Ingeniería Industrial.

Asignatura: Estadística I **Año: 3er.**

Clase Encuentro.

Tema # 2 Probabilidades

Sumario.

Tema 2. Probabilidades y Distribución teórica de probabilidades.

2.1. Fenómeno aleatorio. Espacio muestral y sucesos.

2.2. Definición clásica de probabilidad. Definición estadística o frecuencial. Definición matemática. Axiomas y teoremas.

2.3. Probabilidad condicional. Teorema de Bayes

2.4. Independencia de sucesos. Regla del producto o multiplicación y de la Suma o adición.

EJERCITACIÓN.

Objetivos: Que el alumno sea capaz de:

- Aplicar e interpretar los fundamentos de la teoría de las probabilidades en la solución de problemas relacionados con el perfil profesional.
- Calcular la probabilidad de ocurrencia de un suceso utilizando la definición clásica, la estadística y probabilidad condicional y el Teorema de Bayes.
- Método:
- Elaboración Conjunta.

Medios:

- Tiza y pizarra, Libro de texto.
- Forma de enseñanza: Conferencia

Bibliografía:

- Estadística para ingenieros 6ta edición R. Walpole, R. H. Myers, S.L.Myers I (1ra y 2da parte).
- Estadística Dra Caridad Bustillo y otros
- Materiales entregados y elaborados por el profesor

Comienza la clase puntualizando el nuevo tema que se estudiará que es **Probabilidades**. que es la base de la Inferencia Estadística.

2.1. FENÓMENO ALEATORIO. ESPACIO MUESTRAL Y SUCESOS.

EXPERIMENTO DETERMINISTA, cuando se puede predecir con total exactitud el resultado del experimento.

EXPERIMENTO ALEATORIO, cuando no se puede predecir con exactitud su resultado antes de realizarlo pero si los posibles resultados.

SUCESO O EVENTO Cualquier característica observada del resultado de un experimento.
Es aleatorio si como resultado del experimento él puede ocurrir o no ocurrir.

ESPACIO MUESTRAL. Es el conjunto formado por todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Se representa por "S"

Ej. Lanzamiento de un dado .....S:[1, 2, 3, 4, 5, 6].
Nacimiento de un bebe S[f,m].

El espacio muestral puede ser finito o infinito según el conjunto tenga un número finito o infinito de elementos.

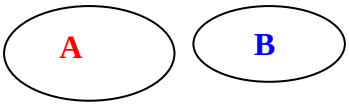
PUNTOS MUESTRALES. Cada uno de los resultados posibles de un experimento aleatorio.

Los sucesos pueden ser:
Sucesos Simple. Son aquellos que tienen un solo punto muestral.
Sucesos Compuesto. Son aquellos que tienen dos o más puntos muestrales.
Sucesos seguro o cierto: Un suceso A definido en S es seguro o cierto, si dado un conjunto de condiciones su ocurrencia es inevitable. Ej Se lanza un dado, suceso salir un número mayor que cero y menor que 7
Suceso imposible o nulo. Un suceso A es imposible si definido un espacio muestral y dado un conjunto de condiciones, su ocurrencia es imposible. Ej. Se lanza un dado, suceso A: salir el número 7 (que se representa por el conjunto vacío o nulo).
Subevento: A es un subevento de B si $A \subset B$; en tal caso cada vez que ocurra A ocurrirá B.
Ej. Se lanza un dado.
A ... Salir número impar [1, 3, 5] Recuerden los números impares
B ... Salir número del 1 al 6 [1, 2, 3, 4, 5, 6]
Suceso complementario: Un suceso A es complementario si su complemento viene dado por todos los puntos donde no ocurre A y se denota por A^c ó $\overline{A}$ ó A' indistintamente
Ej. Se lanza un dado.

A ... Salir número impar S:[1, 3, 5]
A'... No salir número impar S:[2, 4, 6]

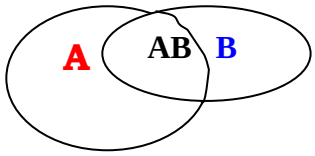
(el símbolo (') está indicando negación hay libros que pone en vez de este símbolo una pequeña c en la parte derecha superior ó una barrita encima de la letra tal como se mostró anteriormente)

Suceso Mutuamente Excluyentes. En un mismo experimento aleatorio dos sucesos A y B se dice que son mutuamente excluyentes, si la ocurrencia de uno excluye la ocurrencia del otro.
Ej. Si se lanza una moneda, la ocurrencia de que caiga cara, excluye la ocurrencia de que caiga escudo.
Ej. El nacimiento de una hembra, excluye el nacimiento de un varón. Por tanto cuando dos sucesos son mutuamente excluyentes, no tienen elementos comunes, gráficamente:



Por lo tanto si cada circulo representa a A Y B no existe la intersección de AB sino que esta es igual al conjunto vacío.

Si los sucesos fueran, ***no excluyentes,*** gráficamente: estos círculos se verían uno montado en una parte del otro.



OPERACION ENTRE EVENTOS.

OPERACIÓN Intersección:

Se llama intersección o producto de A y B, Al suceso que consiste en la ocurrencia simultánea de A y B. Se denota por AB, A ⋂ B, A.B

Ej. Se lanza un dado. A: número primo [1,2,3,5]

B: número impar [1, 3, 5], por tanto AB: [1, 3, 5], esto es los elementos comunes en ambos sucesos.

OPERACION UNION:

El suceso A unión B, es el que consiste en la ocurrencia de A ó B se denota por A ∪ B; A+B (esto indica que ocurra al menos uno de los dos, que ocurra A ó que ocurra B, también la palabra al menos uno está indicando que ocurra uno ó que ocurran los dos).

Ej. Se lanza un dado

A: Que salgan los 4 primeros números [1,2,3,4]

B: Que salgan los 3 últimos números [4,5,6]

Así A ∪ B = [1, 2, 3, 4, 5, 6]

DEBE QUEDAR CLARO QUE CUANDO SE DICE QUE OCURRA "A y B" ESTAN PIDIENDO INTERSECCION (producto) Y CUANDO SE DICE QUE OCURRA "A ó B" ó "Al menos uno" ESTAN PIDIENDO UNION (suma)

2.2. DEFINICIÓN CLÁSICA DE PROBABILIDAD. DEFINICIÓN ESTADÍSTICA O FRECUENCIAL. DEFINICIÓN MATEMÁTICA. AXIOMAS Y TEOREMAS.

DEFINICIÓN CLÁSICA DE PROBABILIDAD.

La definición clásica de probabilidad se formula por Laplace en el siglo XIX, concretamente en el año 1812 y descansa en la equiprobabilidad. Y en la misma se plantea:

Si S, es un espacio muestral finito y equiprobable entonces la probabilidad de ocurrencia de cualquier suceso A definido en S estará dado por la relación:

P(A) = N(A)/N(S)

dónde N(A)= casos favorables al suceso A y N(S)= casos totales posibles.

Ejemplo. La probabilidad de obtener el número 4 al lanzar un dado será
P(A) = 1/6 Siendo el suceso A: sacar el número 6

Ejemplo. La probabilidad de sacar un As de un juego de cartas será
P(A) = 4/52 Siendo el suceso A: sacar un As.

PROPIEDADES:

$P(A) \geq 0$ $P(S) = 1$ LO QUE IMPLICA $0 \leq P(A) \leq 1$

DEFINICION ESTADISTICA DE PROBABILIDAD.

Debido a las limitaciones que confronta la definición clásica de probabilidad, se comenzaron a realizar experimentos con los juegos de azar, surgiendo el concepto de **REGULARIDAD ESTADISTICA**.

QUE NO ES MAS QUE LA ESTABILIDAD QUE PRESENTAN LAS FRECUENCIAS RELATIVAS AL CONSIDERAR UN GRAN NUMERO DE VECES UN EXPERIMENTO BAJO LAS MISMAS CONDICIONES.

Ej. Lanzamiento de una moneda "n" veces, ya a partir del lanzamiento 400 y hasta el 1000, el comportamiento de que caiga cara es de 0.40, 0.505, 0502 ... es decir se estabiliza.

Otro ejemplo, es el nacimiento de niños y niñas, que cuando se ve en un número grande de veces, este se estabiliza.

que plantea:

Si n tiende a infinito la frecuencia relativa f(A), alcanza un cierto valor límite o ideal, y entonces puede asociarse a un número P(A) tal que f(A), sea iguala P(A) si:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} f(A)$$

La definición estadística, también muestra sus limitaciones, ya que existen experimentos que no se pueden repetir un número grande de veces y mucho menos, bajo las mismas condiciones, como para que se conozca la probabilidad.

DEFINICIÓN AXIOMÁTICA

Es por ello que en 1933 se axiomatiza la probabilidad y se parte de 3 axiomas básicos, para su desarrollo.

Si S es un espacio muestral y A un suceso definido en S, se dirá, que TODO SUCESO "A" DEFINIDO EN "S" ESTA ASOCIADO A UN NUMERO REAL LLAMADO PROBABILIDAD DE "A", EL CUAL CUMPLIRA CON LOS SIGUIENTES AXIOMAS:

1.- $P(A) \geq 0$

2.- $P(S) = 1$

3.- $P(A1 \cup A2 \cup A3 \cup ... \cup Ak) = P(A1) + P(A2) + ... + P(Ak)$ si los k sucesos, son mutuamente excluyentes o lo que es lo mismo si para cada par AiAj = conjunto vacío siendo i diferente de j.

Propiedades.

Propiedad #1 La probabilidad de un suceso imposible o nulo es cero:

$P(\varnothing) = 0$ $\quad\quad$ $A \cup \varnothing = A$

De esta propiedad y de los axiomas 1 y 2 se evidencia que:

$0 \leq P(A) \leq 1$

Propiedad #2

La probabilidad del suceso complementario al suceso A es igual a 1 menos la probabilidad de que ocurra A.

P(A') = 1 - P (A)

Propiedad #3

Si A y B son dos sucesos definidos en S, la probabilidad de que ocurra A y no ocurra B será:

P(AB') = P(A) - P(AB)

Propiedad #4

Si A y B son dos sucesos definidos en S entonces:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Propiedad #5

Si A es un subconjunto de

P(B) > P(A)

Propiedad #6

Si A, B, y C son sucesos definidos en S, entonces:

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$

2.3. PROBABILIDAD CONDICIONAL. EL TEOREMA DE BAYES

En contraposición a este concepto se estudiará ahora la ***PROBABILIDAD CONDICIONAL***, que como su nombre lo indica será la posibilidad de que ocurra un suceso cuando ya ocurrió otro.

Esto implica una referencia, no al espacio muestral en su totalidad, sino a otro suceso o subconjunto del espacio muestral; esto es al suceso al que esté condicionada.

Se representa esta probabilidad utilizando el símbolo **"/"** que se lee como "dado que" y después de él se plantea la condición; así será:

Se define la probabilidad condicional, como la probabilidad de la intersección de los sucesos, partido la condición. Así:

P(A/B) = P(AB)/P(B)

P(A/B) QUE SE LEE LA PROBABILIDAD DE "A" "DADO QUE" "B" YA *OCURRIO es decir condiciona la probabilidad de la ocurrencia de A, a que B ya tiene que haber ocurrido.*

Se debe reafirmar que la condición es el suceso que está después **(del símbolo "/")** de "dado qué"
Se debe señalar que también es posible encontrar la probabilidad condicional no solo de dos sucesos sino de combinaciones de dos o más sucesos. Y aunque se emplee la definición clásica ésta se cumple también aplicando la definición estadística.

EL TEOREMA DE BAYES

El Teorema de Bayes lleva este nombre porque fue enunciado por el reverendo Thomas Bayes (1702 - 1761), además de ministro presbiteriano, era matemático, de nacionalidad Inglesa, el mismo fundamenta la estadística Bayesiana y sienta los principios de la teoría de la decisión sobre la base de la concepción subjetivista de la probabilidad
Este Teorema es bastante útil en el proceso de toma de decisiones ya que regularmente la información adicional se obtiene antes de tomar una decisión importante.

Vamos por parte:
Ejemplo 1.
Una empresa compra cierto tipo de pieza que es suministrada por tres proveedores: el 45% de las piezas son compradas al primer proveedor resultando defectuosa el 1%. El segundo proveedor suministra el 30% de las piezas y de ellas es defectuosos el 2%. Las restantes piezas provienen del tercer proveedor, siendo defectuoso el 3 % de las mismas.

a) Calcular la probabilidad de que una pieza seleccionada sea defectuosa.

b) Calcular la probabilidad de que una pieza seleccionada defectuosa sea del 2do proveedor; lo que es una probabilidad a posteriori, que lo resuelve el Teorema de Bayes

Datos

A_1: La pieza fue suministrada por el proveedor A_1

A_2: La pieza fue suministrada por el proveedor A_2

A_3: La pieza fue suministrada por el proveedor A_3

B_i: La pieza es defectuosa

A priori A posteriori

$P(A_1) = 0.45$; $P(B/A_1) = 0.01$

$P(A_2) = 0.30$; $P(B/A_2) = 0.02$

$P(A_3) = 0.25$; $P(B/A_3) = 0.03$

a) Calcular la probabilidad de que una pieza seleccionada sea defectuosa.

$P(B) = P(B/A_1)\,P(A_1) + P(B/A_2)\,P(A_2) + P_3\,(B/A_3)\,P(A_3)$
$P(B) = (0.01*0.42) + (0.02*0.30) + (0.03*0.25) =$
$P(B) = 0.0045 + 0.0060 + 0.0075 = 0.018$

a) R/ La probabilidad que una pieza seleccionada sea defectuosa es de 0.018 o sea 1.8%

b) Calcular la probabilidad de que una pieza seleccionada defectuosa sea del 2do proveedor; lo que es una probabilidad a posteriori, que lo resuelve el Teorema de Bayes

El Teorema de Bayes parte de una probabilidad de procedencia o a priori (*que debe sumar 1, por estar el suceso seguro descompuesto en una serie de sucesos mutuamente excluyentes, de los que se conoce su probabilidad)* y de una probabilidad condicionada a su procedencia.

Por lo que el Teorema de Bayes como tal busca una probabilidad a posteriori.

$$P(A_j/B) = \frac{P(B/A_j)\,P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)\,P(A_i)}$$

Donde $P(A_j/B)$ = probabilidad de que ocurra el suceso A_j dado que ocurrió el suceso B
$P(A_j$ y B) = Probabilidad conjunta de que ocurran los sucesos A y B en sucesión.
P(B) = probabilidad de que haya ocurrido el suceso B

$$P(A_2/B) = \frac{P(B/A_2)P(A_2)}{P(B/A_1)P(A_1)+P(B/A_2)P(A_2)+P(B/A_3)P(A_3)}$$

$$= \frac{0.02\ x\ 0.30}{0.01\ x\ 0.45 + 0.02\ x\ 0.30 + 0.03\ x\ 0.25} = 0.33$$

R/ La probabilidad que la pieza defectuosa seleccionada sea del proveedor B es de 0.33 o 33%

Ejemplo 2.
Una fábrica produce tornillos y el 2 % son defectuosos, se usa un detector de metales que marca el 95% de tornillos defectuosos, pero marca como defectuosos un 3% de tornillos no defectuosos.
a) Calcule la probabilidad que el detector marque un tornillo como defectuoso
b) Si el detector marca un tornillo como defectuosos cual es la probabilidad que realmente lo sea

Datos

A Priori

$P(A_1)$ =0.02; tornillo defectuoso

$P(A_2)$ =0.98; tornillo no defectuoso

A posteriori

$P(B/A_1)$ = 0.95; detector marca y acierta si es defectuoso

$P(B/A_2)$ =0.03; detector marca pero no acierta (falso positivo)

a) Calcule la probabilidad que el detector marque un tornillo como defectuoso
$P(B) = P(B_1/A_1)\ P(A_1) + P(B_2/A_2)\ P(A_2)$

$P(B) = (0.95)^*\ (0.02)\ +\ (0.03)^*(0.98)$

$P(B) = 0.019 + 0.0294 = 0.0484$

a) R/ la probabilidad que el detector marque un tornillo como defectuoso es de 0.0484 o sea un 4.84%

b) Si el detector marca un tornillo como defectuosos cual es la probabilidad que realmente lo sea

$$P(B_1/A_1) = \frac{P(B_1/A_1)\,P(A_1)^*}{(P(B_1/A_1)\,P(A_1)^* + P(B_2/A_2)\,P(A_2))}$$

$$P(B_1/A_1) = \frac{0.95^*\,0.02}{(0.95^*0.02 + 0.03^*\,0.98)} = 0.3926$$

b) R/ La probabilidad que el detector marque un tornillo que realmente sea defectuoso es de 0.3926 o sea 39.26%

2.4. INDEPENDENCIA DE SUCESOS. DE LA SUMA O ADICIÓN Y REGLA DEL PRODUCTO O MULTIPLICACIÓN.

REGLA DE LA ADICION O SUMA DE PROBABILIDAD

Si se tienen dos sucesos A y B, definidos en S, la probabilidad de A U B se expresa como:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Pero si A y B son mutuamente excluyentes entonces P(AB) = 0 por tal razón

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Y esto indica “al menos uno”, es decir la probabilidad de A ó B ó de ambos AB.

SUCESOS INDEPENDIENTES.

Dos sucesos A y B se llaman independientes, cuando la probabilidad de ocurrencia de uno de ellos, no depende de la ocurrencia o no del otro, lo cuál puede ser expresada de la siguiente forma:
Dos sucesos son independientes si:

$$P(A/B) = P(A) \quad ó \quad P(B/A) = P(B)$$

Si son independientes se cumple que:

$$P(AB) = P(A)\,P(B)$$

Se debe aclarar que sólo se puede comprobar independencia a través de esta última fórmula si se tienen las 3 probabilidades y comprobar si la intersección es igual al producto de la probabilidad de ambos sucesos. Ejemplo de independencia:
Si se lanza una moneda dos veces, la probabilidad de que salga cara en el primer lanzamiento, no depende de que salga cara o no en el segundo lanzamiento.

REGLA DEL PRODUCTO O MULTIPLICACIÓN

Los sucesos No Excluyentes (tienen elementos comunes)

$$P(AB) \neq 0$$

y los sucesos A y B pueden ser independientes o dependientes.

Eventos Independientes: $P(AB) = P(A).P(B)$

Eventos Dependiente: $P(AB) \neq P(A).P(B)$

$$P(AB) = P(A).P(B/A)$$

Luego la regla del producto expresa la probabilidad de que ocurra A y B en un orden determinado: P(AB)=P(A)P(B/A) que primero salga A y en segundo lugar salga B ó P(AB)=P(B)P(A/B) que primero salga B y en segundo lugar A

Si no interesa el orden, sino que salga una vez A y una vez B, entonces se tienen que expresar las dos combinaciones posibles que hay: $P(AB) = P(A_1 B_2) + P(B_1 A_2)$

CONCLUSIONES

- ***Propiedad #1*** La probabilidad de un suceso imposible o nulo es cero:

$$P(\varnothing) = 0 \quad \leq P(A) \leq 1$$

- ***Propiedad #2***

La probabilidad del suceso complementario al suceso A es igual a 1 menos la probabilidad de que ocurra A.

$$P(A') = 1 - P(A)$$

- ***Propiedad #3***

Si A y B son dos sucesos definidos en S, la probabilidad de que ocurra A y no ocurra B será:

$$P(AB') = P(A) - P(AB)$$

- ***Propiedad #4***

Si A y B son dos sucesos definidos en S entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

- **La Probabilidad Condicional es la probabilidad que ocurra A dado que ya ocurrio B y es igual a**

$$P(A/B) = P(AB) / P(B)$$

- **Teorema de Bayes**

$$P(A_j/B) = \frac{P(B/A_j)\,P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)\,P(A_i)}$$

)

- **Eventos Independientes:** $P(AB) = P(A).P(B)$
  Eventos Dependiente: $P(AB) \neq P(A).P(B)$

- **Una variable aleatoria es un fenómeno de interés cuyas respuestas o resultados se pueden expresar numéricamente**.
- **Las variables aleatorias pueden ser discretas y continuas.**

El valor esperado de una variable aleatoria discreta es $\mu = E(x) = \sum x_i f(x)$

- **Función de Distribución $F(x) = P(X \leq X_k)$ Equivalente a la distribución acumulada estudiada en el Tema 1.**

ESTUDIO INDEPENDIENTE

Ejercicio # 1. En un taller se espera que la probabilidad que material A se agote es de 0.10, mientras que el de un material B de 0.60. Se conoce además de que la probabilidad que se agoten ambos materiales es 0.04. De acuerdo a lo planteado, calcule e interprete la probabilidad que:

a) El material B se agote dado que el material A se agotó.
b) Material A o el material B se agote.
c) ¿Los sucesos del inciso a serán mutuamente excluyentes? Justifique su respuesta.

Ejercicio # 2. Una planta de armado de aparatos de radio tiene dos líneas de montaje. La línea I produce un 80% de ellas, en tanto que la línea II produce él 20% restante. Un promedio del 5% de los radios armados en la línea I y un 10% de los de la línea II son defectuosos. Un aparato elegido al azar entre los que están listos para su despacho se halla en mal estado.
¿Cuál es la probabilidad de que haya sido montado en la línea I?
¿Cuál es la probabilidad de que haya sido montado en la línea II?