en el *mismo* problema. Por ejemplo, suponga que se desea encontrar la mejor ruta de un lugar a otro a través de cierto número de lugares intermedios.
En este tipo de casos se tiene la opción de definir la mejor ruta como la que minimiza la *distancia* total recorrida, la que minimiza el *costo* total en el que se incurre o la que minimiza el *tiempo* total que se requiere.

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

- Algoritmo de DIJKSTRA.
- Programación Lineal (PL)

4.3.1. ALGORITMO DE DIJKSTRA PARA DETERMINAR LA RUTA MÁS CORTA

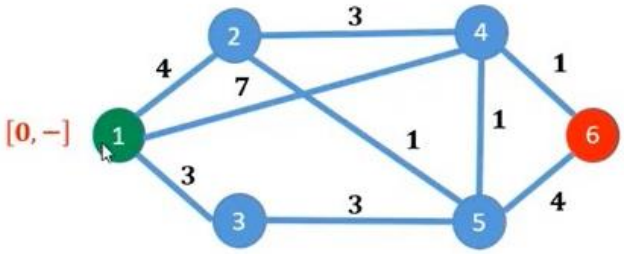
EJEMPLO 1 Determine la ruta más corta entre los nodos 1 y 6 de la siguiente red no direccionada



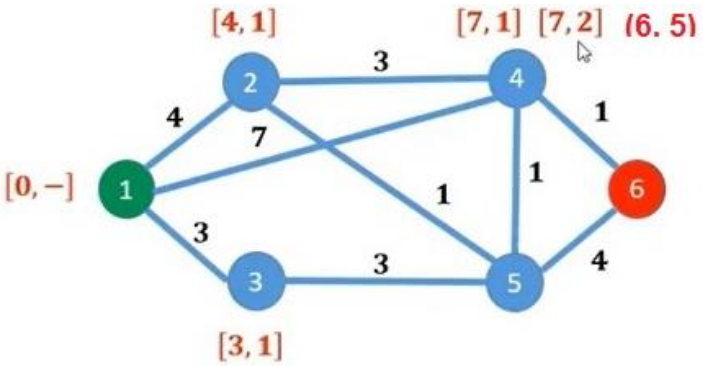
Se crean etiquetas a cada nodo que pueden ser temporales o permanentes, con el siguiente formato:

(a, b) donde “a” es la distancia acumulada hasta el nodo y “b” el nodo predecesor

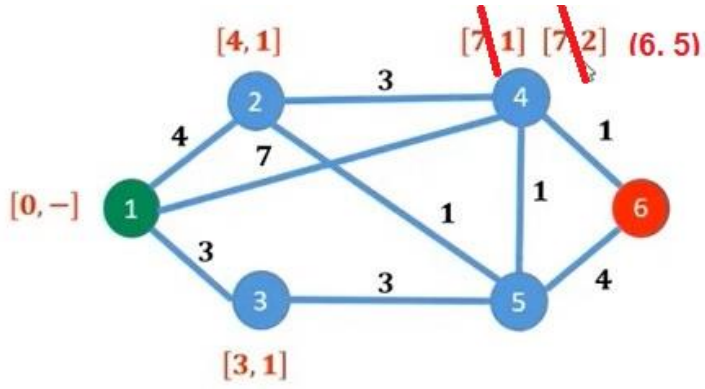
1. Comenzar etiquetando el primer nodo de la red, su distancia es cero y no tiene precedente

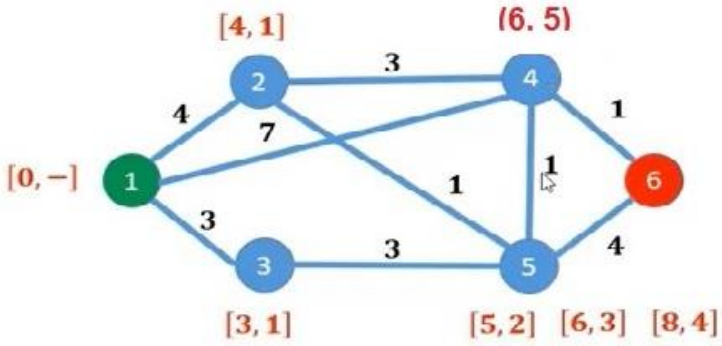


2. A partir de este nodo se ramificar hacia afuera y a cada nodo de la red se le asigna una etiqueta temporal para cada distancia y nodo precedente.

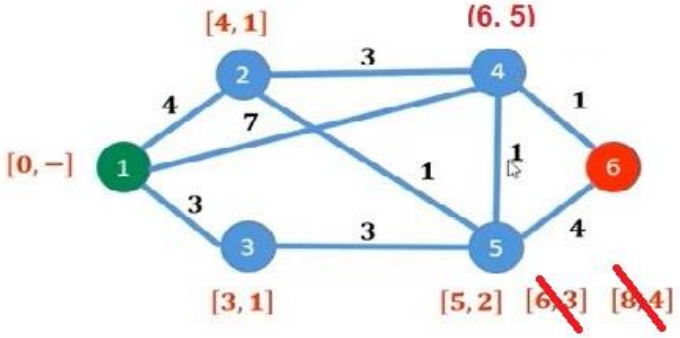


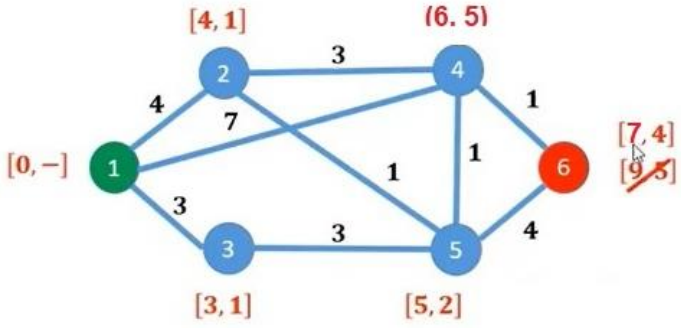
3. Se selecciona de cada nodo la etiqueta temporal menor y se convierte en la etiqueta permanente





Se repiten los pasos hasta que todas las etiquetas sean permanentes

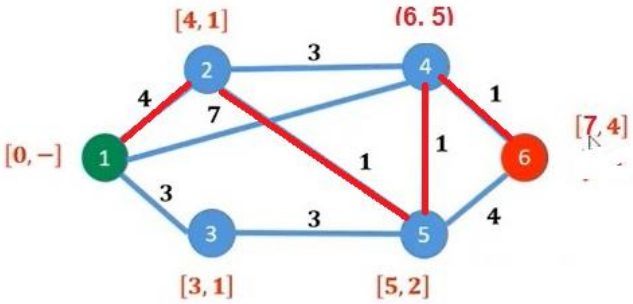




Ahora se puede determinar la ruta más corta comenzando por el nodo destino: del nodo 6 al nodo 4; del nodo 4 al nodo 5; del nodo 5 al nodo 2 y de este al nodo 1 quedando la ruta mas corta de la siguiente maneta

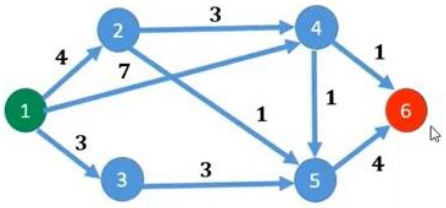
R/ Nodo 1 al nodo 2, al nodo 5 al nodo 4 y al nodo 6 con una distancia de 7 km

2 + 1 + 1 * 1 = 7 km



4.3.2. MÉTODO DE PROGRAMACIÓN LINEAL PARA PROBLEMAS DE LA RUTA MÁS CORTA CON WINQSB

EJEMPLO 2. Determinar la ruta más corta entre los nodos 1 y 6 de la siguiente red direccionada



Definición de las variables

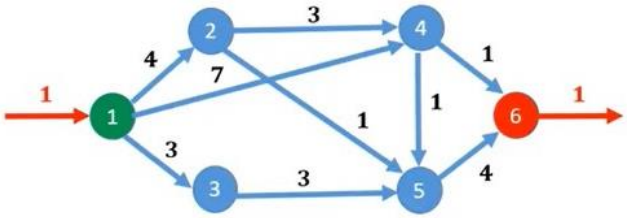
X_{ij}: distancia desde el nodo i hasta el nodo j

Función objetivo

$$\text{Min } Z = 4X_{12} + 3X_{13} + 7X_{14} + 3X_{24} + X_{25} + 3X_{35} + X_{45} + X_{46} + 4X_{56}$$

Sujeto a las restricciones

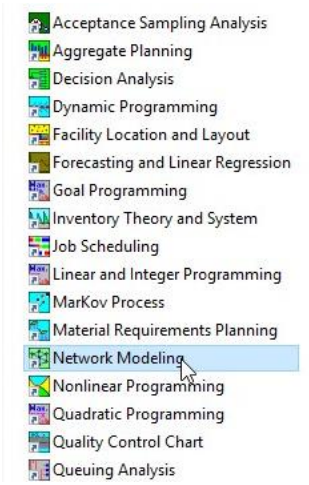
(Se debe equilibrar los nodos, lo que entra es igual a lo que sale, se adiciona ficticiamente una entrada de 1 al nodo 1 y una salida de 1 al nodo 6)



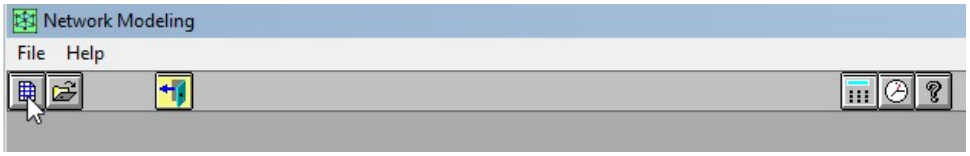
Restricción 1	$1 = X_{12} + X_{13} + X_{14}$	$X_{12} + X_{13} + X_{14} = 1$
Restricción 2	$X_{12} = X_{24} + X_{25}$	$X_{12} - X_{24} - X_{25} = 0$
Restricción 3	$X_{13} = X_{35}$	$X_{13} - X_{35} = 0$
Restricción 4	$X_{14} + X_{24} = X_{45} + X_{46}$	$X_{14} + X_{24} - X_{45} - X_{46} = 0$
Restricción 5	$X_{25} + X_{35} + X_{45} = X_{56}$	$X_{25} + X_{35} + X_{45} - X_{56} = 0$
Restricción 6	$X_{46} + X_{56} = 1$	$X_{46} + X_{56} = 1$
	No negatividad	$X_{ij} \geq 0$

Una vez formulado el modelo de Programación Lineal se emplea el paquete WINQSB

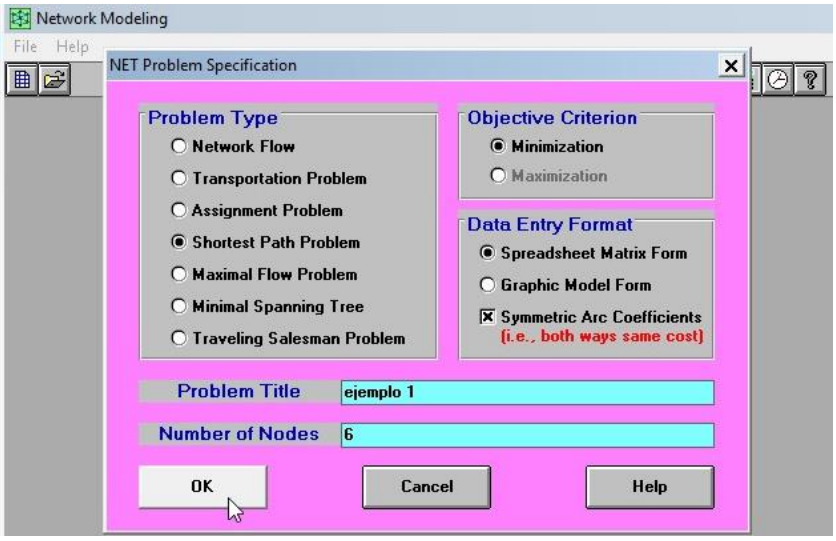
1. Desde el paquete WINQSB se selecciona la opción **Network Modeling**



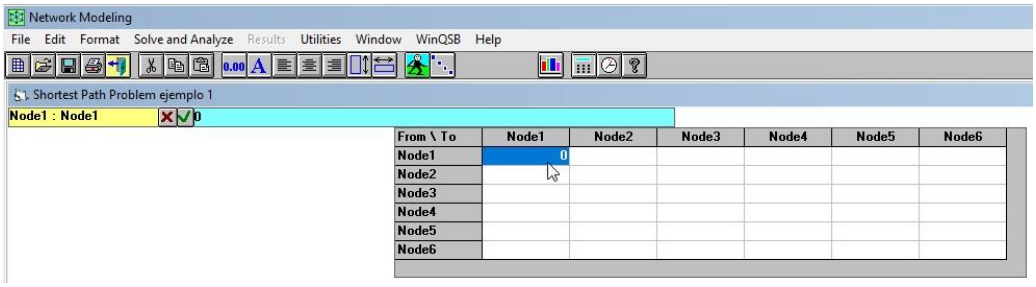
2. Se selecciona un nuevo archivo.



3. Se especifica el tipo del problema, en este caso Ruta Más Corta; el formato de los datos, el titulo; la cantidad de nodos.

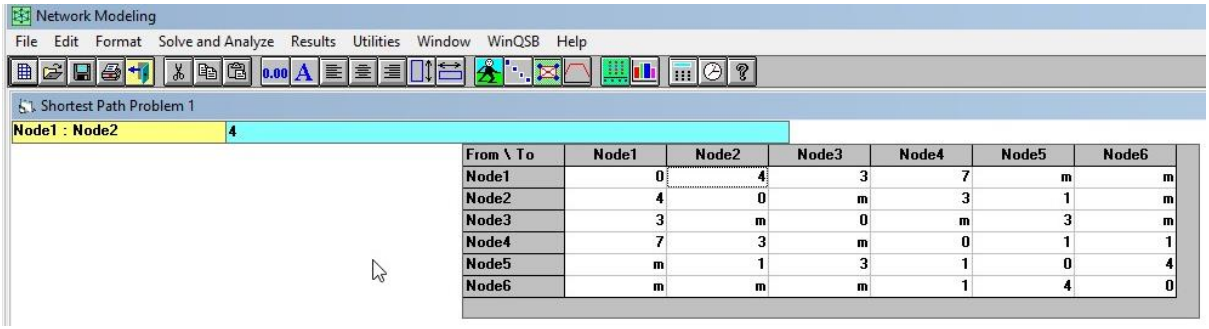


4. Se introducen los datos.

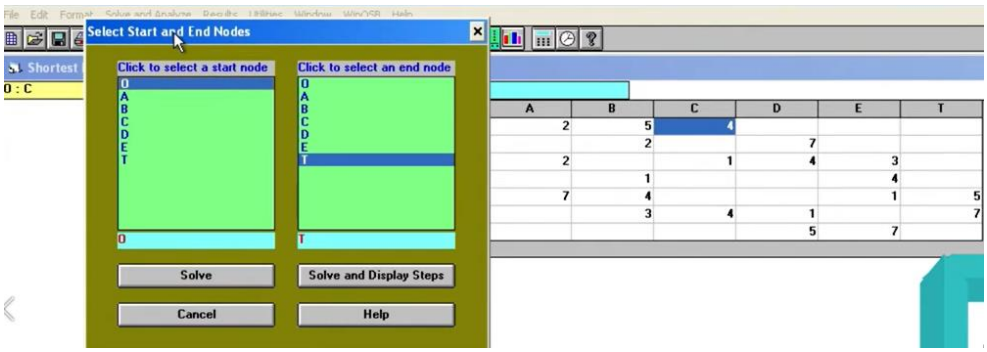


5. Se completa la matriz de datos con los valores de las distancias entre cada nodo.

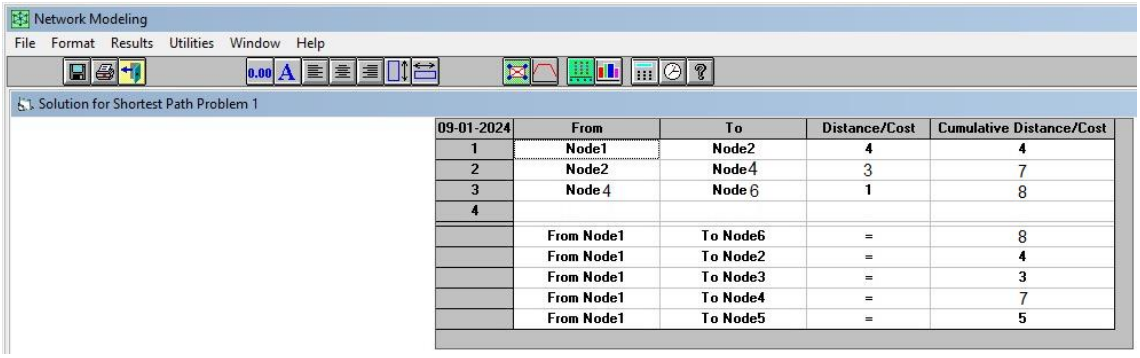
(Nota: si no hay arco o ligadura entre dos nodos, se deja en blanco o se pone m en la celda correspondiente)



5ª) Posteriormente se especifican el nodo de inicio y final



6. Se obtienen los resultados y se interpretan.



09-01-2024	From	To	Distance/Cost	Cumulative Distance/Cost
1	Node1	Node2	4	4
2	Node2	Node4	3	7
3	Node4	Node6	1	8
4				
	From Node1	To Node6	=	8
	From Node1	To Node2	=	4
	From Node1	To Node3	=	3
	From Node1	To Node4	=	7
	From Node1	To Node5	=	5

Solución

La Ruta Más Corta es del nodo 1, al nodo 2, al nodo 4, al nodo 6 con un recorrido de respectivo de 4 + 3 + 1 = 8 km.

4.4. PROBLEMA DEL ÁRBOL DE EXPANSIÓN.

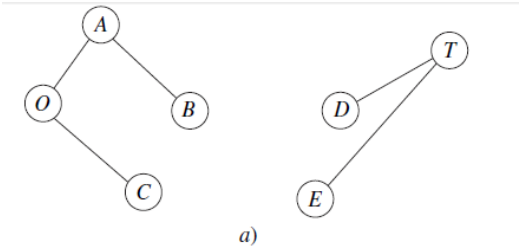
El problema del árbol de expansión mínima tiene algunas similitudes con el problema de la ruta más corta que se presentó en la sección anterior. Que se puede resumir según la siguiente tabla.

PROBLEMA DE LA RUTA MÁS CORTA	**PROBLEMA DEL ÁRBOL DE EXPANSIÓN MÍNIMA**
En ambos casos se considera una red *no dirigida* y *conexa*	
La información dada incluye alguna medida de distancia, costo, tiempo, etc. asociada con cada ligadura	
Los dos problemas involucran también el hecho de seleccionar un conjunto de ligaduras con la *longitud total más corta*	
Las ligadura seleccionada debe proporcionar la trayectoria mínima que conecte el origen y el destino	Las ligaduras seleccionadas deben proporcionar la trayectoria mínima que conecte a todos los nodos entre entre si.

El Problema del Árbol de expansión Mínima se puede resumir asi:

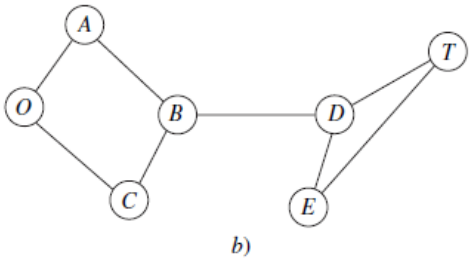
1. Se tienen los *nodos* de una red pero no las *ligaduras*. En su lugar se proporcionan las ligaduras potenciales y la longitud positiva de cada una si se insertan en la red. (Las medidas alternativas para la longitud de una ligadura incluyen distancia, costo y tiempo.)
2. Si tiene n nodos debe tener (n-1) ligaduras para satisfacer el requisito de que haya un camino entre *cada* par de nodos y no tener ciclos,
3. El objetivo es satisfacer este requisito de manera que se minimice la longitud total de las ligaduras insertadas en la red.

Ejemplo de redes



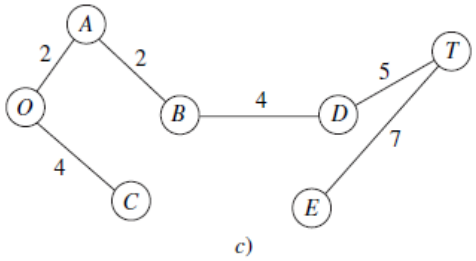
a)

a) este caso no es un árbol de expansión porque los nodos O,A,B,C, no se conectan con los nodos D,E,F



b)

b) no es un árbol de expansión porque O, A,B, C, forman un ciclo y D, E, T forman otro ciclo, además tiene 6 ligaduras, una de más



c)

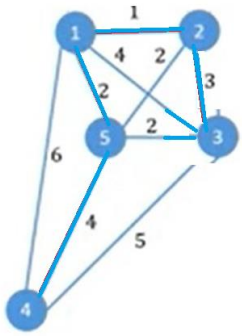
c) si es un árbol de expansión

Algunas aplicaciones
A continuación se proporciona una lista de algunos tipos importantes de aplicaciones de este problema.

1. Diseño de redes de telecomunicación (redes de fibra óptica, de computadoras, telefónicas, de televisión por cable, etcétera).
2. Diseño de redes de transporte para minimizar el costo total de proporcionar las ligaduras (vías ferroviarias, carreteras, etcétera).
3. Diseño de una red de líneas de transmisión de energía eléctrica de alto voltaje.
4. Diseño de una red de cableado de equipo eléctrico —como sistemas de cómputo para minimizar la longitud total de cable.
5. Diseño de una red de tuberías para conectar varias localidades

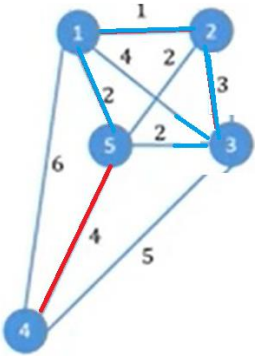
4.4.1. ALGORITMO DE PRIM PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DEL ÁRBOL DE EXPANSIÓN MÍNIMA.

EJEMPLO 3. Una pequeña escuela dispone de 5 computadoras, la distancia en metros de cada equipo se muestra en la siguiente figura.



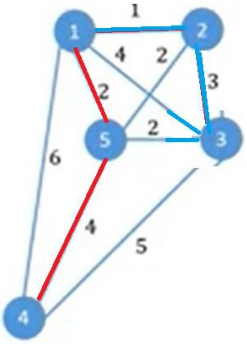
¿Cuál es la longitud de cable mínima para conectar todas las computadoras?

1. Comenzar con cualquier nodo y unir a este el nodo más cercano. Comenzando por el nodo 4 el más cercano es el nodo 5.



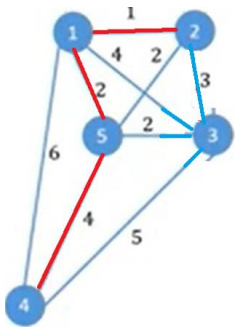
2. Los dos nodos forman ahora un conjunto conectados y el resto de los nodos un conjunto desconectado.

3. Elegir el nodo desconectado más cercano al conjunto conectado y agregarlo al conjunto conectado. El nodo desconectado más cercano al conjunto conectado 4, 5 es el 1 y se agrega al conjunto conectado.

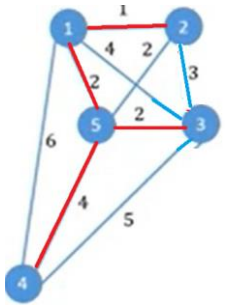


4. Se repite el algoritmo hasta conectar todos los nodos sin ciclos.

El nodo desconectado más cercano al conjunto conectado 4, 5, 1 es el nodo 2 y se agrega al conjunto conectado



El nodo desconectado más cercano al conjunto conectado 4, 5, 1, 2 sin formar un ciclo es el 3 y se agrega al conjunto conectado.

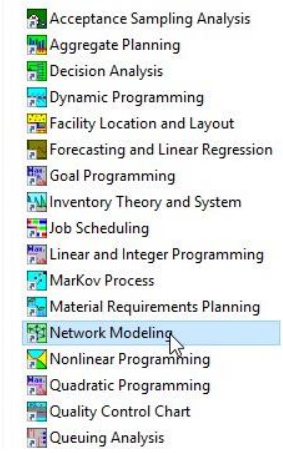


R/ Árbol de expansión mínimo: 45, 51, 12, 53, con una extensión de

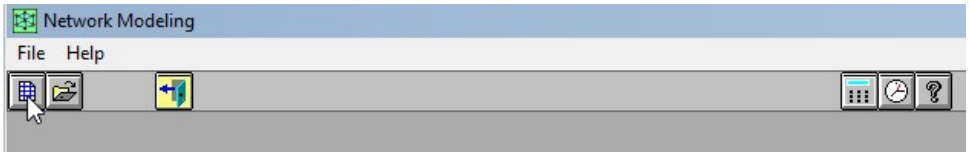
4 + 2 + 1 +2 = 9 m

4.4.2. MÉTODO DE PROGRAMACIÓN LINEAL CON WINQSB PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DEL ÁRBOL DE EXPANSIÓN MÍNIMA.

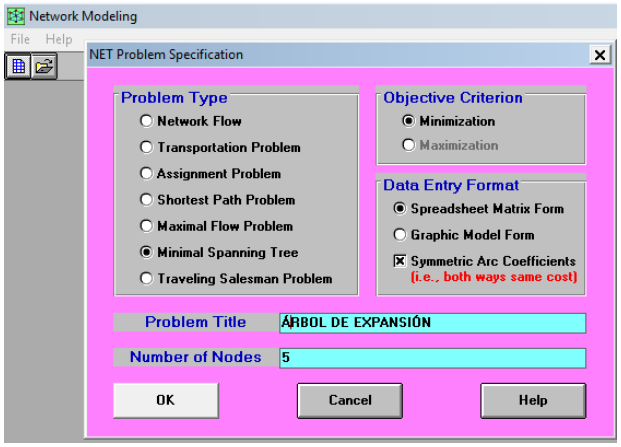
1. Desde el paquete WINQSB se selecciona la opción **Network Modeling**



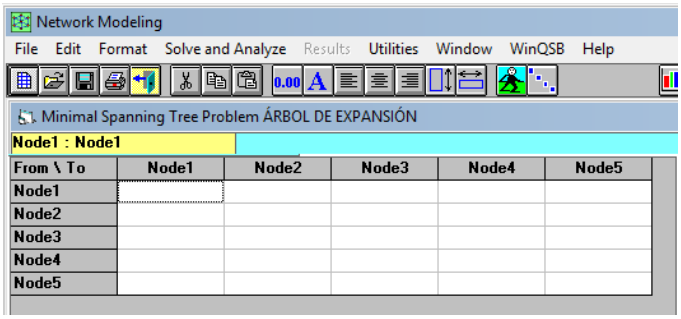
2. Se selecciona un nuevo archivo.



3. Se especifica el tipo del problema, en este caso el Árbol de Expansión Mínima, el formato de los datos, el titulo; la cantidad de nodos.

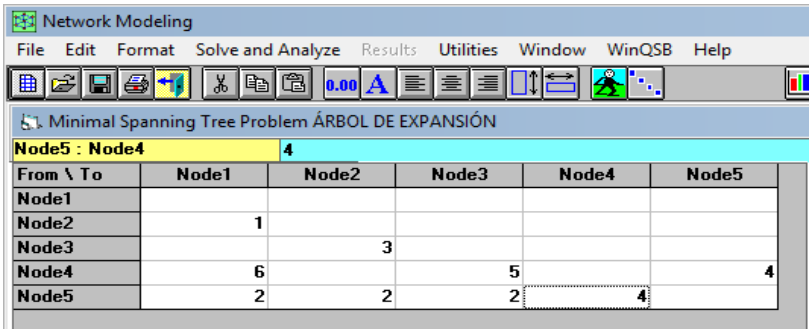


4. Se introducen los datos.



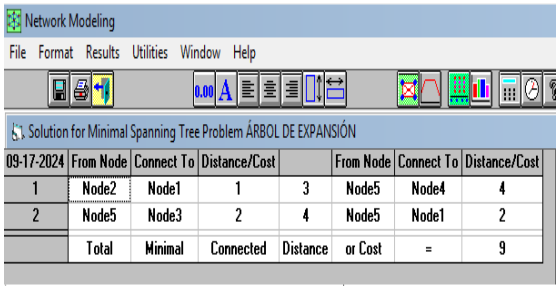
5. Se completa la matriz de datos con los valores de las distancias entre cada nodo.
(Nota: si no hay arco o ligadura entre dos nodos, se deja en blanco).

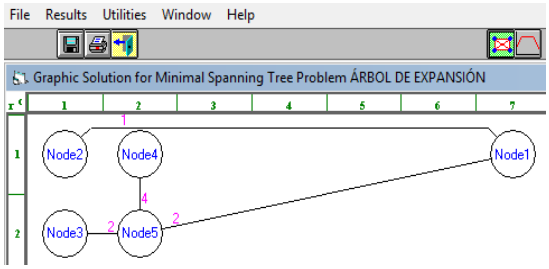
Se da Resolver



6) Se obtienen los resultados y se interpretan.

La distancia mínima para conectar todas las computadoras es de 9 m





R/ La red iría de 21, 53, 54, 51 con 9 m de longitud.

4.5. PROBLEMA DE FLUJO MÁXIMO.

Consiste en que, dada una red de nodos y arcos, estos últimos con una capacidad determinada y con un nodo origen (fuente) y un nodo destino (sumidero), se trata de hallar la cantidad máxima de flujo que puede circular desde el nodo origen hasta el nodo destino de manera que el flujo individual de cada arco no supere la capacidad del mismo

En términos generales, el problema de flujo máximo se puede describir de la siguiente manera.
1. Todo flujo a través de una red conexa dirigida se origina en un nodo, llamado **origen**, y termina en otro nodo llamado **destino.** En el ejemplo anterior son O y T respectivamente
2. Los nodos restantes son *nodos de trasbordo* (*A*, *B*, *C*, *D* y *E*).
3. Se permite el flujo a través de un arco sólo en la dirección indicada por la flecha, donde la cantidad máxima de flujo está dada por la *capacidad* del arco. En el origen, todos los arcos señalan hacia afuera. En el *destino*, todos señalan hacia el nodo.

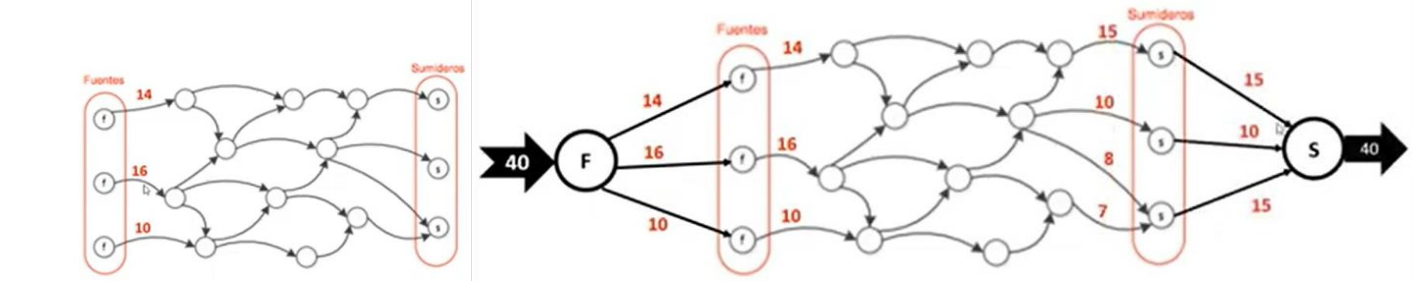
4. El objetivo es maximizar la cantidad total de flujo del origen al destino. Esta cantidad se mide en cualquiera de las dos maneras equivalentes, esto es, la cantidad que *sale del origen* o la cantidad que *entra al destino*.

Algunas aplicaciones

A continuación se mencionan algunos tipos de aplicaciones comunes del problema del flujo máximo.

1. Maximizar el flujo a través de la red de distribución de una compañía desde sus fábricas hasta sus clientes.
2. Maximizar el flujo a través de la red de suministros de una compañía de proveedores a las fábricas.
3. Maximizar el flujo de petróleo por un sistema de tuberías.
4. Maximizar el flujo de agua a través de un sistema de acueductos.
5. Maximizar el flujo de vehículos por una red de transporte.

En algunas de estas aplicaciones, el flujo a través de la red se puede originar en más de un nodo y también puede terminar en más de uno, aunque el problema de flujo máximo puede tener sólo un origen y un destino. Por ejemplo, una red de distribución de una compañía tiene varias fábricas y múltiples clientes. En este caso se recurre a una reformulación ingeniosa para ajustar esta situación al problema de flujo máximo. Se trata de aumentar la red original para que incluya *un origen ficticio*, *un destino ficticio* y algunos arcos nuevos. El origen ficticio se maneja como el nodo que da origen a todo el flujo que en realidad se origina en algunos otros nodos. En cada uno de estos otros nodos se inserta un nuevo arco que va desde el origen ficticio hasta este nodo, donde la capacidad del arco es igual al flujo máximo que se puede originar en este nodo. De manera similar, el destino ficticio se trata como el nodo que absorbe todo el flujo que, en realidad, termina en algún otro nodo. Por lo tanto, se coloca un nuevo arco desde cada uno de los otros nodos hasta el destino ficticio con capacidad igual al flujo máximo que en realidad termina en este nodo. Debido a estos cambios, todos los nodos de la red original se convierten en nodos de trasbordo para que la red aumentada tenga un solo origen (la fuente ficticia) y un solo destino (el destino ficticio) y se ajuste al problema del flujo máximo.



Métodos de solución:

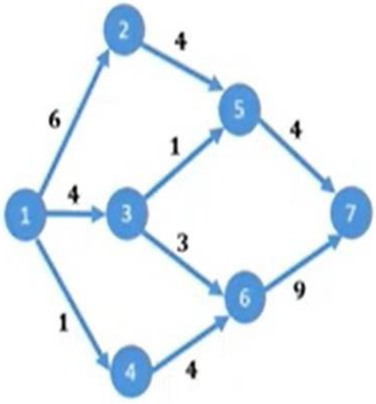
- **Algoritmo de Trayectoria Aumentada (Ford-Fulkerson).**
- **Método de Programación Lineal.**

4.5.1. ALGORITMO DE TRAYECTORIA AUMENTADA (FORD-FULKERSON). PARA PROBLEMAS DE FLUJO MÁXIMO

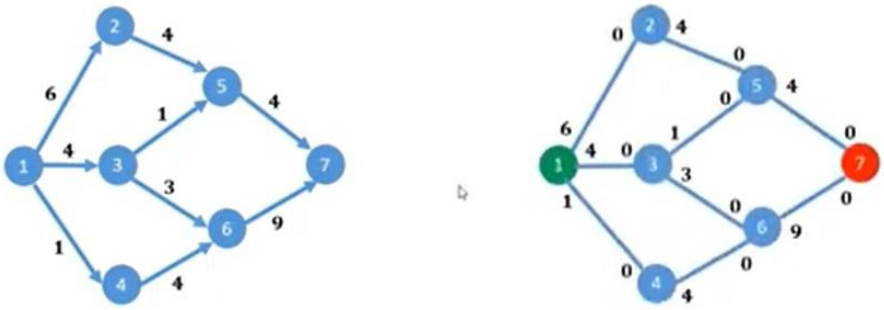
Sobresale tres conceptos básicos.

- **Capacidad residual**
- **Red residual**
- **Trayectoria aumentada**

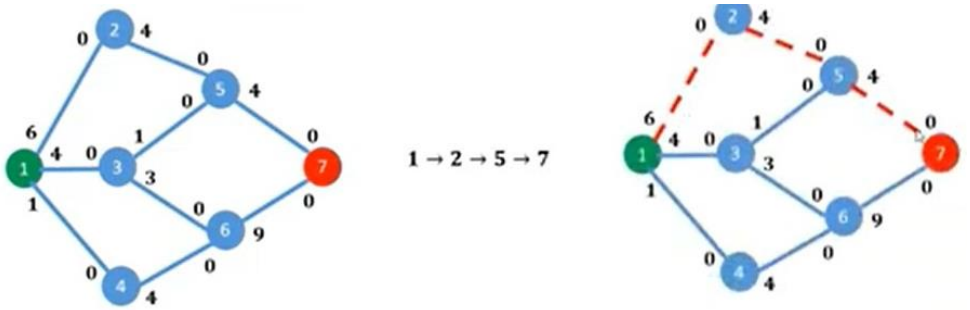
EJEMPLO 4. Hallar el flujo máximo de agua que puede circular por la siguiente red.



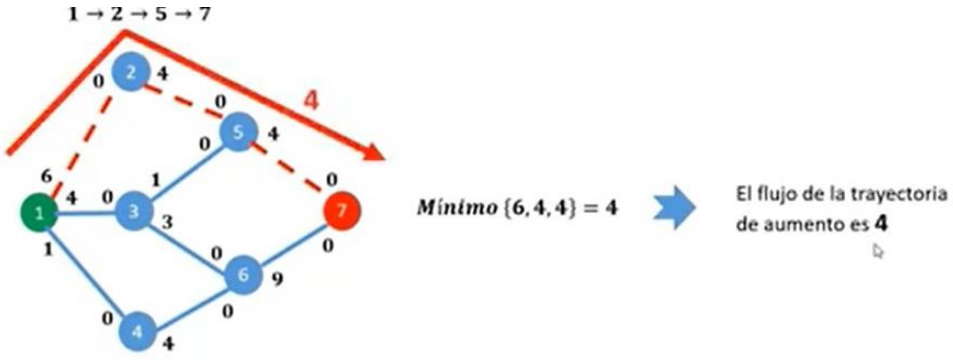
1. Preparar la red colocando flechas en el sentido del flujo y se colocan cero las capacidades de todos los nodos



2. Obtener una trayectoria de aumento, empleando el criterio de ir siempre por la trayectoria que proporcione una mayor capacidad residual por cada nodo.

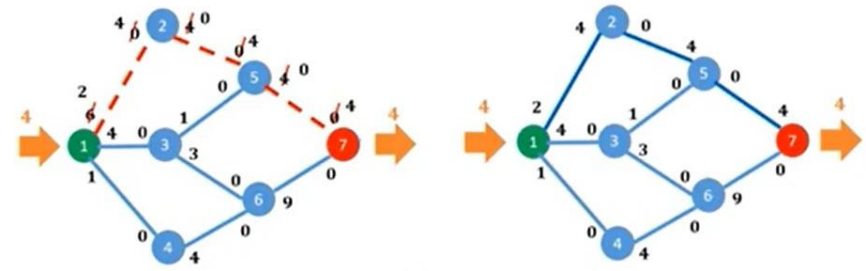


3. Determinar el flujo de la trayectoria de aumente que corresponderá al valor mínimo de las capacidades residuales de los arcos que la forman.



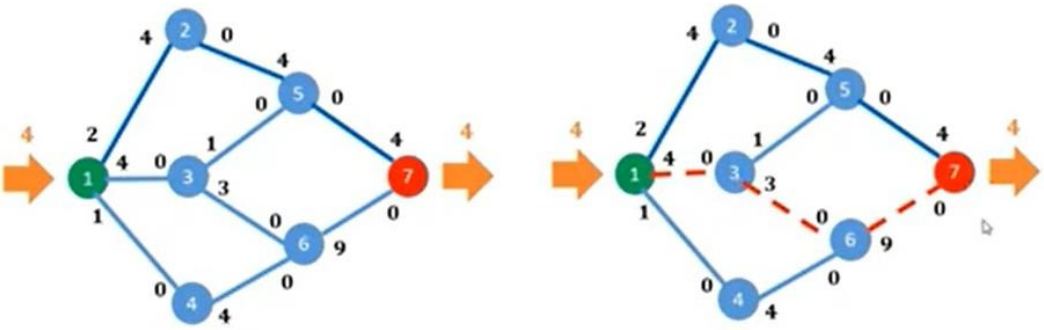
4. Actualizar la red. Se modifican las capacidades residuales de cada arco, así como el flujo total

El flujo de la trayectoria de aumento es **4**

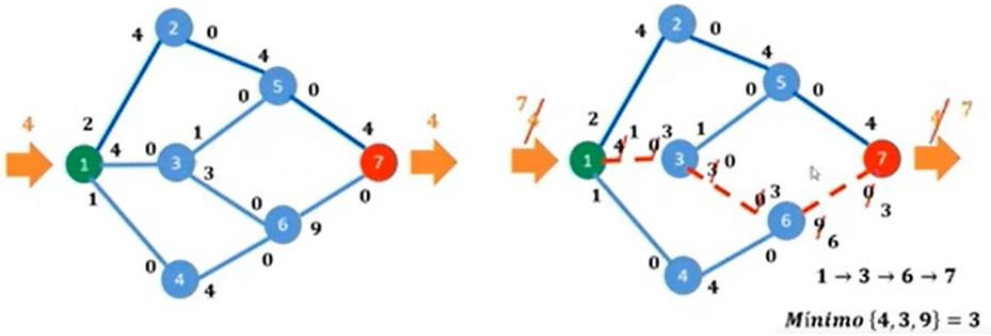


5. Se repite el procedimiento desde el paso 2 hasta que no existan más trayectorias de aumento.

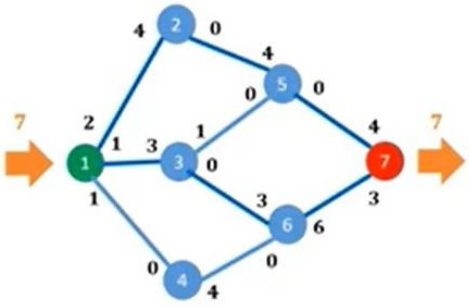
2. Obtener una trayectoria de aumento, empleando el criterio de ir siempre por la trayectoria que proporcione una mayor capacidad residual por cada nodo.



3. Determinar el flujo de la trayectoria de aumente que corresponderá al valor mínimo de las capacidades residuales de los arcos que la forman.

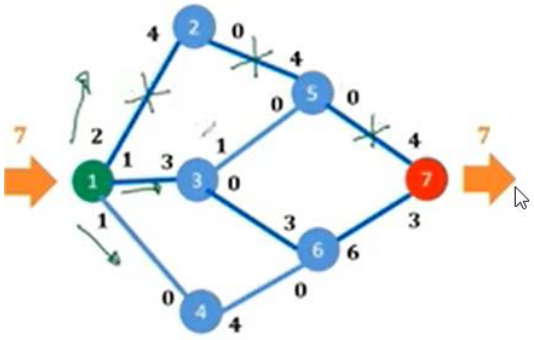


4. Actualizar la red. Se modifican las capacidades residuales de cada arco, así como el flujo total

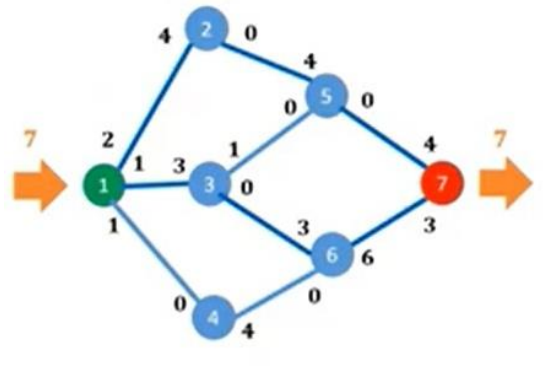


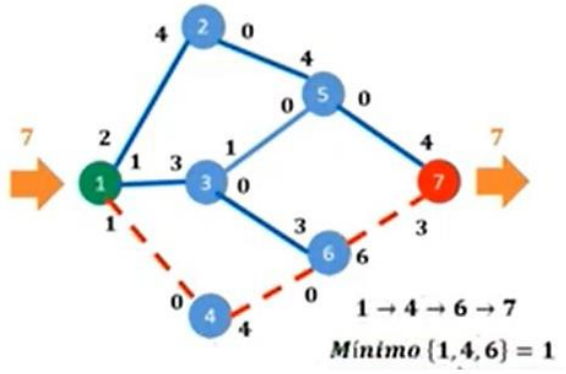
2. Obtener una trayectoria de aumento, empleando el criterio de ir siempre por la trayectoria que proporcione una mayor capacidad residual por cada nodo.

En este caso la trayectoria indicaría el nodo 1-2 pero vemos que esta trayectoria tiene nodos en que su capacidad residual es cero (nodos colapsados 2,5) también sucede con la trayectoria con el nodo 1-3. Solo queda la trayectoria por el nodo 1-4.

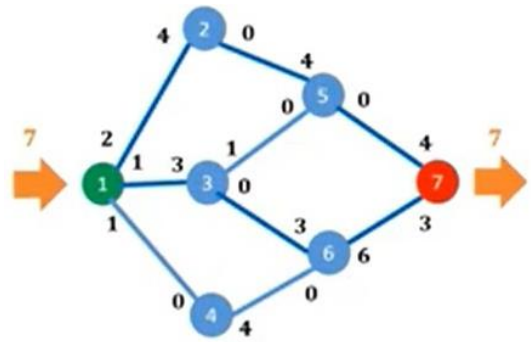


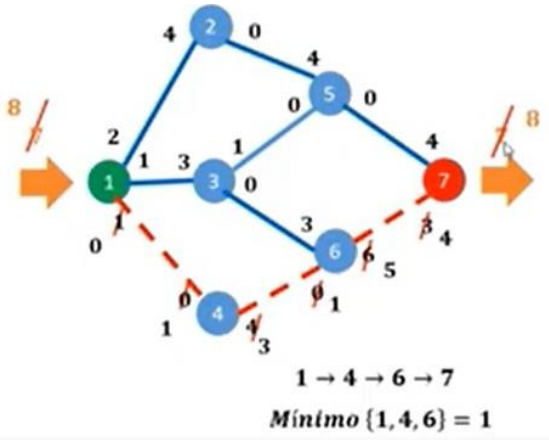
3. Determinar el flujo de la trayectoria de aumente que corresponderá al valor mínimo de las capacidades residuales de los arcos que la forman.





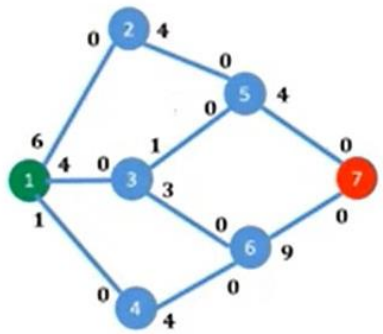
4. Actualizar la red. Se modifican las capacidades residuales de cada arco, así como el flujo total



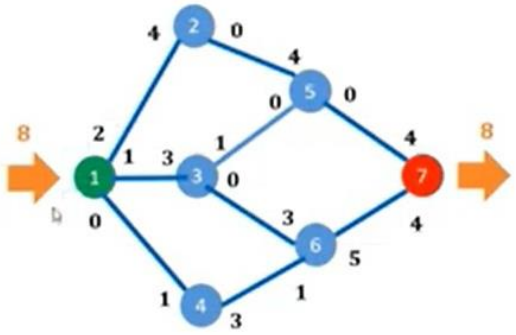


Como no quedan trayectorias aumentadas el resultado es

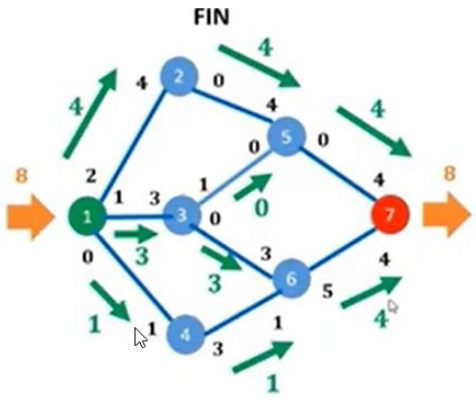
INICIO



FIN

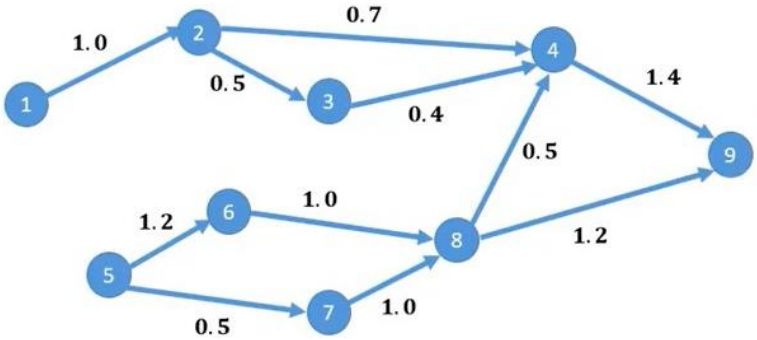


El flujo máximo que circula por la red es de 8, distribuido de esta manera por cada arco.



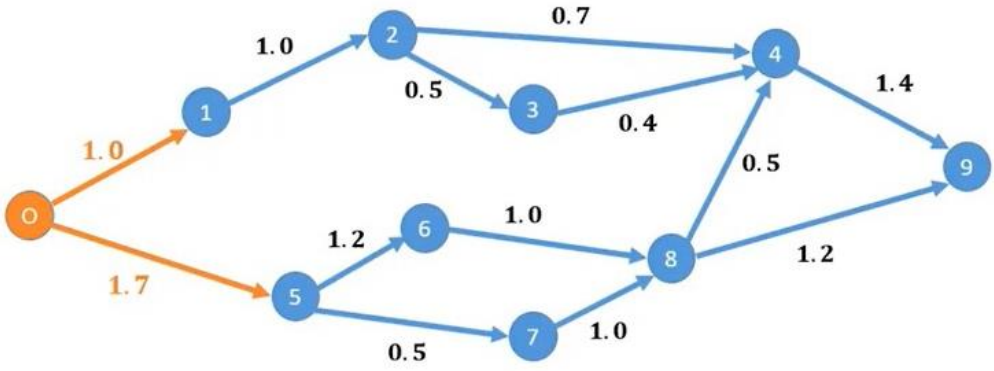
4.5.2. METODO DE PROGRAMACIÓN LINEAL PARA PROBLEMA DE FLUJO MÁXIMO

EJEMPLO 5. Una red muestra los caudales m^3/s de los colectores de la red de drenaje de una pequeña ciudad. En tiempos de lluvia la capacidad de drenaje se ve sobrepasada y la ciudad sufre inundaciones. Se propone ampliar el colector principal para evacuar eficientemente las precipitaciones.





En este problema hay dos orígenes cuando solo debe existir uno por cuanto es necesario crear un origen ficticio como se muestra a continuación.



Definición de las variables

X_{ij}: Flujo que circula desde el nodo i hasta el nodo j

X_{01}, X_{05}, X_{12}, X_{23}, X_{24}, X_{34}, X_{49}, X_{56}, X_{57}, X_{68}, X_{78}, X_{84}, X_{89}

Función objetivo

Max Z = $X_{01}+X_{05}$ Maximizar la entrada o **Max Z = $X_{49}+X_{89}$** Maximizar la salida

Sujeto a restricciones

Ecuaciones de balance en los nodos de trasbordo

Nodo 1:	$X_{01} = X_{12}$	Nodo 5:	$X_{05} = X_{56} + X_{57}$
Nodo 2:	$X_{12} = X_{23} + X_{24}$	Nodo 6:	$X_{56} = X_{68}$
Nodo 3:	$X_{23} = X_{34}$	Nodo 7:	$X_{57} = X_{78}$
Nodo 4:	$X_{24} + X_{34} + X_{84} = X_{49}$	Nodo 8:	$X_{68} + X_{78} = X_{84} + X_{89}$

Restricciones de capacidad

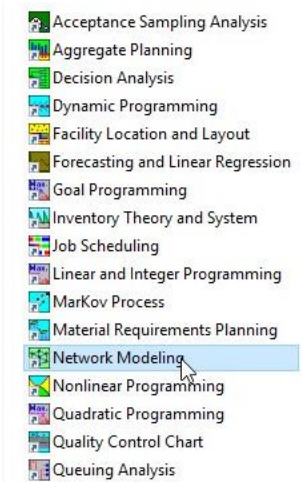
$X_{01} \leq 1$	$X_{24} \leq 0.7$	$X_{57} \leq 0.5$
$X_{05} \leq 1.7$	$X_{34} \leq 0.5$	$X_{68} \leq 1$
$X_{12} \leq 1$	$X_{49} \leq 1.4$	$X_{78} \leq 1$
$X_{23} \leq 0.5$	$X_{56} \leq 1.2$	$X_{84} \leq 0.5$
		$X_{89} \leq 1.2$

Restricción de no negatividad

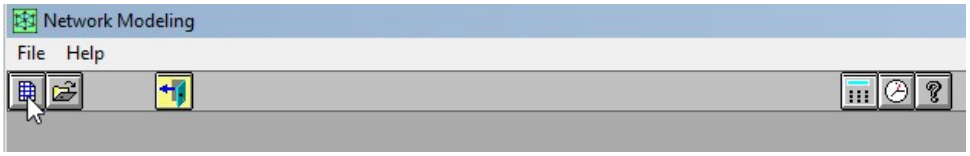
$X_{ij} \geq 0$ i= (0,1…9) y j= (1…9)

Una vez formulado el modelo de Programación Lineal se emplea el paquete WINQSB

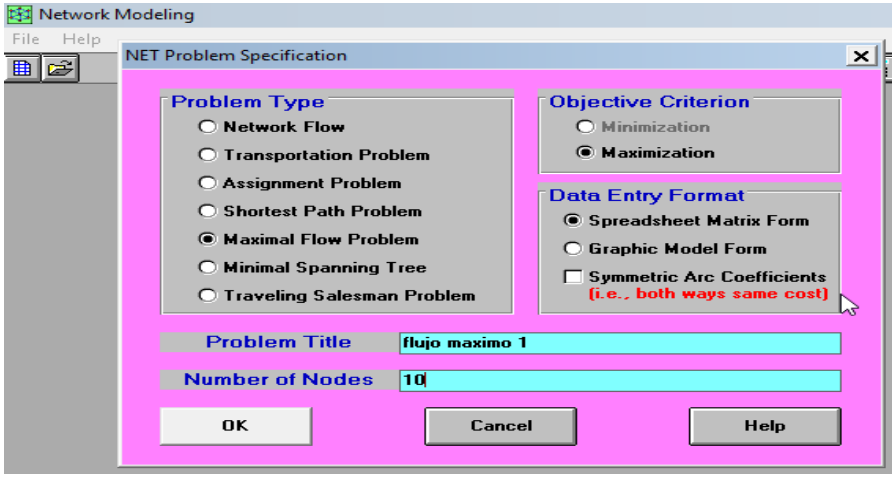
1. Desde el paquete WINQSB se selecciona la opción **Network Modeling**



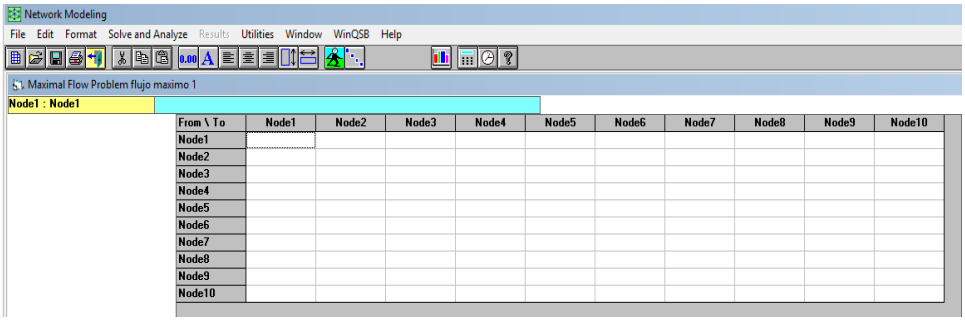
2. Se selecciona un nuevo archivo.



3. Se especifica el tipo del problema, en este caso Flujo Máximo; el formato de los datos, el titulo; la cantidad de nodos.

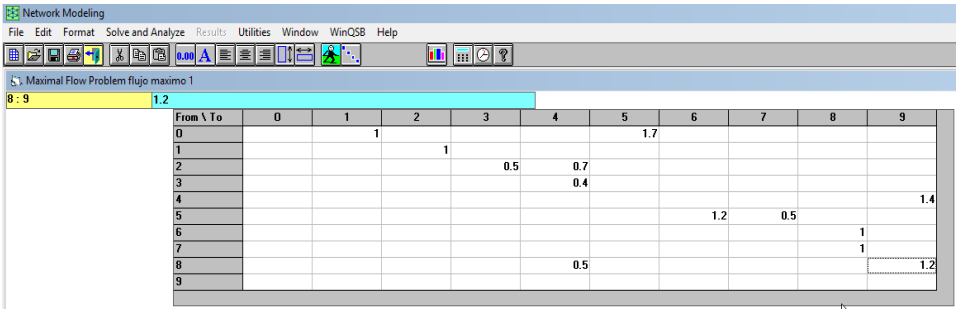


4. Se introducen los datos.

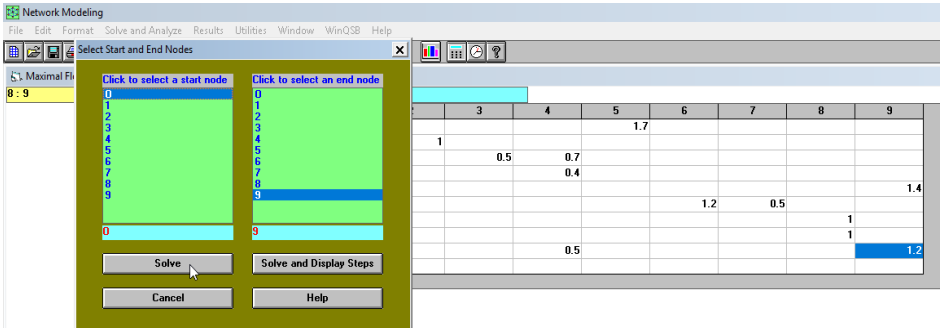


5. Se edita y completa la matriz de datos con los valores de las distancias entre cada nodo, se resuelve el problema

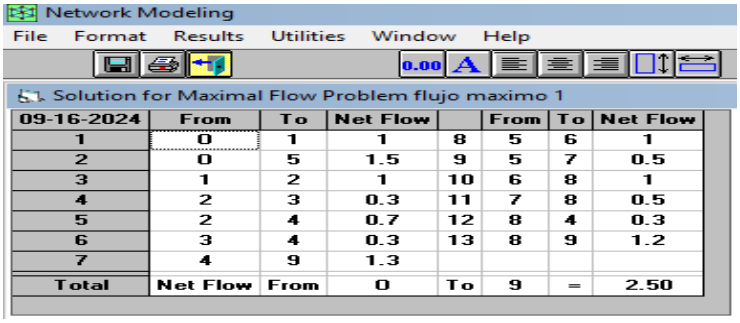
(Nota: si no hay arco o ligadura entre dos nodos, se deja en blanco o se pone m en la celda correspondiente)



5a) Se determinan los puntos de origen y destino



6. Se obtienen los resultados y se interpretan.



09-16-2024	From	To	Net Flow		From	To	Net Flow
1	0	1	1	8	5	6	1
2	0	5	1.5	9	5	7	0.5
3	1	2	1	10	6	8	1
4	2	3	0.3	11	7	8	0.5
5	2	4	0.7	12	8	4	0.3
6	3	4	0.3	13	8	9	1.2
7	4	9	1.3				
Total	Net Flow	From	0	To	9	=	2.50

Solución: el flujo máximo de la red es de 2.5 y se obtienen los flujos de cada arco.

CONCLUSIONES:

- En este Tema 3 de Optimización de redes se define un conjunto de conceptos básicos como son el de red, nodo, arcos, red dirigida y no dirigida, arco dirigido y no dirigido. Además se presenta una introducción a diferentes tipos importantes de problemas de redes:
    - **Problema *de la ruta más corta,***
    - ***Problema del árbol de mínima expansión.***
    - ***Problema del flujo máximo.***

Existen otros problemas que se abordarán en otro momento como son

- ***Problema del flujo de costo mínimo.***
- ***Problema del modo más económico de realizar un proyecto.***

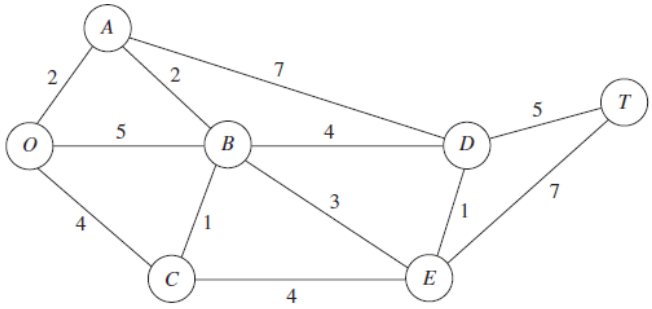
- Se estudiaron diferentes algoritmos para estos problemas.
    - DIJKSTRA para determinar la ruta más corta
    - Algoritmo de PRIM para la solución de problemas del Árbol de Expansión Mínima
    - Algoritmo de Trayectoria Aumentada para problemas de flujo máximo.
- Se formularon los Modelos de Programación Lineal (PL) para la solución de estos problemas

ESTUDIO INDIVIDUAL.

El siguiente grafico representa un parque donde *O* es la entrada al parque; las otras letras representan la localización de las casetas de los guardabosques y otras instalaciones de servicio. Los números son las distancias en km de estos caminos accidentados. El parque contiene un mirador a un hermoso paisaje en la estación *T*. Unos cuantos ómnibus transportan a los visitantes desde la entrada a la estación *T* y viceversa

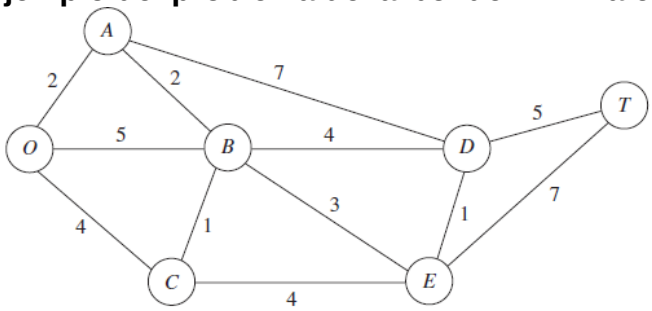
Ejercicio 1.

Determinar qué ruta, desde la entrada O del parque a la estación *T*, es la *distancia total más corta* para la operación de los ómnibus. **(Éste es un ejemplo del problema de la ruta más corta).**



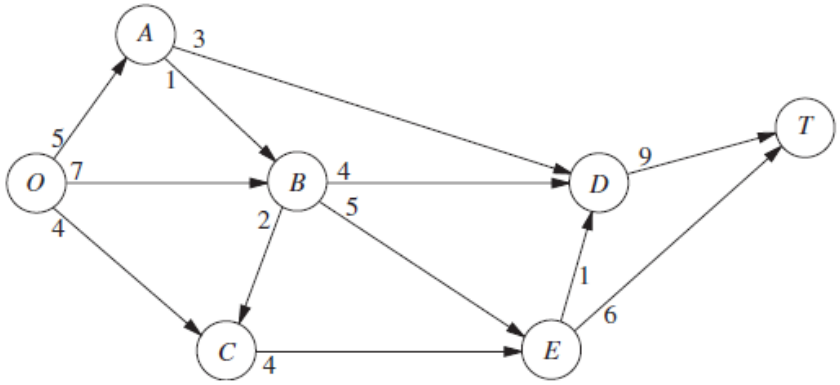
Ejercicio 2.

El segundo problema consiste en que deben instalarse líneas telefónicas subterráneas para establecer comunicación entre todas las estaciones, incluso la entrada. La pregunta es por dónde deben tenderse las líneas para lograr este objetivo con el *mínimo* número total de km de cable instalado. **(Éste es un ejemplo del problema del árbol de mínima expansión)**



Ejercicio 3.

Durante la temporada pico, hay más personas que quieren tomar un ómnibus a la estación *T* que aquellas a las que se les puede dar servicio. Los caminos tienen limitados el número de viajes diarios que se pueden dar por ellos. La pregunta es cómo planear las rutas de los distintos viajes, de manera que se *maximice* el número total de viajes que se pueden hacer al día, sin violar los límites impuestos sobre cada camino. **(Éste es un ejemplo del problema de flujo máximo)**


A
3
1
5
T
O
7
B
4
D
9
5
2
4
1
6
C
4
E

CARRERA INGENIERÍA INDUSTRIAL

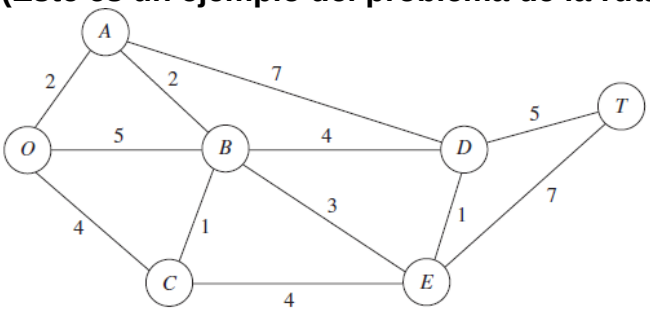
ASIGNATURA: INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES II **Año: 4to.**

Tema 1. Optimización de Redes.

Clase Practica 1

Ejercicio 1.

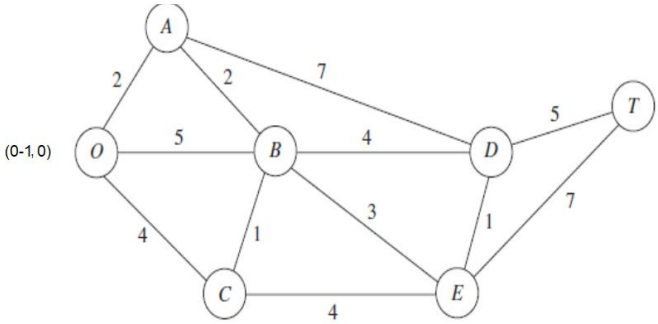
Determinar qué ruta, desde la entrada O del parque a la estación *T*, es la *distancia total más corta* para la operación de los ómnibus. **(Éste es un ejemplo del problema de la ruta más corta).**



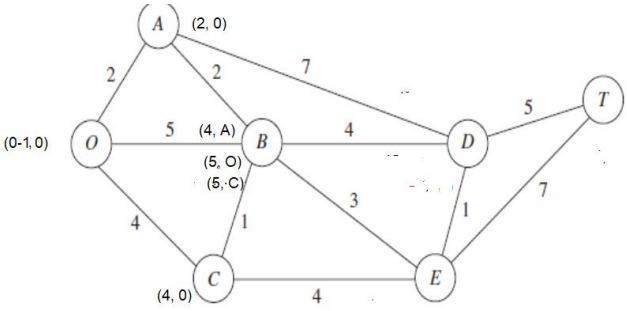
SOLUCIÓN

Se crean etiquetas a cada nodo que pueden ser temporales o permanentes, con el siguiente formato: (a, b) donde "a" es la distancia acumulada hasta el nodo y "b" el nodo predecesor

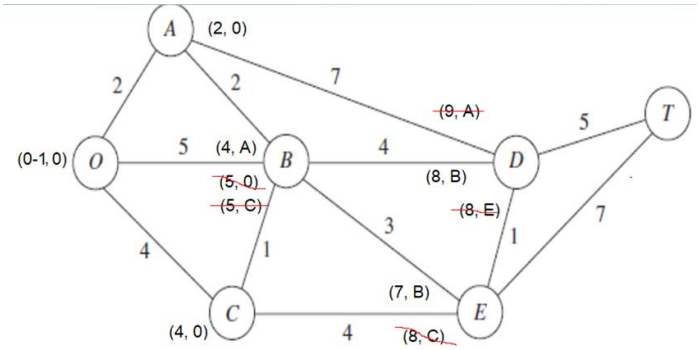
1. Comenzar etiquetando el primer nodo de la red, su distancia es cero y no tiene preceden



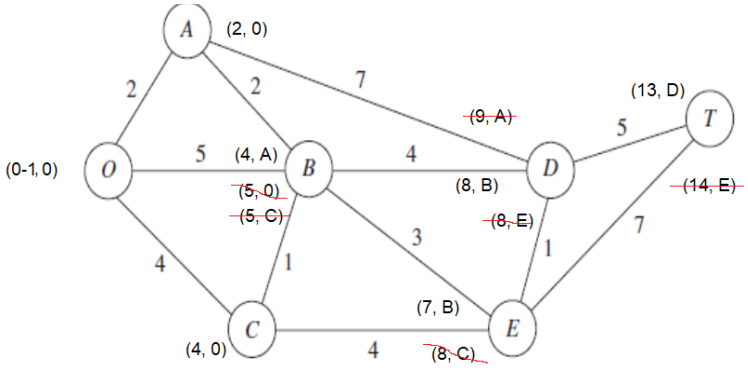
2. A partir de este nodo se ramificar hacia afuera y a cada nodo de la red se le asigna una etiqueta temporal para cada distancia y nodo precedente.



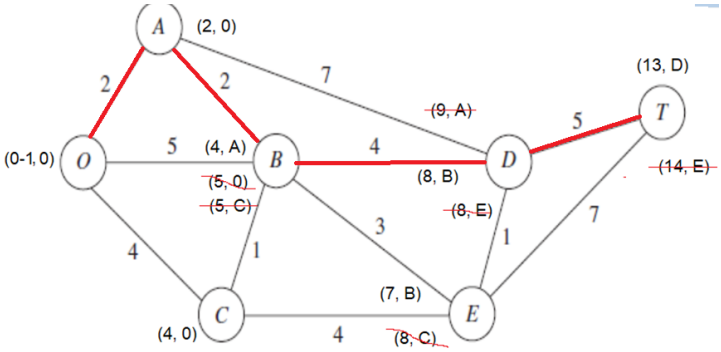
3. Se selecciona de cada nodo la etiqueta temporal menor y se convierte en la etiqueta permanente



Se repiten los pasos hasta que todas las etiquetas sean permanentes

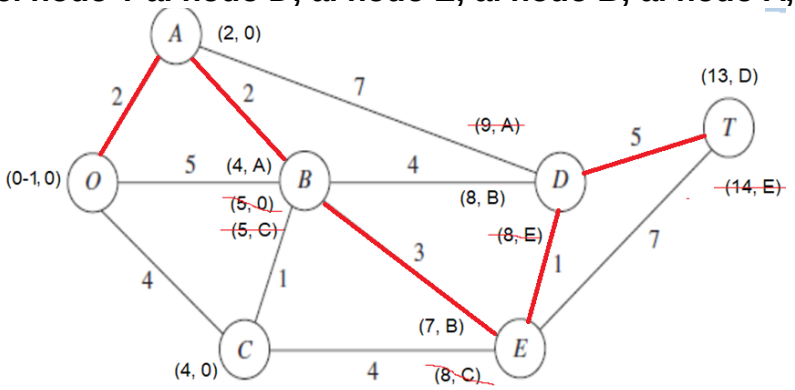


Ahora se puede determinar la ruta más corta comenzando por el nodo destino: del nodo T al nodo D; al nodo B; al nodo A; al nodo O



(O, A, B, D, T) = 13 km

También está la ruta: del nodo T al nodo D; al nodo E; al nodo B; al nodo A, al nodo O

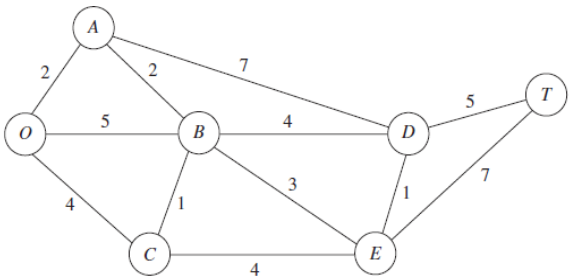


(O, A, B, E, D, T) = 13 km

Otra método de hallar la Ruta Más Corta es con Programación Lineal (PL)

<u>Definición de las variables</u>

X_{ij}: distancia desde el nodo i hasta el nodo j

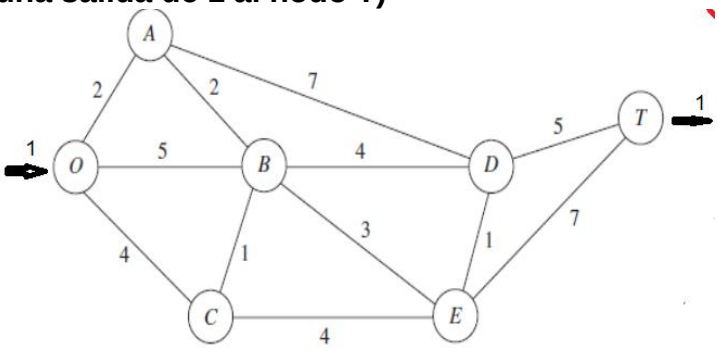


<u>Función objetivo</u>

Min Z = $2X_{OA} + 5X_{OB} + 4X_{OC} + 2X_{AB} + 7X_{AD} + X_{BC} + 4X_{BD}\ 3X_{BE} + 4X_{CE} + X_{DE} + 5X_{DT} + 7X_{ET}$

<u>Sujeto a las restricciones</u>

(Se debe equilibrar los nodos, lo que entra es igual a lo que sale, se adiciona ficticiamente una entrada de 1 al nodo O y una salida de 1 al nodo T)



Restricción O $1 = X_{OA} + X_{OB} + X_{OC}$ $\quad X_{OA} + X_{OB} + X_{OC} = 1$

Restricción A $X_{OA} = X_{AB} + X_{AD}$ $\quad X_{OA} - X_{AB} - X_{AD} = 0$

Restricción B $\quad X_{OB} + X_{AB} + X_{BC} - X_{BD} - X_{BE} = 0$

Restricción C $X_{OC} = X_{CB} + X_{CE}$ $\quad X_{OA} - X_{CB} - X_{CE} = 0$

Restricción D $\quad X_{AD} + X_{BD} + X_{ED} - X_{DT} = 0$

Restricción E $X_{CE} + X_{BE} = X_{ED} + X_{ET}$ $\quad X_{CE} + X_{BE} - X_{ED} - X_{ET} = 0$

Restricción T $\quad X_{DT} + X_{ET} = 1$

No negatividad $\quad Xij \geq 0$

Con el empleo de WINQSB se obtiene el siguiente resultado:

Network Modeling

File Format Results Utilities Window Help

Solution for Shortest Path Problem NET Problem

04-22-2020	From	To	Distance/Cost	Cumulative Distance/C
1	0	A	2	2
2	A	B	2	4
3	B	D	4	8
4	D	T	5	13
	From 0	To T	=	13
	From 0	To A	=	2
	From 0	To B	=	4
	From 0	To C	=	4
	From 0	To D	=	8
	From 0	To E	=	7

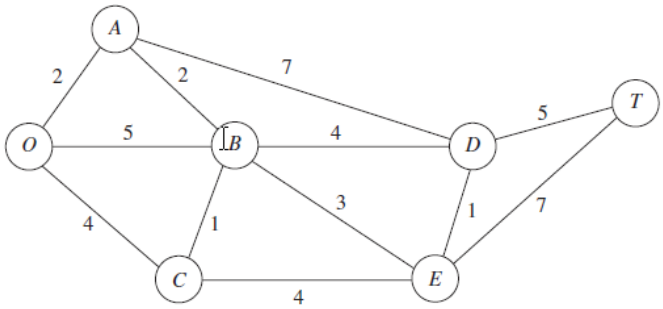
Solución

La Ruta Más Corta es del nodo O, al nodo A, al nodo B, al nodo D y al nodo T, con un recorrido de respectivo de

2 + 2 + 4 + 5 = 13 km.

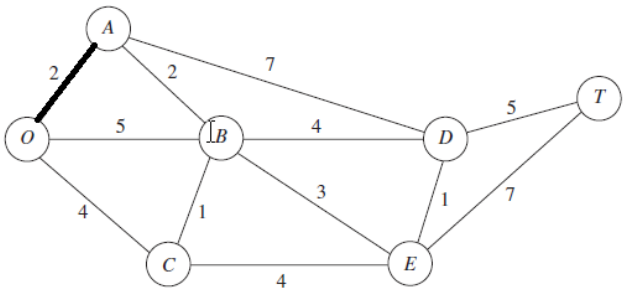
Ejercicio 2.

El segundo problema consiste en que deben instalarse líneas telefónicas subterráneas para establecer comunicación entre todas las estaciones, incluso la entrada. La pregunta es por dónde deben tenderse las líneas para lograr este objetivo con el *mínimo* número total de km de cable instalado. **(Éste es un ejemplo del problema del árbol de mínima expansión)**



SOLUCIÓN

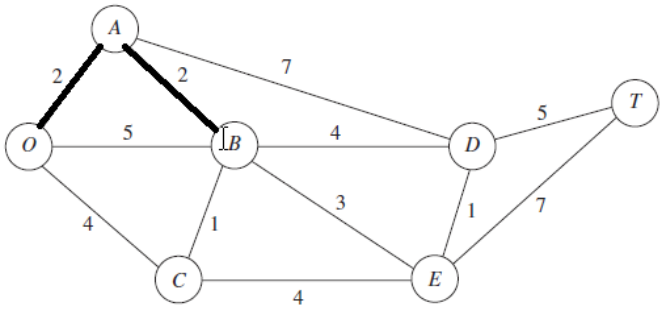
1. Comenzar con cualquier nodo y unir a este el nodo más cercano. Comenzando por el nodo A el más cercano es el nodo O.



2. Los dos nodos forman ahora un conjunto conectados y el resto de los nodos un conjunto desconectado.

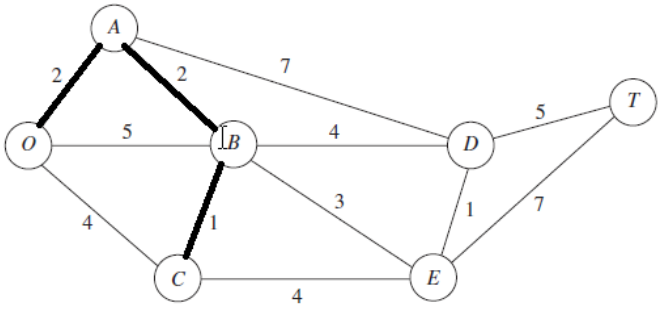
3. Elegir el nodo desconectado más cercano al conjunto conectado y agregarlo al conjunto conectado.

El nodo desconectado más cercano al conjunto conectado O, A es el B y se agrega al conjunto conectado.

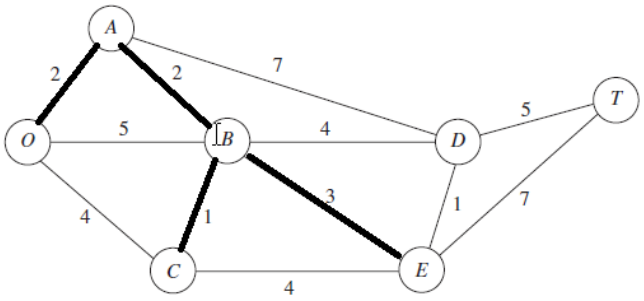


4. Se repite el algoritmo hasta conectar todos los nodos sin ciclos.

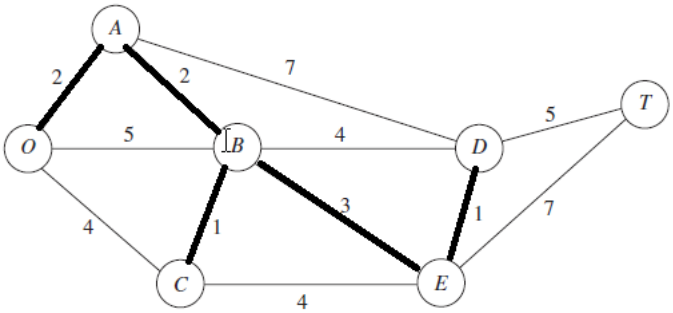
El nodo desconectado más cercano al conjunto conectado O, A, B es el C y se agrega al conjunto conectado



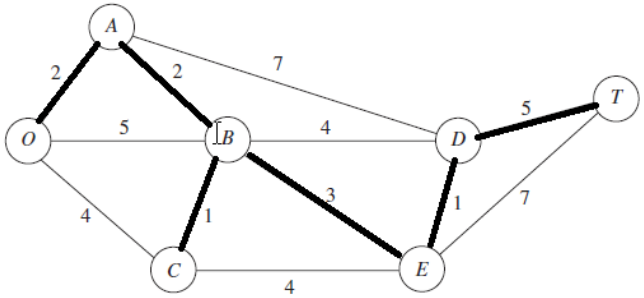
El nodo desconectado más cercano al conjunto conectado O, A, B, C es el E y se agrega al conjunto conectado.



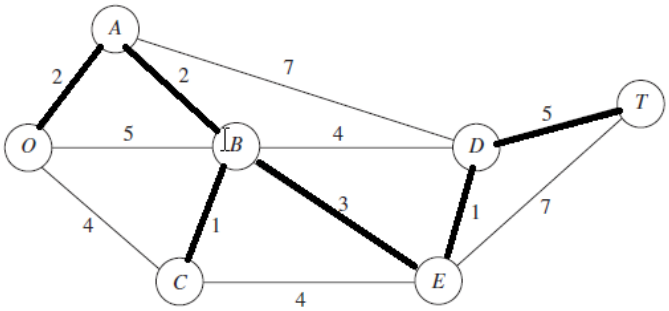
El nodo desconectado más cercano al conjunto conectado O, A, B, C, E es el D y se agrega al conjunto conectado.



El único nodo desconectado T se conecta al nodo D que es el más cercano.



Todos los nodos quedan conectados entonces esta es la red de tubería mínima que conecta a todos las viviendas.

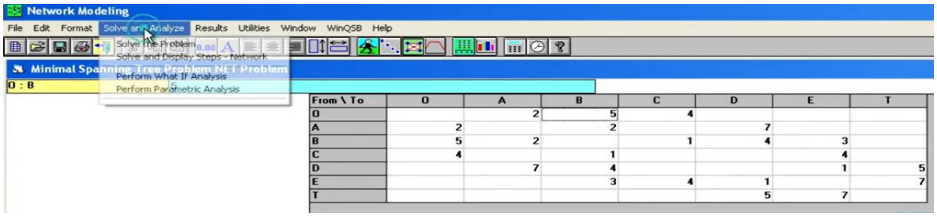


R/ Árbol de expansión mínimo: OA, AB, BC, BE, ED, DE con una extensión de

2 + 2 + 1 +3 + 1 + 5 = 14 km

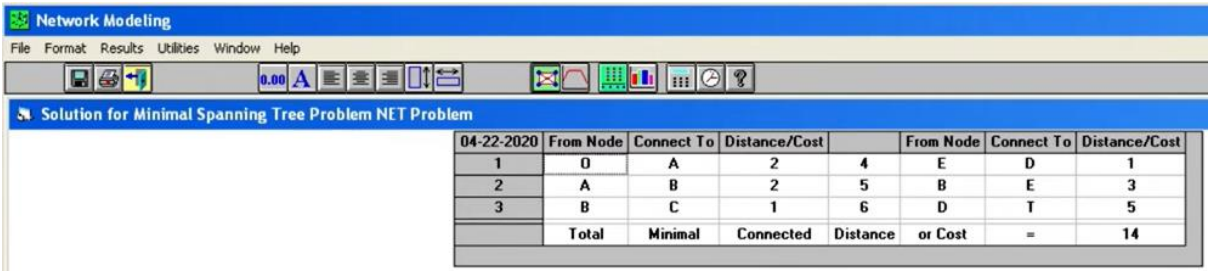
MÉTODO DE PROGRAMACIÓN LINEAL CON WINQSB PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DEL ÁRBOL DE EXPANSIÓN MÍNIMA.

Se siguen los pasos del programa, se completa la matriz de datos con los valores de las distancias entre cada nodo.
(Nota: si no hay arco o ligadura entre dos nodos, se deja en blanco).



Se obtienen los resultados y se interpretan.

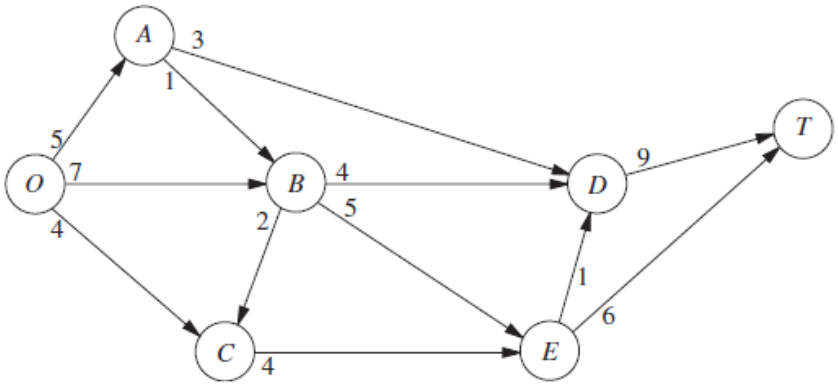
La distancia mínima para conectar todas las estaciones es de 14 km



R/ La red iría de OA, AB, BC, ED, BE, DT con 14 km

Ejercicio 3.

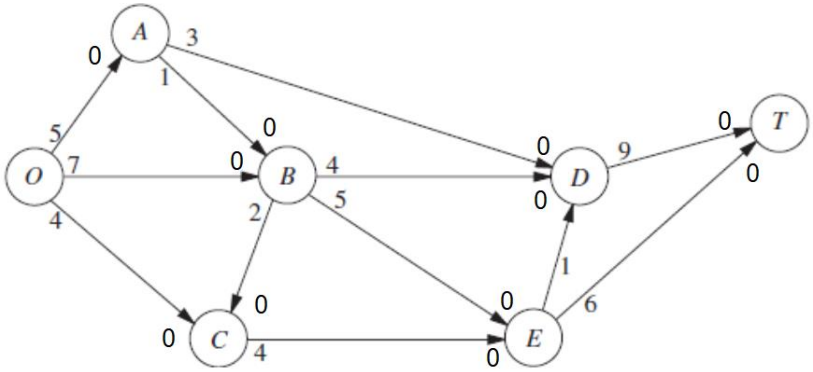
Durante la temporada pico, hay más personas que quieren tomar un ómnibus a la estación *T* que aquellas a las que se les puede dar servicio. Los caminos tienen limitados el número de viajes diarios que se pueden dar por ellos. La pregunta es cómo planear las rutas de los distintos viajes, de manera que se *maximice* el número total de viajes que se pueden hacer al día, sin violar los límites impuestos sobre cada camino. **(Éste es un ejemplo del problema de flujo máximo)**



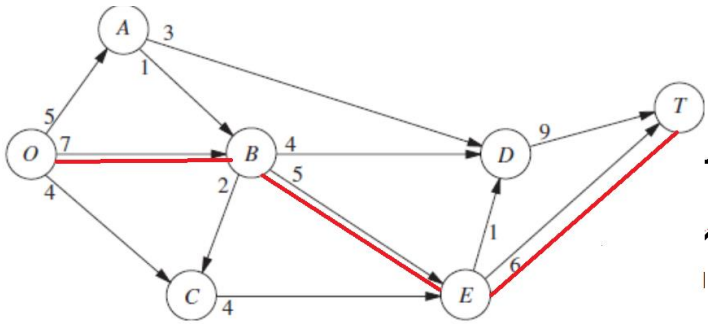
SOLUCIÓN

Algoritmo de trayectoria aumentada (Ford-Fulkerson) para problemas de Flujo Máximo

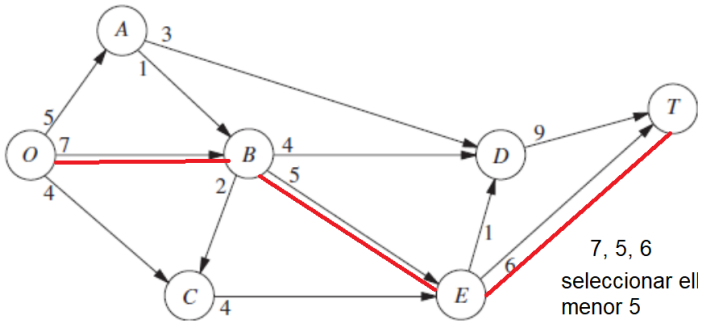
1. Preparar la red colocando flechas en el sentido del flujo y se colocan cero las capacidades de todos los nodos.



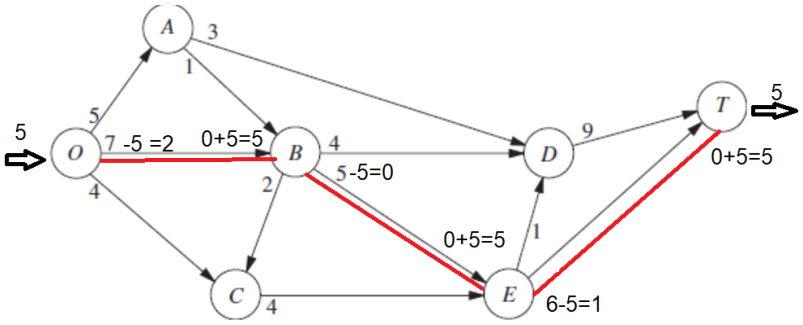
2. Obtener una trayectoria de aumento, empleando el criterio de ir siempre por la trayectoria que proporcione una mayor capacidad residual por cada nodo.



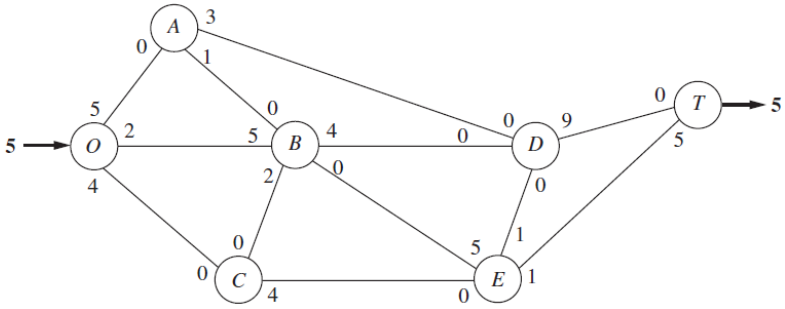
3. Determinar el flujo de la trayectoria de aumento que corresponderá al valor mínimo de las capacidades residuales de los arcos que la forman.



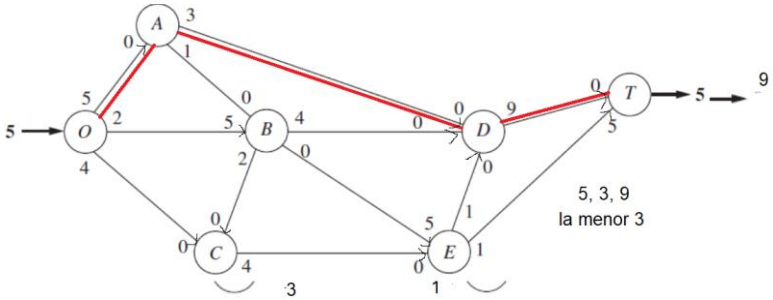
4. Se modifican las capacidades residuales de cada arco, restando al inicio del arco y sumando al final del arco la capacidad residual mínima de la trayectoria aumentada.

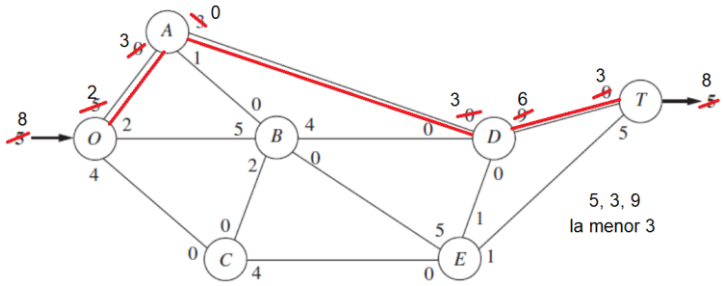


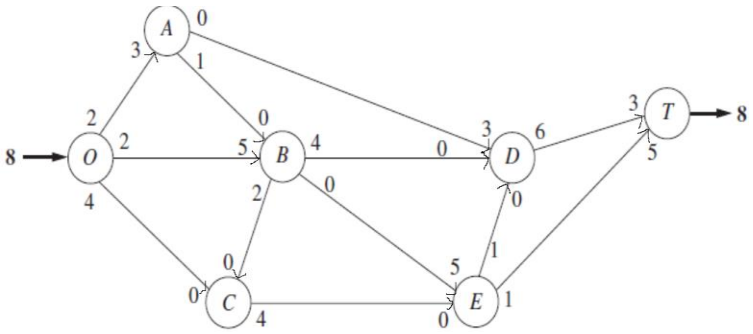
5. Actualizar la red.



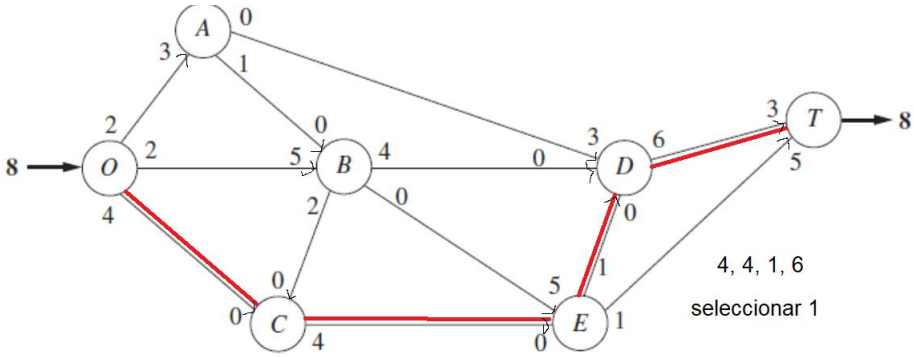
Se repite el proceso desde el paso 2 nuevamente

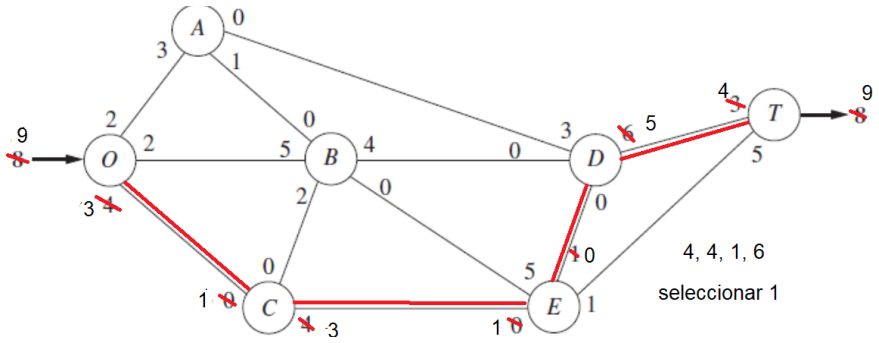


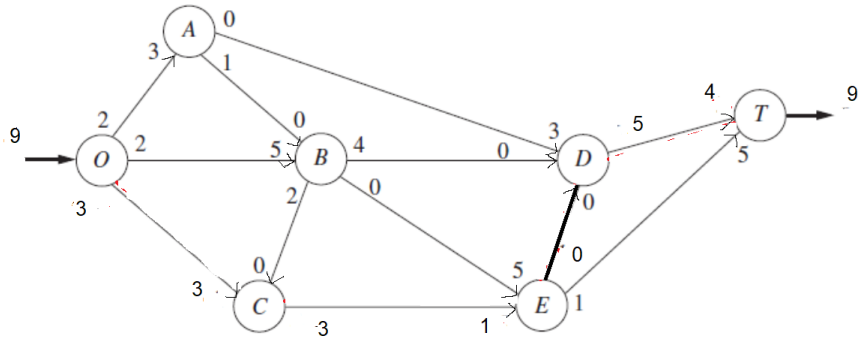




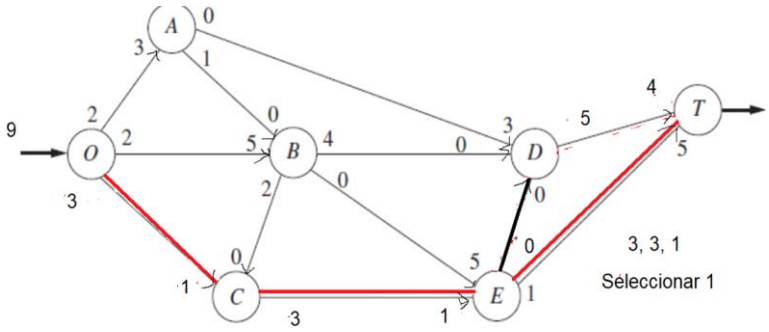
Se repite el proceso desde el paso 2 nuevamente

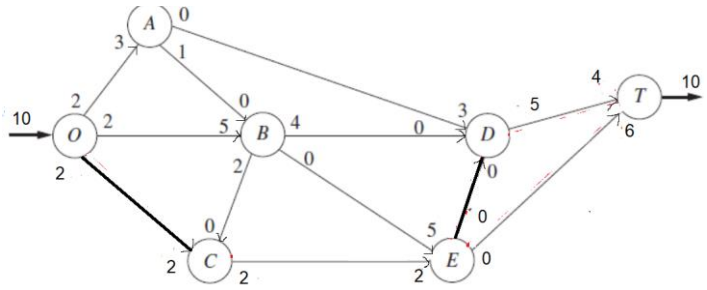




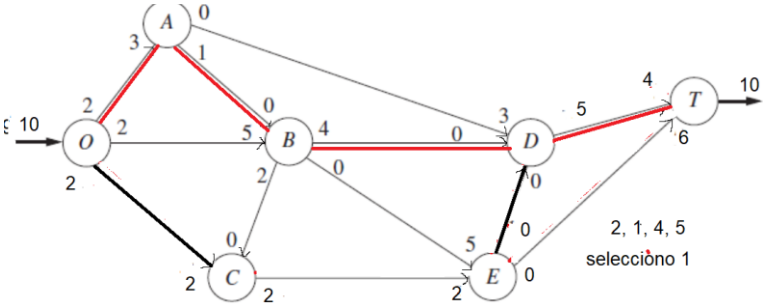


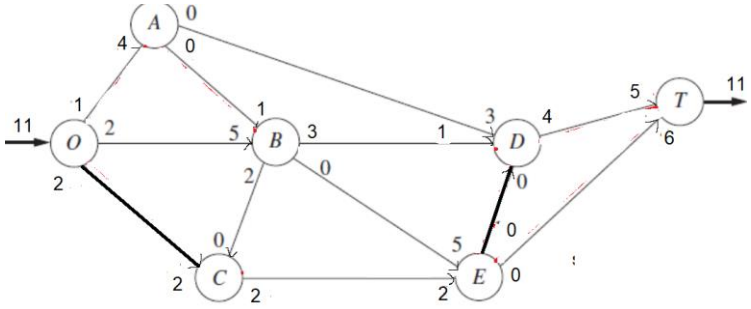
Se repite el proceso desde el paso 2 nuevamente



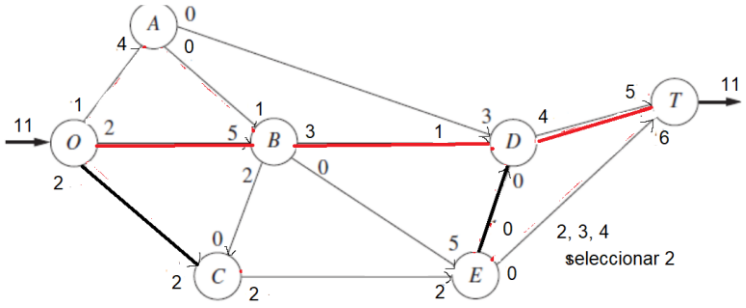


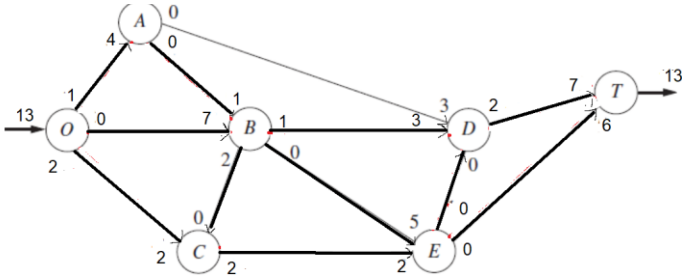
Se repite el proceso desde el paso 2 nuevamente





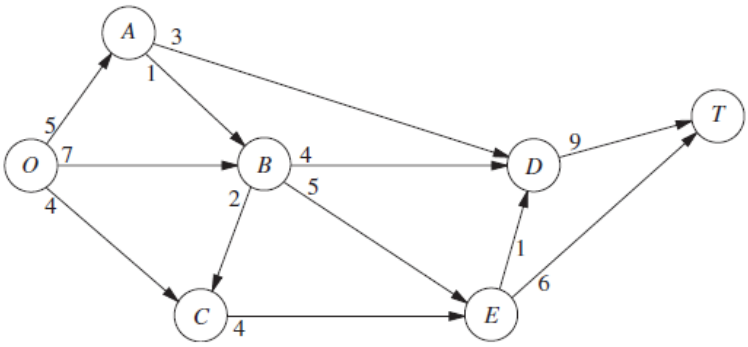
Se repite el proceso desde el paso 2 nuevamente





Como no existe otra trayectoria porque los nodos están bloqueados entonces esta es la solución del problema, el flujo máximo es de 13, y por cada arco circula la cantidad obtenida en el extremo del arco por ejemplo en el arco OA circulan 4 ómnibus por el OB circulan 7 ómnibus.

Solución del problema de flujo Máximo con Programación Lineal (PL)



En este problema solo hay un origen y un destino no es necesario crear un origen ficticio.

Definición de las variables

X_{ij}: Flujo que circula desde el nodo i hasta el nodo j

X_{OA}, X_{OB}, X_{OC}, X_{AB}, X_{AD}, X_{BC}, X_{BD}, X_{BE}, X_{CE}, X_{DT}, X_{ED}, X_{ET}

Función objetivo

Max Z = X_{OA}+X_{OB} + X_{OC} Maximizar la entrada o **Max Z = X_{DT}+X_{ET}** Maximizar la salida

Sujeto a restricciones

Ecuaciones de balance en los nodos de trasbordo

Nodo A: $X_{OA} = X_{AB} + X_{AD}$	Nodo D: $X_{AD}+X_{BD}+X_{ED}=X_{DT}$
Nodo B: $X_{AB}+X_{OB} = X_{BC}+X_{BD}+X_{BE}$	Nodo E: $X_{BE}+ X_{CE}= X_{ED}+X_{ET}$
Nodo C: $X_{OC}+X_{BC} = X_{CE}$	

Restricciones de capacidad

$X_{OA} \leq 5$	$X_{AB} \leq 1$	$X_{BD} \leq 4$	$X_{DT} \leq 9$
$X_{OB} \leq 7$	$X_{AD} \leq 3$	$X_{BE} \leq 5$	$X_{ED} \leq 1$
$X_{OC} \leq 4$	$X_{BC} \leq 2$	$X_{CE} \leq 4$	$X_{ET} \leq 6$

Restricción de no negatividad

$X_{ij} \geq 0$

CONCLUSIONES

En la clase se resolvieron problemas de optimización de redes

- Se estudiaron diferentes algoritmos para estos problemas.
  - DIJKSTRA para determinar la ruta más corta
  - Algoritmo de PRIM para la solución de problemas del Árbol de Expansión Mínima
  - Algoritmo de Trayectoria Aumentada para problemas de flujo máximo.
- Se formularon los Modelos de Programación Lineal (PL) para la solución de estos problemas

ESTUDIO INDIVIDUAL

a) Determine la ruta mas corta aplicando el algoritmo de DIJKSTRA y la PL,

b) Determine el árbol de expansión.

c) Halle el Flujo máximo aplicando el algoritmo de Trayectoria Aumentada y la PL

