



COLECCIÓN DE EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS I

GRADO DE
ADMINISTRACIÓN Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS

CURSO ACADÉMICO 2011-12

TEMA 1: NOCIONES BÁSICAS DE ÁLGEBRA

Matrices, determinantes, rango y cálculo de la inversa

1.- Calcula:

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ -6 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 9 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad (d) 2 \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

2.- Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -9 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -11 \\ 16 & 8 \end{pmatrix}$$

Calcula $3A+2B$ y $2A+B$

3.- Calcula:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad (d) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(e) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 13 & -2 & 7 \end{pmatrix} \quad (f) \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 13 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(g) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad (h) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(i) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (j) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(k) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(l) \begin{pmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z+3 \end{pmatrix}$$

4.- Calcula:

$$(a) \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(d) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$(e) \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$(f) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(g) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(h) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$$

$$(i) \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(j) \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$(k) \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(l) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

5.- Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \\ 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(e) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

$$(f) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(g) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(h) \begin{pmatrix} 6 & -9 & 8 & -7 & -11 \\ -12 & 14 & -13 & 12 & -9 \\ -12 & 2 & -4 & 6 & 0 \\ 6 & -13 & 11 & -9 & 9 \end{pmatrix}$$

6.- Determina si los siguientes conjuntos de vectores son libres o ligados. Si son ligados, encuentra un subconjunto con el máximo número de vectores linealmente independientes.

- (a) $\{(1,3,1), (2,1,0), (1,9,2)\}$
 (b) $\{(2,3), (4,1), (1,0), (2,2)\}$
 (c) $\{(2,5,1,1,0), (1,4,0,1,2), (2,2,2,0,-4)\}$
 (d) $\{(2,1,0,3), (-2,1,3,0), (0,0,0,0), (1,5,2,1)\}$
 (e) $\{(1,2,9), (-1,-2,-9), (0,1,2), (2,-1,8), (1,-3,-1)\}$

7.- Hallar la inversa de las siguientes matrices, si existe:

- (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
 (d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

8.- Decide para qué valores del parámetro t la matriz A no tiene inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & t & 3 \\ 4 & 1 & -t \end{pmatrix}$$

Sistemas de ecuaciones lineales y no lineales

9.- Resuelve:

- (a) $\left. \begin{array}{l} 6x - 2y - 2z = 8 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x + 2y + 2z = -1 \end{array} \right\}$ (b) $\left. \begin{array}{l} 2x + y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + 2y + 4z = 3 \end{array} \right\}$ (c) $\left. \begin{array}{l} x + y + 2z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \\ -x + 2y + z = -5 \end{array} \right\}$
 (d) $\left. \begin{array}{l} 2x + y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{array} \right\}$ (e) $\left. \begin{array}{l} 2x + y + 3z - w = 2 \\ x - y + z + w = 1 \end{array} \right\}$ (f) $\left. \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \end{array} \right\}$
 (g) $\left. \begin{array}{l} 2x + y = 4 \\ x - 2y = 0 \\ 3x + y = 5 \end{array} \right\}$ (h) $\left. \begin{array}{l} 3x + 2y - z = 0 \\ x - y + z = 1 \\ -x + 2z = 1 \end{array} \right\}$ (i) $\left. \begin{array}{l} x - y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ x - 2y = -1 \\ 4x + y + 3z = 8 \end{array} \right\}$

10.- Resuelve:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \quad \left. \begin{array}{l} 3x^2 + 2xy = 0 \\ x^2 + 2y = -2 \end{array} \right\} & \text{(b)} \quad \left. \begin{array}{l} 3x^2 - 3 = 0 \\ 3y^2 - 12 = 0 \end{array} \right\} & \text{(c)} \quad \left. \begin{array}{l} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{array} \right\} \\
 \text{(d)} \quad \left. \begin{array}{l} 3x^2 - 6y = 39 \\ 6x - 2y = 18 \end{array} \right\} & \text{(e)} \quad \left. \begin{array}{l} 12x^3 - 8xy = 0 \\ -4x^2 + 2y = 0 \end{array} \right\} & \text{(f)} \quad \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{array} \right\} \\
 \text{(g)} \quad \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{array} \right\} & \text{(h)} \quad \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ x + y + z = 12 \\ xy = 12 \end{array} \right\}
 \end{array}$$

11.- Las funciones de oferta y demanda de un modelo de mercado con 2 mercancías son las siguientes:

$$\begin{array}{ll}
 Q_{s1} = -2 + 3P_1 & Q_{d1} = 10 - 2P_1 + P_2 \\
 Q_{s2} = -1 + 2P_2 & Q_{d2} = 5 + P_1 - P_2
 \end{array}$$

Se pide calcular los precios de equilibrio (\tilde{P}_1 , \tilde{P}_2) y las cantidades de equilibrio (\tilde{Q}_1 , \tilde{Q}_2).

12.- Calcula los precios de equilibrio \tilde{P}_1 , \tilde{P}_2 , \tilde{P}_3 y las cantidades de equilibrio \tilde{Q}_1 , \tilde{Q}_2 , \tilde{Q}_3 del modelo de mercado con tres mercancías cuyas funciones de oferta y demanda son las siguientes:

$$\begin{array}{ll}
 Q_{s1} = 4 - 2P_1 + P_3 & Q_{d1} = 8 - P_1 + 3P_2 \\
 Q_{s2} = -5 + 2P_1 - P_3 & Q_{d2} = 2 + 2P_1 - 2P_3 \\
 Q_{s3} = 4 - P_1 + 2P_3 & Q_{d3} = -4 + P_1 + 2P_2 + 3P_3
 \end{array}$$

13.- Una empresa fabrica tres productos en cantidades x , y , z . Para ello utiliza tres materias primas M1, M2 y M3. La cantidad disponible de cada materia prima es 280, 460 y 220 unidades respectivamente. Para producir una unidad del primer artículo se utilizan 2 unidades de M1, 6 de M2 y 8 de M3. Para producir una unidad del segundo artículo se utilizan 4 unidades de M1, 11 de M2 y 1 de M3. Para producir una unidad del tercer artículo se utilizan 8 unidades de M1, 6 de M2 y 2 de M3. Determina la cantidad a producir de cada artículo si debe usarse exactamente toda la materia prima disponible.

Ejercicios de revisión

1.- Explica las condiciones que debe cumplir una matriz A para que exista su determinante.

2.- Explica las condiciones que debe cumplir una matriz A para que exista su matriz inversa y define la matriz inversa de A.

3.- Sean las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = (1 \ 0 \ 1)$$

(a) Indica si existen, y en su caso calcula, los siguientes productos de matrices: A^2 , AB , CA y BC .

(b) Calcula AI , siendo I la matriz identidad.

(c) Calcula, si existe, A^{-1} . En caso de existir, indica el resultado de AA^{-1} .

4.- Obtén los valores de x , y , z que verifican la siguiente ecuación:

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.- Clasifica el siguiente sistema y, si es posible, resuélvelo:

$$\left. \begin{array}{l} x + y - 2z + t + 3u = 1 \\ 2x - y + 2z + 2t + 6u = 2 \\ 3x + 2y - 4z - 3u - 9t = 3 \end{array} \right\}$$

6.- Calcula el valor de m para que el siguiente sistema sea compatible:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 3 \\ x - 3y = 1 \\ 2x + y = m \end{array} \right\}$$

Ejercicios de matemáticas elementales

1.- Simplifica las siguientes expresiones:

(a) $a^3 b^2 a^5 b$

(b) $(64x^3)^{2/3}$

(c) $4^2(64)^{-4/3}$

(d) $\sqrt[4]{x^{10}y^5}$

(e) $\sqrt{x}\sqrt{xy^4}\sqrt[3]{x^6}$

(f) $(\sqrt[5]{x^2y})^{5/3}$

(g) $\frac{x^3y^5}{x^2y^8}$

(h) $\frac{(x^{-1})^2(x^2)^5}{x^3x}$

(i) $\left(\frac{x^{1/3}y^{2/3}}{z^2}\right)^3$

(j) $\frac{x^3/y^4}{x^2/y^3}$

(k) $\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{5x^{-3}}}{\sqrt{25x^2}}\right)^2}$

(l) $\frac{1}{x+h} + \frac{1}{x-h}$

2.- Efectúa las siguientes operaciones:

(a) $(3x^2y+y-y^3+3) + 2(x^3-y-x^2y)$ (b) $(x^2+x-2) \cdot (x-1)$
 (c) $(x^2-y+3)(x^3+y^{-1})^2$ (d) $\frac{2}{x-4} - \frac{x^2}{x^2-3}$ (e) $\frac{3}{x+1} - \frac{4}{x-1}$
 (f) $\frac{2(x-3)}{x^2-4} - \frac{x+3}{x-2}$ (g) $\frac{3}{x+1} + 4$ (h) $\frac{x}{x-2} \cdot \frac{x^2-4}{x^3}$

3.- Realiza la descomposición factorial de los siguientes polinomios. Es decir, transfórmalos en productos de monomios o polinomios de menor grado:

(a) x^2-9 (b) x^2-x-6 (c) $x^2+8x+16$
 (d) $25x^2+20x+4$ (e) $x^3-x^2-8x+12$ (f) $x^4+x^3-7x^2-x+6$

4.- Haz la división de los siguientes polinomios:

(a) $(2x^3-14x-5):(x-3)$ (b) $(x^4-2x^2+3):(x^2-1)$
 (c) $(x-2x^3-3+3x^4):(2x^2-1)$ (d) $(x^4-2x^2+x-3):(x^2-2x+1)$

5.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

(a) $(2x-1)^2 - 3x^2 = 2\left(\frac{1}{2} - 4x\right)$ (b) $x+2 = \sqrt{4-x}$ (c) $x+2 = \sqrt{4x+13}$
 (d) $\frac{(x+1)^2}{x(x-1)} + \frac{(x-1)^2}{x(x+1)} - 2\frac{3x+1}{x^2-1} = 0$ (e) $|x+2| = \sqrt{4-x}$ (f) $x = 2 + \sqrt{x^2-2}$
 (g) $\sqrt{2x+14} - \sqrt{x-7} = \sqrt{x+5}$ (h) $0 = 3x^2 - 11x + 6$ (i) $3x^2 - 27 = 0$
 (j) $\frac{3x+2}{2} - \frac{4}{3}(x-2) = x - \left(\frac{x-3}{2} - \frac{2}{7}(5-2x)\right)$

6.- Resuelve las siguientes inecuaciones:

(a) $\frac{5x-2}{3} - \frac{x-8}{4} \geq \frac{x+14}{2} - 2$ (b) $5x+4 > 2x-8$ (c) $\frac{x-4}{x^2-9} \leq 0$

(d) $\frac{3x-3}{5} - \frac{4x+8}{2} > \frac{x}{4} - 3x$ (e) $4x-7 > 6x+5$ (f) $x^2 - 5x + 6 > 0$

7.- Razona si son ciertas las implicaciones siguientes:

(a) $x = 2$ e $y = 5$ implica $x + y = 7$ (b) $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$ implica $x = 1$

(c) $x^2 + y^2 = 0$ implica $x = 0$ ó $y = 0$ (d) $xy = xz$ implica $y = z$

(e) $x = 0$ e $y = 0$ implica $x^2 + y^2 = 0$ (f) $x > y^2$ implica $x > 0$

¿Son ciertas las implicaciones recíprocas?

TEMA 2: Límites y continuidad de funciones

Nociones de topología en \mathbb{R}^n . Funciones de una y varias variables: función homogénea, compuesta e implícita

1.- Calcula el dominio de las funciones siguientes y represéntalos gráficamente cuando sea posible:

(a) $F(x) = \frac{x+1}{(x-2)(x+3)}$

(b) $F(x) = \sqrt{\frac{-x+1}{2+x}}$

(c) $F(x, y) = \frac{\sqrt{x}}{2x-y}$

(d) $F(x, y) = \sqrt{x^2 + 2xy + y^2}$

(e) $F(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + 2y} - \sqrt[4]{x-y}$

(f) $F(x, y, z) = (x^{y+z}, \ln(x+y+z))$

(g) $F(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(h) $F(x, y) = \begin{cases} x^2 + 3y^3 & x \geq y \\ \sqrt{xy} & x < y \end{cases}$

(i) $F(x, y) = (\sqrt{x} + y, \ln(x-1), e^{\sqrt{y}})$

2.- Calcula el dominio matemático y económico de las siguientes funciones:

(a) $D(I, p, p') = \frac{\sqrt{Ip'}}{2p}$ siendo D la función de demanda de un producto, I la renta del consumidor, p el precio del producto y p' el precio de un bien sustitutivo.

(b) $C(q) = q^3 - 9q^2 + 36q + 20$ siendo C la función de costes y q la producción diaria.

(c) $Q(K, L) = \sqrt{L^2 + K^2}$ siendo Q la función de producción, K el capital y L el trabajo.

(d) $U(C, F) = \sqrt[4]{CF^3}$ siendo U la función de utilidad de un consumidor, C el consumo de chocolate y F el consumo de fresas.

3.- Estudia la homogeneidad de las siguientes funciones. En caso afirmativo, halla su grado:

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ (b) $f(x, y, z) = x^2 yz + 3x^3 + 2y^2 + z$ (c) $f(x, y) = Ax^\alpha y^{1-\alpha}$

(d) $f(x, y) = \operatorname{sen} \frac{x}{y}$ (e) $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$ (f) $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2x^2 y}$

(g) $f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{z}$ (h) $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + y)$

4.- Dadas las funciones de producción siguientes:

(a) $Q(L, K) = AK^\alpha L^\beta$, donde A, α y β son parámetros reales y $A, \alpha, \beta > 0$.

(b) $Q(L, K) = A + \beta \left(\frac{K}{L} \right)^\alpha$, donde A, α y β son parámetros reales y $A, \alpha, \beta > 0$.

(c) $Q(L, K) = A [\beta K^\alpha + (1-\beta)L^\alpha]^\frac{1}{\alpha}$, donde A, α y β son parámetros reales, $A, \alpha, \beta > 0$ y $0 \leq \beta \leq 1$.

Estudia si son homogéneas o no en función de sus parámetros. Y en caso afirmativo indica el tipo de rendimientos a escala (crecientes, constantes o decrecientes) que presenta una empresa con dicha función de producción.

5.- Calcula (si existen) las funciones compuestas $g \circ f$ y $f \circ g$ siendo:

(a) $f(x, y) = \frac{x}{y}$, $g(t) = (2t, \frac{2}{t})$

(b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $g(t) = (\sin t, \cos t)$

(c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$, $g(t) = (t^2, \frac{1}{t}, \ln t)$

6.- (a) Calcula la composición de la función $f(x, y, z) = y + 3z - z^2$ con las funciones $x = 2u$, $z = -u$.

(b) Calcula la función compuesta de las funciones $f(x, y) = 3y - x^2$, $y = x + 1$.

7.- Calcula de forma explícita la función $y(x)$ implícita en las siguientes ecuaciones:

(a) $F(x, y) = x^2 y + yx - 2 = 0$

(b) $F(x, y) = x^2 + \ln(xy) - 4 = 0$

(c) $F(x, y) = x^2 + y^2 - 9 = 0$

Representación gráfica de funciones: curvas de nivel

8.- Representa gráficamente las siguientes funciones:

(a) $f(x) = e^{x-1}$

(b) $f(x) = \ln(x+1)$

(c) $f(x) = \sin(x + \pi)$

9.- Representa gráficamente las siguientes funciones:

(a) $F(x) = \begin{cases} 2x+1 & -1 \leq x \leq 2 \\ 9-x^2 & x > 2 \end{cases}$ (b) $F(x) = \begin{cases} 4x^2 & x \leq 3 \\ x+6 & x > 3 \end{cases}$

10.- Sean las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x \leq 2 \\ 9 + 4x & x > 2 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2x & x \leq 3 \\ x + 9 & x > 3 \end{cases}$$

Calcula la expresión de la función $(f-g)(x)$. Representarla gráficamente.

11.- Representa gráficamente las siguientes funciones:

- (a) $C = 200 + 0.6Y$ donde C es el gasto del consumidor e Y representa sus ingresos
- (b) $I = 80Q - 0.2Q^2$ donde I representa los ingresos y Q la producción
- (c) $C = 200e^{0.05T}$ donde C es el capital obtenido al cabo de T unidades de tiempo con un interés del 5%

12.- Representa gráficamente las siguientes curvas de nivel:

- (a) Curva de nivel 4 de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$
- (b) Curva de nivel 0 de la función $f(x, y) = -x^2 + 2x - y$
- (c) Curva de nivel 1 de la función $f(x, y) = xy$

13.- Considera la función de utilidad dada por $U(x, y) = \sqrt{3x} + \sqrt{y}$, donde x e y son el número de unidades consumidas de dos bienes.

- (a) Representa gráficamente las curvas de nivel (curvas de indiferencia) correspondientes a los niveles de utilidad 4 y 6.
- (b) Si el consumo actual es $(x, y) = (3, 4)$, dibuja la curva de indiferencia sobre la que nos encontramos.
- (c) Utiliza las curvas de nivel para aproximar, gráficamente, las unidades que habría que consumir del primer bien si el consumo del segundo disminuye una unidad ($y = 3$) y queremos mantener el nivel de utilidad.
- (d) Estima, gráficamente, en cuántas unidades hay que aumentar el consumo del primer bien si queremos aumentar el nivel de utilidad en una unidad manteniendo el consumo del segundo bien constante ($y = 4$).

Conceptos de límite y continuidad

14.- Calcula, si existen, los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x}$ (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1}{x}$ (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x^2 + 1}{x}$ (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{x}$
 (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ (f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \frac{1}{x}$ (g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x^2+1}{x}}$

15.- Calcula, si existen, los siguientes límites:

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} 4e^{3(x-2)^2+y}$ (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \left(\frac{y}{x}, y^2 + x, x^3 + \sqrt{xy} \right)$

16.- Dada la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq y^2 \\ 1 & \text{si } x < y^2 \end{cases}$$

Calcula, si existen, los siguientes límites:

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} f(x, y)$ (c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} f(x, y)$

17.- Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x > 2 \\ 1 & x \leq 2 \end{cases}$$

Representácala gráficamente. Estudia si es continua en los puntos $x=2$ y $x=6$.

18.- Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 2 \\ 3x - 1 & x \neq 2 \end{cases}$$

Representácala gráficamente. Estudia si es continua en el punto $x=2$.

19.- Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 7x + 10}$ (b) $f(x, y) = \frac{3xy}{x^2 + y^2}$
 (c) $f(x, y) = xy + \operatorname{sen}(xy) + \ln(x^2 + y^2)$ (d) $f(x, y) = e^{\frac{xy}{\sqrt{x-y}}}$
 (e) $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy) \ln(\sqrt{x-y})$ (f) $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+y+z}}$

(g) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$ en $x = -1$

(h) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-2} & x < 0 \\ \frac{x}{x^2 - 3x + 2} & 0 \leq x \leq 5 \\ \frac{1}{12}x & x > 5 \end{cases}$

Ejercicios de revisión

1.- Pon un ejemplo de cada uno de los siguientes tipos de funciones:

- (a) Función real de variable real.
- (b) Función real de varias variables que sea un polinomio.
- (c) Función escalar de varias variables que no sea un polinomio.
- (d) Función vectorial de \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^2 cuyas funciones componentes sean lineales.
- (e) Función de \mathbb{R} a \mathbb{R}^3 . ¿Es escalar o vectorial?
- (f) Función vectorial de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^4 definida en un subconjunto de \mathbb{R}^2 .
- (g) Función vectorial de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^4 definida en todo \mathbb{R}^2 .
- (h) Función vectorial de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^4 definida en un subconjunto de \mathbb{R}^2 .

2.- Sea la siguiente función:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0.3y + b & \text{si } y \geq 4 \\ x + \sqrt{y} & \text{si } y < 4 \end{cases}$$

Se pide:

- (a) Calcula el valor del parámetro b para que la función $f(x, y)$ tenga límite en el punto $(x, y) = (0, 4)$.
- (b) Calcula el dominio de $f(x, y)$. Obtén un punto que pertenezca al dominio y otro que no.
- (c) Estudia la continuidad de $f(x, y)$ para todo punto de su dominio si $b = 1$.

3.- La función de demanda de un producto viene dada por:

$$D(p, r) = \frac{2r^2 p^2}{r^4 + p^4} e^{\frac{r}{p}}$$

- (a) Calcula el dominio matemático y el dominio con sentido económico de esta función.
- (b) Estudia su continuidad.
- (c) Estudia si la función es homogénea.
- (d) Si el precio depende a su vez del precio de dos materias primas según la relación:
 $p = 2m_1 + m_2$. Calcula la expresión de la demanda respecto a estos precios.

Ejercicios de matemáticas elementales

1.- Calcula, sin la calculadora, el valor de las siguientes expresiones:

- (a) $\log 10$ (b) $\log 100$ (c) $\log_{64} 8$ (d) $\log_2(1/16)$
(e) $\cos 0$ (f) $\sin 90^\circ$ (g) $\tan 2\pi$

2.- Calcula, con la calculadora, el valor de las siguientes expresiones:

- (a) $\ln 10$ (b) $\ln 3$ (c) $\log_5 66$ (d) $\log_3 7$
(e) $\cos \pi/2$ (f) $\cos 30^\circ$ (g) $\sin 3\pi/2$

3.- Explica las diferencias entre $\cos x^2$, $\cos^2 x$, $\cos(x^2)$ y $(\cos x)^2$

4.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

- (a) $2^x = 64$ (b) $10^x - 10^{-x} = 2$ (c) $4^x + 6 \cdot 4^x = 5$
(d) $\log(2x+7) - \log(x-1) = \log 5$ (e) $4^x - 2^{x+3} + 12 = 0$ (f) $(\sqrt{2})^{x\sqrt{3}} = 2^{x+1}$
(g) $\frac{2 \cdot 3^x - 5}{11} + \frac{3^{x+1} - 4}{5} = 3^x - 3$ (h) $\frac{\log(35 - x^3)}{\log(5 - x)} = 3$ (i) $\frac{\log(16 - x^2)}{\log(3x - 4)} = 2$

5.- Resuelve los sistemas de ecuaciones siguientes:

- (a) $\left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 35 \\ \log x - \log y = 1 \end{array} \right\}$ (b) $\left. \begin{array}{l} 2^x 3^y = 25 \\ 3^x 5^y = 35 \end{array} \right\}$ (c) $\left. \begin{array}{l} 3^{2x} 2^{3y+1} = 8 \\ 2^{3x} 2^{2y-3} = 5 \end{array} \right\}$
(d) $\left. \begin{array}{l} 2^{x+1} = 128 \\ \log x + \log y = 1 \end{array} \right\}$ (e) $\left. \begin{array}{l} \log x + \log y = 4 \\ \log x - \log y = 2 \end{array} \right\}$

6.- Sean $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^3 + x$. Calcula:

- (a) $(f+g)(x)$ (b) $(f+g)(1/2)$ (c) $(4f)(x)$ (d) $(fg)(x)$
(e) $(f/g)(x)$ (f) $(f \circ g)(x)$ (g) $(g \circ f)(x)$ (h) $(g \circ f)(-3)$

TEMA 3: DERIVABILIDAD DE FUNCIONES

Definición e interpretación económica de derivada de una función real. Cálculo de derivadas

1.- Estudia la derivabilidad en $x=0$ y $x=1$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 0 \\ -x^2 - 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

2.- Estudia la derivabilidad de $f(x) = |x - 2|$. Calcula la función $f'(x)$.

3.- Estudia la derivabilidad de:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ x - 2 & 0 \leq x \leq 4 \\ x^2 - 4 & x > 4 \end{cases}$$

4.- Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

(a) $F(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$

(b) $F(x) = \frac{1-x^{-1}}{1-x}$

(c) $F(x) = \ln \frac{x^2-4}{2x}$

(d) $F(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

(e) $F(x) = \frac{x+1}{e^{x-1}}$

(f) $F(x) = \sin^2(4x^2 + 2)$

(g) $F(x) = 3^{x^2+2x+1}$

(h) $F(x) = 4x^{1/2} + 2x^{-1/2}$

(i) $F(x) = \frac{2}{4-x^2}$

5.- Sea $C(x) = x^2 + 3x + 100$ la función de costes de una empresa. Prueba que la tasa media de variación cuando x varía de 100 a $100+h$ es $\frac{C(100+h) - C(100)}{h} = 203 + h$ ($h \neq 0$).

¿Cuál es el coste marginal $C'(100)$?

6.- Si el ahorro total de un país (S) es una función del producto nacional (Y), entonces $S'(Y)$ se llama *propensión marginal al ahorro* (PMA). Encuentra la PMA para las funciones siguientes:

(a) $S(Y) = a + bY$

(b) $S(Y) = 100 + 10Y + 2Y^2$

7.- Supongamos que la relación entre la renta bruta Y y el total de impuestos T sobre la renta de los contribuyentes con renta entre 80.000 y 120.000 € viene dada por la ecuación $T = a(bY + c)^p + kY$ donde a, b, c, p i k son constantes positivas.

(a) Encuentra la expresión del tipo marginal del impuesto dT/dY .

(b) Un estudio empírico dedujo las estimaciones siguientes de las constantes anteriores:

$a=0,000338$; $b=0,81$; $c=6.467$; $p=1,61$; $k=0,053$. Utiliza estas cantidades para encontrar los valores de T y dT/dY cuando $Y=100.000$

Definición e interpretación económica de derivadas parciales de funciones escalares y vectoriales

8.- Calcula todas las derivadas parciales de las siguientes funciones:

- (a) $F(x,y) = 1 - \frac{1}{\sqrt{y-2x}}$ (b) $F(x,y) = \frac{1-x^{-4}}{1-y}$ (c) $F(x,y,z) = z + \ln \frac{x^2-4y}{2z}$
 (d) $F(x,y) = (\sqrt{x^2+2y}, \frac{x}{1-y})$ (e) $F(x,y) = \frac{x+4}{e^{y-4}}$ (f) $F(x,y) = \cos(4x^2+2y)$
 (g) $F(x,y) = (x^2+xy^2, \sqrt{x^2+y})$ (h) $F(x,y)=3^{x+2y+1}$ (i) $F(x,y,z) = 4x^{1/2} + yz^{-1/2}$

9.- Calcula las derivadas parciales de primer orden de las funciones siguientes:

- (a) $f(x,y,z) = x^3y + 2xz^2 - 3xyz$ (b) $f(x,y,z) = \text{sen}(xy^2z)$ (c) $f(x,y) = y^{\cos x}$
 (d) $f(x,y) = \frac{x^3 - 2xy}{4x + y^2}$ (e) $f(x,y) = e^{x+1} \cdot e^{-2y}$ (f) $f(x,y,z) = \frac{e^y \cos(x+2)}{\ln(z-1)}$
 (g) $f(x,y) = \text{sen}^8(x^2+y^3)$ (h) $f(x,y) = \text{sen}(x+2y^2)^8$ (i) $f(x,y) = \ln^3(x/y)$

10.- Calcula las derivadas parciales de las siguientes funciones:

- (a) $f(x,y) = x^3 + y^2$ (b) $f(x,y) = e^x \cos y$ (c) $f(x,y) = y$
 (d) $f(x,y) = \text{Ln}\left(\frac{y}{x}\right)$ (e) $f(x,y) = \frac{\text{Ln}(x-3y)}{x^2 + \sqrt{y}}$ (f) $f(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$
 (g) $f(x,y) = 3^{(5x-1)} \cdot \text{sen}(4y^2 - 2x)$ (h) $f(x,y) = (x+2)(y-3)$ (i) $f(x,y) = e^{x \text{Ln} y}$
 (j) $f(u,v,w) = (u^2 + v^2 + w^2)^{-1/2}$ (k) $f(x,y) = e^{x \text{Ln} y} \cdot \text{sen}(x+y)$ (l) $f(x,y,z) = (xy)^z$
 (m) $f(x,y,z) = \frac{x(2 - \cos(2y))}{x^2 + z^2}$ (n) $f(x,y) = \frac{\text{Ln}(2x-2y)}{x^{1/2}}$ (ñ) $f(x,y) = \left(\frac{x^5 + 2y}{y^3}\right)^6$
 (o) $f(x,y) = (x^2 - 3y)^5 + 5^{(x^2-3y)}$ (p) $f(x,y) = \text{Ln}\left(\sqrt{x + e^{x+y}}\right)$ (q) $f(x,y) = \cos^4(2xy)$
 (r) $f(x,y,z,t) = \frac{\sqrt[3]{y}}{\text{Ln} x} + \text{sen}(zt)$ (s) $f(x,y,z) = \frac{z}{\text{sen}\left(\frac{y}{x}\right)}$
 (t) $f(x,y,z) = 2z^3 - 3(x^2 + y^2)z$ (u) $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

11.- Dada la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y & \text{si } x > 3 \\ x^2 & \text{si } x \leq 3 \end{cases}$$

- (a) Halla las derivadas parciales de primer orden en (2,0).
(b) Halla las derivadas parciales de primer orden en (4,3).

12.- Escribe la definición de derivada parcial para una función de n variables (x_1, \dots, x_n) respecto de x_i . Escribe la definición de derivada parcial de una función de 3 variables (x, y, z) respecto de z. Escribe la definición de derivada parcial de una función de 3 variables (x, y, z) respecto de z en el punto (a, b, c) .

13.- Calcula e interpreta económicamente el signo de la derivada o de las derivadas parciales de las siguientes funciones económicas.

- (a) Función de demanda-precio: $Q(p) = 10 + \frac{25}{p}$, $p > 0$
(b) Función de producción per cápita (k es el capital per cápita):
 $y(k) = 10k^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $k > 0$
(c) Función de producción Cobb-Douglas: $F(K, L) = 10K^\alpha L^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $K > 0$, $L > 0$
(d) Función de utilidad CES:

$$U(x, y) = (ax^\alpha + (1-a)y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha > 1, 0 < a < 1, x > 0, y > 0$$

14.- Dada la función de producción del tipo Cobb-Douglas:

$$F(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, A > 0, K > 0, L > 0$$

donde Y es la producción, A es un coeficiente tecnológico, K es el input capital y L es el input trabajo, calcula la productividad marginal del capital y del trabajo. Determina su signo e interprétalo económicamente.

15.- La función de beneficios de una empresa depende del precio de venta de su producto (p_0) y de los precios a los que adquiere sus dos inputs (p_1 y p_2):

$$B(p_0, p_1, p_2) = \frac{p_0^4}{64p_2p_1^2}, \quad p_0 > 0, p_1 > 0, p_2 > 0$$

Calcula el signo de las tres derivadas parciales e interprétalas económicamente.

16.- La función de demanda de un bien relaciona la cantidad demandada de ese bien (x) en unidades físicas, la renta per cápita del país (Y) en €, el precio de ese bien (p) en €, y el precio del resto de bienes (p_0) en €:

$$x(Y, p_0, p) = \frac{Y^2 p}{3 p_0^2}, \quad Y > 0, p_0 > 0, p > 0$$

Calcula el signo de las derivadas parciales, sus unidades de medida e interprétalas económicamente.

17.- Indica el signo y las unidades de medida que tendrán en condiciones normales las derivadas siguientes:

- (a) El salario de un trabajador respecto del tiempo.
- (b) La demanda de un artículo respecto de su precio.
- (c) El volumen de ventas de una empresa respecto de su inversión en publicidad.
- (d) El ahorro medio de los habitantes de un país respecto del índice de precios.
- (e) El precio del petróleo respecto de la cantidad ofertada de petróleo.

Derivadas sucesivas de funciones de una o más variables

18.- Sea $U(x)$ la función de utilidad de un consumidor, donde x es la cantidad consumida de un bien.

- (a) Explica la diferencia de interpretación entre $\left. \frac{dU}{dx} \right|_{10}$ y $\left. \frac{dU}{dx} \right|_{1000}$
- (b) ¿Cuál es el signo que cabría esperar en estas dos derivadas?
- (c) ¿Cuál de las dos es de esperar que sea mayor?
- (d) ¿Cuál es el signo que cabría esperar para $\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{10}$?
- (e) Si $U(10)=3'65$ y $\left. \frac{dU}{dx} \right|_{10} = 0'22$, calcula aproximadamente $U(10'5)$

19.- Dadas las funciones $f(x, y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + (1 + y)^2}$, $g(x, y) = \frac{2x}{x^2 + (1 + y)^2}$ definidas en

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x, y) \neq (0, -1)\}.$$

- (a) Comprueba que $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$ y que $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$.
- (b) Calcula $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ y $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

20.- Dada la función $f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$. Calcula $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)$.

21.- Dada la función $f(x, y) = x^2 \sin y$:

(a) Verifica el teorema de Schwarz para todo punto de \mathbb{R}^2 .

(b) Calcula $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$

(c) Calcula $\frac{\partial^5 f}{\partial x^2 \partial y^3}(1,0)$

Gradientes, jacobianas y hessianas

22.- Calcula el vector gradiente de las funciones siguientes:

(a) $f(x,y) = \sin(3x^2 - y)$

(b) $f(x, y, z) = x^{\frac{1}{2}} - (yz)^{\frac{2}{3}}$, en el punto (9,4,2)

(c) $f(x, y, z) = \frac{2x^2 - 3y^3}{xz^3}$, en el punto (2,0,1)

23.- Calcula la matriz jacobiana de las funciones siguientes:

(a) $f(x,y) = (x-y)^3$

(b) $f(x, y) = \left(x^2 + y, e^{\frac{y}{x}} \right)$ en el punto (2,0)

(c) $f(x) = \left(x^{\frac{5}{2}}, \frac{1}{x}, \cos x \right)$

(d) $f(x, y) = \left(x^{\frac{5}{2}}, \frac{1}{x}, \cos x \right)$

24.- Calcula el vector gradiente de la función $f(x, y) = \sqrt{x} \sin^3(x^2 + xy)$.

25.- Dada la función $f(x, y) = \frac{x \sin y + \ln x}{y^2 + 1}$. Calcula el valor de a para que

$\nabla f(a,0) = (e^{-1}, e)$.

26.- Calcula la matriz jacobiana de $f(x, y, z) = (\sqrt{y+z}, \ln(x-3y))$ en el punto (2,-1,5).

27.- ¿Existe una función f tal que $\nabla f(x, y) = (3xy + 3x^3 - 2, 4x^4y^2 - 6xy)$?

28.- Calcula la matriz hessiana de las funciones:

(a) $f(x,y) = \sin(3x^2-y)$

(b) $f(x, y, z) = x^{\frac{1}{2}} - (yz)^{\frac{2}{3}}$, en el punto (9,4,2)

(c) $f(x, y, z) = \frac{2x^2 - 3y^3}{z^3}$, en el punto (2,0,1)

29.- Sabiendo que el vector gradiente de una función real de dos variables reales, $f(x,y)$, es, $\nabla f(x,y) = (6xy + 10xy^3, 3x^2 + 15x^2y^2 - 6y^5)$, calcula la matriz hessiana de $f(x,y)$.

30.- Calcula el valor de a para que la matriz hessiana de $f(x, y, z) = x \ln y + e^{2z}$ en el punto (2,1,a) sea:

$$Hf(2,1,a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

31.- Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ una función derivable en un punto (a,b) . Escribe la expresión de la matriz Jacobiana $Jf(a,b)$ y la de la matriz hessiana $Hf_1(a,b)$ (asegúrate de que el punto (a,b) aparece donde corresponda en la expresión).

Ejercicios de revisión

1.- Estudia la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = \frac{|x|}{x+1}$

2.- La función de costes de un artículo determinado es $C(x) = 30 + 10x + 2x^2$, valorada en euros, y el precio unitario del artículo viene dado por la expresión $p(x) = 60 - 2x$ donde p viene expresado en euros. Determina:

- (a) Los dominios de definición de las dos funciones.
- (b) El coste marginal.
- (c) La función de ingresos.
- (d) La función de beneficios $B=I-C$.
- (e) El ingreso marginal.
- (f) El beneficio marginal

3.- (a) Calcula la matriz jacobiana en el punto (1,0) de la función:

$$f(x, y) = (\sin^2(x^2 + y^2), \ln(x - y^2))$$

(b) Calcula la matriz hessiana en el punto (1,0) de la función:

$$g(x, y) = e^{x^2-y}.$$

4.- Dada la función $f(x, y) = e^{x^2-y}$

(a) Calcula el vector gradiente de la función en el punto (1,1).

(b) Calcula la matriz hessiana de la función en el punto (1,1).

5.- (a) Calcula la matriz jacobiana de la función $f(x, y) = \left(\frac{xy}{x+1}, \sin(xy) \right)$.

(b) Calcula la matriz hessiana de la función $g(x, y) = \sin(xy)$.

6.- Los ingresos impositivos por IVA (en % del PIB) se estiman con la siguiente función:

$$I(x, y, z) = 0,00006 (100-y) x z$$

donde x es el tipo impositivo (en %), actualment $x=18$; y es el peso de la economía sumergida (en %), actualmente $y=20$; z es el consumo (en % del PIB), actualmente $z=76$.

Se pide:

(a) Calcula la derivada parcial de los ingresos impositivos por IVA respecto al peso de la economía sumergida en la situación actual e interpreta económicamente su signo.

(b) Calcula aproximadamente como cambiarían los ingresos impositivos por IVA si el tipo impositivo aumenta a $x=20$ desde la situación actual, suponiendo que el resto de variables se mantienen constantes.

(c) Calcula la elasticidad respecto al tipo impositivo en la situación actual, es decir, la

$$\text{expresión: } E = \frac{\partial I}{\partial x} \cdot \frac{x}{I} \Big|_{(18,20,76)}$$

7.- Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

(a) Sea $C(x, y)$ la función de costes (en euros) de una empresa que fabrica x unidades de un producto A e y unidades de un producto B. Sabemos que:

$$C(40,23) = 2550, \quad \frac{\partial C}{\partial x}(x, y) = 2x + y, \quad \frac{\partial C}{\partial y}(x, y) = x$$

Con esta información, el coste de fabricación de 40 unidades de A y 28 de B será aproximadamente de:

i) 3090 €

ii) 540 €

iii) 2750 €

iv) 2752'38 €

- (b) Sean x e y las cantidades que utiliza una empresa de las materias primas A y B respectivamente. Cuando $x = 3$, $y = 7$, las derivadas parciales de la función de costes son:

$$\frac{\partial C}{\partial x}(3,7)=10, \quad \frac{\partial C}{\partial y}(3,7)=15$$

Con esta información podemos deducir que:

- i) Si se utilizan 5 unidades de la materia A sin variar la cantidad consumida de B, el coste de la empresa aumenta aproximadamente en 10 u.m.
 - ii) Si se utilizan 6 unidades de la materia B sin variar la cantidad consumida de A, el coste de la empresa aumenta aproximadamente en 15 u.m.
 - iii) Si se utilizan 4 unidades de la materia A sin variar la cantidad consumida de B, el coste de la empresa aumenta aproximadamente en 10 u.m.
 - iv) Si se utilizan 8 unidades de la materia B sin variar la cantidad consumida de A, el coste de la empresa aumenta aproximadamente en 10 u.m.
- (c) La función de producción de una empresa viene dada por la expresión $Q(K, L) = 25K^{0.2}L^{0.8}$, donde K es el capital invertido y L el número de horas trabajadas. En la actualidad, $K=3125$ u.m. y $L=32$ horas. Si se decide aumentar únicamente el número de horas trabajadas a 42 horas, el incremento aproximado que experimentará la producción será de:

- i) 500 u. ii) 128 u. iii) 2100 u. iv) 50128 u.

8.- Define el concepto de gradiente de una función $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ en el punto (a, b, c) .

9.- Dada una función $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en el punto (a, b, c) explica la interpretación de la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_2}(a, b, c)$

Ejercicios de matemáticas elementales

1.- Calcula la derivada de las funciones siguientes:

- | | | |
|--|--|---|
| (a) $y = x^{10} + 2x^4 - x^3$ | (b) $y = x^{-7}$ | (c) $y = (x^3 + 2x^2)^7$ |
| (d) $y = \frac{2x + 5}{3}$ | (e) $y = \frac{1}{3\sqrt{x}}$ | (f) $y = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}$ |
| (g) $y = \frac{x^4 + 1}{2x^2 + 1}$ | (h) $y = \frac{2x - 5x^2 + x^3}{(2x - 8)(3x - 4)}$ | (i) $y = \frac{1}{x}$ |
| (j) $y = \frac{(2x + 3)^3}{(3x^2 - 2x + 6)^2}$ | (k) $y = \frac{1}{x^3 + x^2 + 2}$ | (l) $y = \frac{\sqrt{3x - 5}}{\sqrt{5x^2 - 5x + 4}}$ |
| (m) $y = x^2 + \sqrt{x^3 - 2}$ | (n) $y = (2x^2 + x + 1)^4$ | (ñ) $y = 2\sqrt[5]{x^4 - 1}$ |

(o) $y = (2x^{\frac{-1}{4}} + \frac{3}{\sqrt[4]{x}})(x^2 + x^4)$

(p) $y = \frac{1}{x^4}$

(q) $y = \sqrt{x+1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

(r) $y = \ln(\text{sen}^{1/4} x)$

(s) $y = \ln(x^2 + 1)$

(t) $y = \text{sen}^3(x^2 + 2)$

(u) $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

(v) $y = \frac{e^x \cos x}{\ln x}$

(w) $y = 3^{2x+1}$

(x) $y = \text{sen} \frac{x+1}{x-1}$

(y) $y = \frac{\cos x}{x^2 + 2x}$

(z) $y = \text{sen} \left(\frac{x^2 - 1}{x} \right) - \frac{1}{x}$

(aa) $y = \sqrt{\text{sen } x}$

(bb) $y = \sqrt[4]{\cos x}$

(cc) $y = e^{x^2} + 3x$

TEMA 4: DIFERENCIABILIDAD DE FUNCIONES

Diferenciabilidad de funciones

1.- Estudia la diferenciabilidad de las siguientes funciones y calcula su diferencial:

- (a) $f(x, y, z) = x^3y + 2xz^2 - 3xyz$ (b) $f(x, y) = 2x^2 + \ln y$ (c) $f(x, y) = \cos(x + y)$
(d) $f(x, y, z) = (xy^2z)$ (e) $f(x, y) = y^{\cos x}$ (f) $f(x, y) = \frac{x^3 - 2xy}{4x + y^2}$

2.- Dada la función $f(x, y) = \frac{x^2y}{xy - 3}$

- (a) Razona si es diferenciable en el punto (1,1) y, si lo es, calcula la diferencial de la función en ese punto.
(b) Utiliza la diferencial para calcular un valor aproximado de $f(1.1, 0.8)$.

3.- Estudia si la función $f(x, y) = e^{x+y} \cos(xy^2)$ es diferenciable en \mathbb{R}^2 .

4.- Sea $C(x, y)$ la función de costes total de una empresa que fabrica “x” unidades de un producto “A” e “y” unidades de un producto “B”. Se sabe que:

$$C(36, 20) = 2288 \text{ €} , \quad \frac{\partial C}{\partial x} = x + 2y , \quad \frac{\partial C}{\partial y} = y + 2x .$$

Se pide:

- (a) Calcula e interpreta $\frac{\partial C(36, 20)}{\partial x}$ y $\frac{\partial C(36, 20)}{\partial y}$.
(b) Justifica que la función $C(x, y)$ es diferenciable en (36, 20).
(c) Calcula aproximadamente el coste total de fabricación de 38 unidades del producto “A” y 20 unidades del producto “B”.

5.- El pago anual que efectúa una persona por un préstamo viene dado por la función

$$P(V, i, n) = \frac{Vi}{1 - (1+i)^{-n}} , \text{ en donde } i \text{ es el tipo de interés, } V \text{ el capital prestado (en euros), y}$$

n el plazo (en años). Para un préstamo de 1000 euros a un plazo de 10 años con $i = 0.04$, se pide:

- (a) Calcula aproximadamente el efecto sobre el pago anual de un aumento en el tipo de interés hasta $i = 0.0425$.
(b) Calcula aproximadamente el efecto sobre el pago anual si simultáneamente se produce una disminución del capital prestado de 100 euros y una disminución del plazo de 1 año.

6.- Los beneficios (B) de la industria del automóvil en Europa en millones de euros evolucionan en función del precio del petróleo (p) en dólares/barril, del crecimiento económico (g) en puntos porcentuales y de los salarios medios mensuales (w) en euros. No se conoce la forma exacta que relaciona estas variables, pero se estiman los efectos de cambios en cada variable por separado en la situación actual. Con el barril a 90 dólares, un crecimiento económico del 2.5% y unos salarios medios mensuales de 2000 euros, los beneficios han sido de 500 millones de euros y los efectos estimados son

$$\left. \frac{\partial B}{\partial p} \right|_s = -15, \quad \left. \frac{\partial B}{\partial g} \right|_s = 50, \quad \left. \frac{\partial B}{\partial w} \right|_s = 0.5.$$

- (a) Determina las unidades en las que se miden estas derivadas parciales.
- (b) Obtén los beneficios aproximados que se obtendrán el próximo año si el petróleo baja a 82 dólares por barril, la economía crece un 1.5%, y los salarios medios mensuales suben hasta 2050 euros. ¿Qué hipótesis matemática es necesaria para calcular estos beneficios?
- (c) Calcula una función de beneficios lineal y aproximada para situaciones económicas parecidas a la actual.

7.- La función de beneficios de una empresa viene dada por $B(x, p, i) = \frac{x \ln(1+i)}{p^2}$ en donde

x son las unidades de producto fabricadas, p es el precio del producto (en u.m.) e i es la inversión en publicidad (en u.m.).

- (a) Si actualmente se fabrican 1000 unidades de producto y se venden a 2 u.m. la unidad, con una inversión en publicidad de 9 u.m., calcula e interpreta las derivadas parciales de B en la situación actual.
- (b) Calcula aproximadamente los beneficios que se obtendrían si se fabricasen 100 unidades más, el precio aumentase en 0.5 u.m. y la inversión en publicidad pasase a ser 15 u.m. ¿Conviene hacer este cambio?

8.- Calcula el polinomio de Taylor de grado 1 de la función $f(x, y) = \ln(x + y) + \frac{x e^y}{y + 1}$ en el punto (1,0) y utilízalo para calcular una aproximación del valor de la función en el punto (0.9,0.1).

9.- Calcula el polinomio de Taylor de grado 1 de la función $f(x, y) = \frac{x + 2y^3}{x^2 + y}$ en el punto (1,0).

10.- Calcula los polinomios de Taylor de grado 1 y 2 de las siguientes funciones en los puntos indicados:

- (a) $f(x, y) = \cos(x - y)$ en el punto $(\pi, 0)$.
- (b) $f(x, y) = xy^3 - 3xy^2 + x$ en el punto $(2, -1)$.
- (c) $f(x, y) = xe^y$ en el punto $(1, 0)$.

Relación entre los conceptos de continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad

11.- Sea $f(x, y)$ una función diferenciable en el punto $(3, 1)$ de la que sabemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3, 1) = 5 \text{ y } \lim_{(x, y) \rightarrow (3, 1)} f(x, y) = 6.$$

Indica, razonadamente, cuál es el valor de la función en el punto $(3, 1)$.

12.- Di cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas:

- (a) Toda función diferenciable en un punto es continua en dicho punto.
- (b) Toda función continua en un punto es diferenciable en dicho punto.
- (c) Toda función diferenciable en un punto tiene derivadas parciales en dicho punto.
- (d) Toda función con derivadas parciales en un punto es diferenciable en dicho punto.
- (e) Toda función continua en un punto tiene derivadas parciales en dicho punto.
- (f) Toda función con derivadas parciales en un punto es continua en dicho punto.

13.- Di cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas:

- (a) Toda función de clase C^1 en un punto es diferenciable en dicho punto.
- (b) Toda función diferenciable en un punto es de clase C^1 en dicho punto.
- (c) Toda función de clase C^1 en un punto es continua en dicho punto.
- (d) Toda función de clase C^∞ en un punto es diferenciable en dicho punto.
- (e) Toda función de clase C^∞ en un punto es continua en dicho punto.

Direcciones de crecimiento de una función

14.- Dada la función $f(x, y) = 2x + \frac{4y}{x}$, averigua las direcciones de crecimiento nulo de f en el punto $(1, -1)$.

15.- Calcula las direcciones de máximo crecimiento, máximo decrecimiento y crecimiento nulo de las siguientes funciones en el punto indicado:

- (a) $f(x, y) = (x - y)e^{\frac{3x+y}{x}}$ en el punto $(1, 0)$.
(b) $f(x, y, z) = (xyz) + \ln(x - z^2)$ en el punto $(1, 1, 0)$.

16.- Dada la función de producción de tipo Cobb-Douglas $Y(K, L) = 10\sqrt{K}\sqrt{L}$, obtén la dirección de máximo crecimiento desde la situación $K = 100$, $L = 36$ e interprétala económicamente.

17.- Calcula la dirección de máximo crecimiento, de mínimo crecimiento y de crecimiento nulo de las siguientes funciones en los puntos indicados:

- (a) $f(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$ en el punto $(2, -3)$.
(b) $f(x, y, z) = e^{xy} - z^2$ en el punto $(0, 2, 3)$.
(c) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ en el punto $(-1, 1)$.
(d) $f(x, y, z) = z \ln(x^2 + y^2)$ en el punto $(1, 1, 1)$.

Derivada de la función compuesta

18.- Calcula la función compuesta definida por las siguientes funciones y sus derivadas parciales de primer orden. Comprueba que estas derivadas coinciden con las obtenidas usando la regla de la cadena.

- (a) $f(x, y, z) = e^x + y + z$, $x(t) = \ln t$, $y(t) = e^t$, $z = t^3$
(b) $z(x, y) = x^2 + y^2$, $x(t) = 3t$, $y = -t^2$.
(c) $z(x, y) = x^y$, $x(t) = t$, $y(t) = \cos t$.
(d) $f(u, v) = u^3 v^3 + u + 1$, $u(v) = e^v$.
(e) $z(u, v) = \ln(u^2 + v)$, $u(x, y) = e^{x^2 + y^2}$, $v(x, y) = x^2 + y$.
(f) $f(x, y, z) = \frac{e^x \ln y}{z}$, $y(x, z) = e^{xz}$.

19.- Calcula el vector gradiente de las funciones compuestas definidas por las siguientes funciones en los puntos indicados usando la regla de la cadena:

- (a) $f(x, y) = e^x y$, $x(t) = t^2$, $y(t) = 3t$ en el punto $t = 0$.
(b) $z(x, y) = e^{3x+2y}$, $x = 3t^2$, $y = \cos t$ en el punto $t = \pi$.
(c) $f(x, y, z) = \frac{e^x \ln y}{z}$, $y(x, z) = e^{xz}$ en el punto $(x, z) = (0, 1)$.
(d) $t(u, v) = u + e^v$, $u(x, y, z) = (xy + z)$, $v(x, z) = z + x^2$ en el punto $(x, y, z) = (2, \pi, 0)$.

20.- Calcula la diferencial de las funciones compuestas definidas por las siguientes funciones usando la regla de la cadena:

(a) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^3$, $x(r, s) = r + s$, $y(r, s) = \frac{r}{s}$, $z(r, s) = r - s$.

(b) $z(u, v) = u^3 v^3 + u + 1$, $u(x, y) = x^2 + y^2$, $v(x, y) = e^{x-y} - 1$.

(c) $f(u, v) = u^3 v^3 + u + 1$, $v(u) = e^u - 1$.

(d) $z(u, v) = \ln \frac{u}{v}$, $u(x, y) = 3^{x+y}$, $v(x) = \sin^2(x)$.

(e) $f(u, v) = v + e^u$, $u(x, y, v) = (xv + y)$.

21.- Calcula la expresión de las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ siendo $z = f(x, y)$ donde $x = F(u, v, w)$, $y = G(u, v, w)$.

22.- La función de beneficios de una empresa que fabrica un único producto es

$$B(x, D, P) = 8D - 3x - P - 100,$$

en donde x es la cantidad de producto que fabrica, D es la demanda de dicho producto y P son los costes destinados a publicidad.

(a) Calcula las derivadas parciales de B e interprétalas.

(b) Supongamos que la empresa, para no incurrir en costes de almacenamiento, ajusta la producción a su demanda, es decir, considera que $x = D$. Calcula la función compuesta $B(D, P)$ así como sus derivadas. Explica las diferencias de interpretación entre estas derivadas y las obtenidas en el apartado anterior.

(c) El signo de $\frac{\partial B}{\partial P}$ es negativo. ¿Cómo se interpreta esto? ¿Es razonable?

(d) La demanda de la empresa depende de su inversión en publicidad, es decir, la demanda es una función $D(P)$. La empresa no conoce esta función, pero estima que, para la inversión

actual en publicidad P_0 , se cumple $\left. \frac{dD}{dP} \right|_{P_0} = \frac{2}{5}$. ¿Es esto razonable?

(e) No podemos calcular la función compuesta $B(P)$, pero sí que podemos calcular $\left. \frac{dB}{dP} \right|_{P_0}$.

Calcula esta derivada e interprétala. ¿Le conviene a la empresa aumentar su inversión en publicidad?

23.- El índice de precios al consumo de una economía depende de los índices de precios sectoriales (x : agricultura, y : industria, z : servicios) según la función

$$I(x, y, z) = 0.2x + 0.35y + 0.35z.$$

Por otra parte, estos índices de precios son a su vez función del nivel de salarios (s) y del tipo de interés (r) según las funciones

$$x(s, r) = 2s + 5\ln r, \quad y(s, r) = \sqrt{s + 2r^2}, \quad z(s, r) = s^2 + 3r.$$

(a) Calcula la función $I(s, r)$.

(b) Calcula (derivando directamente) e interpreta las derivadas

$$\frac{\partial I}{\partial x}, \quad \frac{\partial I}{\partial y}, \quad \frac{\partial I}{\partial z}, \quad \frac{\partial I}{\partial s}, \quad \frac{\partial I}{\partial r}.$$

(c) Calcula las dos últimas derivadas del apartado anterior mediante la regla de la cadena. Observa que se obtiene el mismo resultado.

24.- Sea $B(x, p, p')$ la función de beneficios de una empresa que fabrica un único bien, en donde x es la cantidad fabricada del bien, p es su precio y p' es el precio medio de la competencia. En el instante actual para el nivel de fabricación $x = 100$ unidades y los precios $p = 30$ u.m. y $p' = 32$ u.m. se estima que

$$\left. \frac{\partial B}{\partial x} \right|_{(100, 30, 32)} = 4, \quad \left. \frac{\partial B}{\partial p} \right|_{(100, 30, 32)} = -2, \quad \left. \frac{\partial B}{\partial p'} \right|_{(100, 30, 32)} = 3.$$

Supongamos que la competencia ajusta sus precios según los de la empresa, de modo que $p' = p + 2$.

(a) Calcula $\left. \frac{\partial B}{\partial x} \right|_{(100, 30)}$ y $\left. \frac{\partial B}{\partial p} \right|_{(100, 30)}$. Explica la diferencia entre estas derivadas y las dos

primeras del enunciado, desde un punto de vista matemático y en cuanto a su interpretación económica.

(b) Estima los beneficios de la empresa si se produce simultáneamente un aumento del nivel de producción de 2 unidades y un aumento del precio de 0.5 u.m. ¿Qué hipótesis necesito exigir sobre $B(x, p)$ para realizar esta aproximación?

25.- La recaudación por IVA (R) es el producto del tipo impositivo (i) por el gasto en consumo (G):

$$R(i, G) = i \cdot G.$$

Sin embargo, ambas variables no son independientes ya que un aumento en el tipo impositivo se estima que tendría una influencia negativa en el consumo. En la situación actual, el gasto es de $G = 100$ millones de euros con un tipo impositivo de $i = 0.16$, y se estima que

$$\left. \frac{dG}{di} \right|_{0.16} = -150.$$

Obtén el efecto global sobre la recaudación de un aumento marginal en el tipo impositivo.

Derivada de la función implícita

26.- Cada una de las siguientes relaciones define una función $y(x)$ en un entorno del x_0 especificado, tal que $y(x_0) = y_0$. Calcula la derivada de dicha función en x_0 .

(a) $x^2y + y^2x = 2$ con $y(1) = 1$.

(b) $x^2 + y + y^2x = 4$ con $y(0) = 4$

(c) $x^2 + y^2 = 9$ con $y(0) = 3$

(d) $x^2 + \ln(xy) = 4$ con $y(2) = \frac{1}{2}$.

(e) $x^2 \ln(xy) = 0$ con $y(2) = \frac{1}{2}$.

27.- Las ecuaciones siguientes definen una función $z(x, y)$ en un entorno del punto (x_0, y_0) . Calcula las derivadas parciales de dicha función en (x_0, y_0) .

(a) $x^2y + y^2z - yz^2 = 1$ con $z(1,1) = 1$.

(b) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con $z(0,2) = 0$.

(c) $x^2yz - yz^2 - 2x + 2 = 0$ con $z(1,1) = 1$.

(d) $x^2 + z \ln(xy) + e^{y+z} = 5$ con $z\left(2, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.

(e) $e^z + 2xy - (yz) = 1$ con $z(1,0) = 0$.

28.- Sea $y(x, z)$ una función implícita dada por $x^2yz + x \operatorname{sen} y = 2\pi$ alrededor del punto $(x, y, z) = (1, \pi, 2)$. Calcula la diferencial de $y(x, z)$ en el punto $(x, z) = (1, 2)$ con $dx = -0'2$, $dz = 0'1$.

29.- Sea $x(y, z)$ una función implícita dada por $f(x, y, z) = -x^2 + y^2z + z^3 = 1$ alrededor del punto $(x, y, z) = (3, 1, 2)$. Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial x}{\partial y}$, $\frac{\partial x}{\partial z}$ en el punto $(y, z) = (1, 2)$.

30.- Calcula las derivadas parciales de la función implícita z respecto x e y dada por la ecuación $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 14$ alrededor del punto $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

31.- Los beneficios de una empresa vienen determinados por la función $B(x, y) = e^{y-x} + xy$, en donde x e y son las cantidades producidas de dos artículos diferentes. Calcula la relación de sustitución del segundo producto respecto del primero $\left(RSP = -\frac{dy}{dx} \right)$ si el nivel de producción actual es $(x, y) = (20, 20)$ e interpreta el valor obtenido.

32.- La combinación de consumos de tres bienes (x, y, z) que proporcionan la misma utilidad para un consumidor es $2\ln x + \ln y + 0.5\ln z - \ln 240 = 0$. Si el consumidor tiene unos consumos de $x = 4$, $y = 5$ y $z = 9$, razona cómo deberían variar los consumos x e y si se desea disminuir el consumo z en una unidad marginal manteniendo el nivel de utilidad.

Ejercicios de revisión

1.- Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Di qué clase de objeto (un número real, un vector, una matriz o una función) son:

(a) $df(1,2)(dx, dy)$; $df(1,2)(3,1)$; $df(x, y)(3,1)$.

(b) $\frac{\partial f}{\partial y}$; $\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,2)}$.

(c) $\nabla f(2,3)$; $Hf(2,3)$.

(d) La dirección de máximo crecimiento de f en el punto $(1, -1)$.

(e) La derivada direccional de f en $(2,1)$ en la dirección del vector $(1, -1)$.

(f) El polinomio de Taylor de grado 1 de f en el punto $(2,3)$.

2.- La función de costes de una empresa en un instante t (expresado en años) es

$$C(x, y, t) = 100 + (20x + 10y)e^{0.01t},$$

en donde x e y son las cantidades producidas de cada uno de los dos artículos que fabrica. En el año actual $t = 0$ la producción ha sido $(x_0, y_0) = (50, 30)$.

(a) Calcula las derivadas parciales de C en la situación actual.

(b) Teniendo en cuenta el valor de las derivadas obtenidas en el apartado anterior, ¿qué coste aproximado cabría esperar el próximo año ($t = 1$) si simultáneamente aumentara la producción del primer artículo en 1 unidad y disminuyera la producción del segundo artículo en 2 unidades? ¿Qué hipótesis debe cumplir la función $C(x, y, t)$ para realizar esta aproximación? ¿Se cumple para esta función de costes?

- (c) Por otra parte, las cantidades producidas de estos artículos varía con el tiempo $x = x(t)$, $y = y(t)$, y la empresa estima que

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_0 = 1, \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_0 = -0.5.$$

Calcula e interpreta $\left. \frac{dC}{dt} \right|_0$. ¿Qué diferencia de interpretación existe entre esta derivada y

$$\left. \frac{\partial C}{\partial t} \right|_{(50,30,0)} ?$$

- (d) Teniendo en cuenta el valor de las derivadas obtenidas en el apartado anterior, ¿qué coste aproximado cabría esperar el próximo año ($t = 1$)? ¿Qué hipótesis debe cumplir la función $C(t)$ para realizar esta aproximación? ¿Se cumple para esta función de costes?

3.- La producción de una empresa se mantiene constante si los factores productivos cumplen la relación $25x^{1/2}y^{1/2} = 1000$. Calcula $\frac{dy}{dx}$ si la empresa utiliza 100 unidades del primer factor (x) y 16 unidades del segundo (y), e interpreta económicamente el resultado.

4.- Dada la función $f(x, y, z) = ze^{xy}$ donde $x = -2v$, $y = 2u$, $z = \ln(u + v)$, calcula $\frac{\partial f}{\partial u}$ en el punto $(u, v) = (1, 0)$, utilizando la regla de la cadena.

5.- Se estima que la función de demanda de un producto viene dada por:

$$D(x, p, p') = \frac{60p' \sqrt{1 + xp'}}{p}$$

donde p es el precio de venta del producto, x es el esfuerzo de marketing destinado a ese producto y p' es el precio medio de venta de la competencia. En la situación actual el esfuerzo de marketing es $x = 0$ (en tanto por uno) y los precios son $p = p' = 15$ u.m. Se pide:

- (a) Calcula e interpreta las derivadas parciales de $D(x, p, p')$ en la situación actual.
 (b) Estudia si la función D es diferenciable y calcula la diferencial de D en la situación actual.
 (c) Estudia, mediante la diferencial, cómo afecta a la demanda el efecto conjunto de un incremento del esfuerzo de marketing de $\Delta x = 0.01$, un incremento del precio de venta de $\Delta p = 1$ u.m. y un decremento del precio medio de venta de la competencia de $\Delta p' = -2$ u.m.

6.- Sea $f(x, y)$ una función diferenciable en todo \mathbb{R}^2 tal que $\frac{\partial f(5,9)}{\partial x} = 7$ y $df(5,9)(0'1, 0'2) = 1'5$.

Justifica cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

- (a) Un aumento de una unidad respecto del valor actual de la variable “y” manteniendo fijo el de la variable “x” supone un aumento aproximado de 1'5 unidades en el valor de la función.
- (b) Un aumento de una unidad respecto del valor actual de la variable “y” manteniendo fijo el de la variable “x” supone un aumento aproximado de 4 unidades en el valor de la función.
- (c) Un aumento de una unidad respecto del valor actual de la variable “y” manteniendo fijo el de la variable “x” supone una disminución aproximada de 4 unidades en el valor de la función.

7.- Una empresa fabrica tres bienes y obtiene un beneficio $B(p_1, p_2, p_3)$ donde p_i es el precio del bien $i, i = 1, 2, 3$. Los precios de los productos se fijan en función del precio de las dos materias primas que lo componen:

$$p_1 = \frac{1}{2}q_1 + \frac{3}{2}q_2, \quad p_2 = \frac{3}{5}q_1, \quad p_3 = \frac{1}{3}q_1 + \frac{2}{3}q_2.$$

Se sabe que:

$$\nabla B(p_1, p_2, p_3) = \left(2p_1, 2, \frac{1}{6} \right), \quad B\left(6, \frac{18}{5}, \frac{10}{3} \right) = \frac{1669}{45}.$$

- (a) Obtén, aplicando la regla de la cadena, las derivadas parciales de la función de beneficio respecto de los precios de las materias primas, cuando $q_1 = 6, q_2 = 2$.
- (b) Calcula cuál sería, aproximadamente, el beneficio que obtendría la empresa si los precios de las materias primas fueran $q_1 = 6'5, q_2 = 1'75$.

8.- Sea $C(x, p, q)$ la función de costes de una empresa, donde x es la producción (en unidades de producto) y p, q son los precios (en euros) de los dos inputs que utiliza. Actualmente $x = 1200, p = 6, q = 7, C(1200, 6, 7) = 25000$. Además,

$$\left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{(1200, 6, 7)} = 12, \quad \left. \frac{\partial C}{\partial p} \right|_{(1200, 6, 7)} = 4, \quad \left. \frac{\partial C}{\partial q} \right|_{(1200, 6, 7)} = 6.$$

- (a) Interpreta estas derivadas.
- (b) ¿Qué variación cabría esperar en la función de costes si el precio del primer input pasa a ser $p = 4$?
- (c) Supuesto que C sea diferenciable, ¿qué coste cabría esperar si el precio del primer input pasa a ser $p = 4$ y el del segundo $q = 10$?

9.- Dada la función $f(x, y) = x^2 + 7y^2 + axy$ con $x = u^2 + v^2$, $y = 3u - 5v$. Calcula el valor del parámetro a para que la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial u}$ en el punto $(u, v) = (2, 1)$ valga 272.

10.- Sea y la función de beneficios de una empresa que viene dada por la relación $f(x, y, z) = 5x - 12z - xy + y^2 = 393$ donde y es la función implícita de las variables x y z , que representan las cantidades vendidas de los bienes A y B respectivamente.

(a) Determina, usando la derivación implícita, qué opción será más beneficiosa para la empresa, vender una unidad más del bien A o vender 1 unidad más del bien B, si las cantidades vendidas son $x = 5$, $z = 11$.

(b) Se considera ahora que las cantidades vendidas dependen de los precios unitarios de ambos bienes p_1 y p_2 , según las relaciones $x = -p_1 + 4p_2$, $z = 5p_1 - 2p_2$. Calcula, utilizando la regla de la cadena, los beneficios marginales siendo los precios actuales $p_1 = 3$, $p_2 = 2$.

11.- Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

(a)Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

- i) Si una función no es continua entonces sólo será diferenciable si las derivadas parciales de primer orden son iguales.
- ii) Si una función es constante entonces el error cometido al aproximar el incremento exacto por la diferencial total es distinto de cero.
- iii) Si $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + 3y + 2xz$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x + 16y^3 - z$, $\frac{\partial f}{\partial z} = x^2 - y + \sin z$, entonces $f(x, y, z)$ es diferenciable.
- iv) Los polinomios sólo son diferenciables cuando son de una variable.

(b) La demanda de un producto viene dada por $D(p_1, p_2) = 300 - 20p_1^2 + 30p_2$ siendo p_1 el precio unitario de este producto y p_2 el precio unitario de un producto similar de la competencia. Se sabe que los precios varían con el tiempo según las expresiones $p_1 = 2 + 0'05t$, $p_2 = 2 + 0'1\sqrt{t}$ donde t se mide en meses. Dentro de 4 meses:

- i) La demanda aumentará.
- ii) La demanda disminuirá.
- iii) La demanda permanecerá constante.
- iv) Con estos datos no podemos saber cómo varía la demanda.

(c) Dada la función $f(x, y, z) = xy + 9z$, el punto $(x, y, z) = (1, 2, 3)$, y los incrementos $dx = 0'1$, $dy = -0'3$. El incremento experimentado por la variable z para que $df(1, 2, 3)$ valga 2'15 es:

- i) 2'25 ii) 0'15 iii) 0'25 iv) 0'85

(d) Dada la función $f(x, y) = e^{2x+5y}$ y el punto $(x, y) = (0, 0)$:

- i) Un incremento $\Delta x = 0'1$ provoca un incremento aproximado en la función de 1 unidad.
- ii) Unos incrementos $\Delta x = 0'1$, $\Delta y = -0'2$ en las variables originan un decremento aproximado de 0'8 unidades en la función.
- iii) Un decremento de 1 unidad en la variable y produce un incremento aproximado en la función de 5 unidades.
- iv) Un incremento unitario en cada variable supone un incremento exacto de 7 unidades en la función.

12.- Enuncia una condición suficiente de diferenciabilidad.

13.- Enuncia una condición necesaria de diferenciabilidad.

14.- Escribe las siguientes expresiones:

- (a) Diferencial de una función de real de 3 variables en un punto (a, b, c) .
- (b) Diferencial de una función real de una variable en un punto a .
- (c) Diferencial de una función de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^3 en un punto (a, b) .

TEMA 5: INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO INTEGRAL Y A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Técnicas elementales de cálculo de primitivas

1.- Calcular las integrales inmediatas siguientes:

- | | | |
|---|--|--|
| (a) $\int (2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - x^4) dx$ | (b) $\int x^4 \sqrt{1-x^2} dx$ | (c) $\int \sin(5x) e^{\cos 5x} dx$ |
| (d) $\int x^3 6^{x^4+3} dx$ | (e) $\int \sin(2x-3) dx$ | (f) $\int (\cos 2x - \sin 3x) dx$ |
| (g) $\int (x^2 + 3x^3 - \frac{1}{x}) dx$ | (h) $\int \frac{x^2}{1+x^3} dx$ | (i) $\int (\frac{3}{x} - \frac{x}{3}) dx$ |
| (j) $\int \frac{(2x-1)^2}{2x} dx$ | (k) $\int \frac{x+2}{2\sqrt{x+2}} dx$ | (l) $\int \frac{dx}{1+9x}$ |
| (m) $\int x \cos(-5x^2-3) dx$ | (n) $\int (x^2+1) \cos(x^3+3x) dx$ | (ñ) $\int x^2(3x^3+14)^3 dx$ |
| (o) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$ | (p) $\int \frac{2}{1+x} dx$ | (q) $\int (\sin x + e^x - \frac{1}{x}) dx$ |
| (r) $\int \sqrt[5]{5x+6} dx$ | (s) $\int \sqrt{x^2-2x^4} dx$ | (t) $\int \sqrt[5]{5x+6} dx$ |
| (u) $\int \frac{dx}{(2x-5)^4}$ | (v) $\int \frac{2e^x + e^{2x}}{e^x} dx$ | (w) $\int \frac{4x}{\sqrt[3]{3x^2+2}} dx$ |
| (x) $\int \frac{(x+3)}{(x^2+6x)^{1/3}} dx$ | (y) $\int \frac{7\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ | (z) $\int \frac{3^{\ln 3x}}{x} dx$ |
| (aa) $\int \frac{3x}{x^2-3} dx$ | (bb) $\int \frac{3^{3x+2}}{3^{3x+2}-3} dx$ | |

2.- Calcula las siguientes integrales

- | | | |
|------------------------|--------------------------|---------------------|
| (a) $\int x \cos x dx$ | (b) $\int e^x \sin x dx$ | (c) $\int \ln x dx$ |
| (d) $\int x^2 e^x dx$ | | |

Integral de Riemann: Condiciones de integrabilidad y regla de Barrow

3.- Determina si son integrables Riemann las siguientes funciones y en caso afirmativo, calcula el valor de las integrales en los intervalos considerados.

(a) $f(x) = (x - 2)^2$ si $x \in [0,3]$.

(b) $f(x) = \frac{1}{x - 2}$ si $x \in [0,3]$

(c) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \leq x < 4 \end{cases}$

4.- Calcula las siguientes integrales:

(a) $\int_0^\pi \cos 2x \, dx$

(b) $\int_0^2 \frac{x}{1 + x^2} \, dx$

(c) $\int_2^5 \sqrt{2x - 1} \, dx$

(d) $\int_0^1 x^2 e^{x^3} \, dx$

(e) $\int_2^{21} \frac{dx}{\sqrt[3]{x + 6}}$

(f) $\int_0^\pi (x + \sin 2x) \, dx$

(g) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, dx$

(h) $\int_0^1 \frac{e^x}{1 + 2e^x} \, dx$

(i) $\int_1^{e^2} \frac{3 \ln^2 x}{x} \, dx$

5.- Calcula $\int_0^5 f(x) \, dx$ para las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 3 \\ 9 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ x \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} x^{1/2} & \text{si } x < 4 \\ x^2 - 12 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x + 1} & \text{si } x < e \\ \frac{1}{5} & \text{si } x \geq e \end{cases}$

6.- Halla el área limitada por la curva $y = x^2$ y la recta $y = x$.

7.- Calcula el área comprendida entre la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje OX entre $x=0$ y $x=4$.

8.- Calcula el área limitada por las curvas $y = x^2 - 6x + 9$, $y = -x^2 + 4x - 3$

9.- Se conoce el coste marginal que supone construir un edificio, $CMg(x)$, de altura x (en metros) y viene dado por la siguiente función expresada en miles de euros por metro:

$$CMg(x) = \frac{dCT}{dx} = 10 + x + 0.2x^2$$

donde x indica la altura en metros del edificio y CT es el coste total de construir todo el edificio. Se pide:

- (a) El coste de construir entre el metro 40 y 50.
- (b) El coste de construir todo el edificio de 50 metros.
- (c) El coste medio por metro de construir todo el edificio de 50 metros.

10.- La función que indica el salario adicional que percibe un individuo representativo al cumplir un año más de edad es $w(x) = -6 + 0,2x$, donde w es el salario adicional en euros y x la edad en años. Se pide:

- (a) Calcula la función de salario total en función de la edad $W(x)$ si cuando el individuo tiene 30 años, el salario anual es de 1.710 euros.
- (b) Calcula el salario total que percibirá el individuo a lo largo de su vida laboral (entre 25 y 65 años).
- (c) Calcula el salario medio anual entre los 25 y 65 años.

11.- La función de costes de una empresa es tal que el coste fijo es $C_F = 80$ y el coste marginal C' viene dado por la siguiente función del producto $C'(q) = 2e^{0,2q}$. Determinar la función de coste total $C(q)$.

12.- La propensión marginal al ahorro en una determinada economía viene dada por la siguiente función de la renta, Y :

$$S'(Y) = 0.28 - 0.15 \frac{1}{\sqrt{Y}}.$$

Si el ahorro es nulo cuando la renta Y es de 90, halla la función de ahorro $S(Y)$.

13.- La tasa de formación del stock de capital de una Economía en un instante t , $K(t)$, viene dada por la inversión neta en t , $I(t)$. Si dicha función es:

$$I(t) = \frac{dK}{dt} = 3t^{1/2}$$

y el stock de capital inicial es $K(0)=65$ miles de millones de euros, obtenga la trayectoria temporal del stock de capital. Calcular la inversión neta realizada en el intervalo $[1,3]$, es decir, durante el segundo y tercer año.

14.- El valor futuro, VF, de una inversión continua de capitales por unidad de tiempo, $C(t)$, capitalizada a un tipo de interés i durante un periodo de tiempo $[0, b]$ es la siguiente integral Riemann:

$$VF = \int_0^b C(t)e^{i(b-t)} dt$$

- (a) Calcular el valor final para un ahorrador de una aportación continua de 1000€ al año durante diez años, periodo $[0, 10]$, con $i=0,025$.
- (b) Calcular el valor final si el capital es $1000e^{0,01t}$ € al año (capital creciente).
- (c) Calcular el valor final adicional que se acumula en el décimo año (en el intervalo $[9, 10]$) si el flujo de capital es el del apartado (a).

Integrales impropias de funciones reales de primera y segunda especie

15.- Resuelve las siguientes integrales:

- | | | |
|---|---|---|
| (a) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$ | (b) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x}$ | (c) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{1/4}}$ |
| (d) $\int_{-\infty}^1 e^{2x} dx$ | (e) $\int_{-\infty}^{-1} -\frac{dx}{x^2}$ | (f) $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx$ |
| (g) $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x^2}$ | (h) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x-5)^2}$ | (i) $\int_{-2}^2 \frac{x}{x^2-1} dx$ |
| (j) $\int_1^3 \frac{xdx}{x^2-1}$ | (k) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^4}$ | (l) $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/4}}$ |
| (m) $\int_{-2}^6 (x-2)^{-5/3} dx$ | (n) $\int_0^3 \frac{x}{x^2-1} dx$ | (ñ) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$ |
| (o) $\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ | | |

16.- El valor actual, VA, de un flujo continuo de capitales por unidad de tiempo, $C(t)$, descontado a un tipo de interés i durante un periodo de tiempo $[0, b]$ es la siguiente integral Riemann:

$$VA = \int_0^b C(t)e^{-it} dt$$

Se pide:

- (a) Calcular el valor actual de un capital continuo de 100€ al mes (capital constante) durante dos años, periodo $[0, 24]$, con $i=0,003$.
- (b) Calcular el valor actual si el capital es $100e^{0,001t}$ € al mes (capital creciente).
- (c) Calcular el valor actual si el flujo de capital es de 100€ al mes durante toda la vida (perpetuo), es decir, el periodo es $[0, +\infty[$.

Ecuaciones diferenciales de primer orden de variables separables

17.- Comprueba que las funciones dadas son soluciones de las ecuaciones diferenciales indicadas en cada apartado:

(a) $y' + 2y = 0$, Soluciones: $y(x) = e^{-2x}$, $y(x) = 5e^{-2x}$.

(b) $y' + xy = 0$, Solución: $y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

(c) $y' + y = \sin x$, Solución: $y(x) = e^{-x} - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x$

18.- Comprueba que las funciones dadas son soluciones generales de las ecuaciones diferenciales indicadas en cada apartado. Encontrar la única solución particular que cumple en cada caso la condición que se indica.

(a) $y' + 2y = 0$, $y(0) = 2$ Solución: $y(x) = Ae^{-2x}$

(b) $y' + y = \sin x$, $y(0) = -1$ Solución: $y(x) = Ae^{-x} - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x$

(c) $y' + 2y = x^2$, $y(0) = 1$ Solución: $y(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + Ae^{-2x}$

19.- Resuelve:

(a) $\frac{dy}{dx} = 2y$

(b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

(c) $(1 + e^x)y \frac{dy}{dx} = e^x$, $y(0) = 1$.

(d) $(1 + y^2)dx + xy dy = 0$.

(e) $\frac{dy}{dx} \sin x = y \cos x$.

(f) $x\sqrt{1-x^2} dx + y\sqrt{1-y^2} dy = 0$, $y(0) = 1$.

(g) $y \ln y dx + x dy = 0$, $y(1) = 1$.

20.- Resuelve:

(a) $\frac{dy}{dx} + 2y = 1$

(b) $\frac{dy}{dx} + 2xy = 2x$, $y(0) = -1$.

(c) $\frac{dy}{dx} + xy = x$

(d) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{3}{x}$

21.- Sean las siguientes funciones de demanda y de oferta de un bien:

$$Q_d(t) = 60 - 3p(t)$$

$$Q_s(t) = -32 + 5p(t)$$

Mientras que el ajuste que se produce en el precio del bien en caso de desequilibrio en el mercado viene dado por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dp}{dt} = 0,3(Q_d - Q_s).$$

Obtén la trayectoria temporal del precio de mercado de este bien si inicialmente su precio es $p(0)=6\text{€}$. Comenta si hay una convergencia hacia el precio de equilibrio o una divergencia a medida que pasa el tiempo.

22.- Una población de tamaño H cambia a lo largo del tiempo en función de una tasa de reproducción n y de la entrada neta de inmigrantes I , según la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dH}{dt} = nH + I$$

Sabiendo que la población inicial es $H(0)=44,2$ millones, $n=0,005$ e $I=0,15$, se pide:

- (a) Calcula la función de población total a lo largo del tiempo, $H(t)$.
- (b) Obtén el momento t' en el que la población alcanzará un tamaño de 50 millones.
- (c) ¿Cuánto tiempo será necesario para que la población aumente en 3 millones de personas?

Ejercicios de revisión

1.- Razona de qué tipo son las siguientes integrales y calcula su valor si es posible

(a) $\int_3^5 xe^x dx$

(b) $\int_2^5 \frac{1}{(x-2)^{1/2}} dx$

(c) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$

(d) $\int_0^{+\infty} 3e^{-2x} dx$

(e) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}} dx$

(f) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^3} dx$

(g) $\int_0^{+\infty} (x-1)^{-4/3} dx$

(h) $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

(i) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{3x} dx$

$$(j) \int_0^2 \frac{dx}{(4-2x)^3} \quad (k) \int_0^6 f(x)dx \text{ con } f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4x+1} & x < 3 \\ \frac{1}{2} & x \geq 3 \end{cases}$$

$$(l) \int_0^6 f(x)dx \text{ con } f(x) = \begin{cases} x & x < 4 \\ x \ln x & x \geq 4 \end{cases}$$

2.- Estudia la convergencia o divergencia de la siguiente integral en función del valor de α

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \text{ con } a > 0$$

3.- Una empresa dedicada a la comercialización de productos de bricolaje tiene como coste marginal (medido en millones de euros año)

$$C_m = t^3 - 3t^2 + 3t$$

¿Cuál será el coste total acumulado de la empresa desde el año 2002 hasta el año 2010?

4.- Una empresa se constituyó con un capital inicial de 500000€ y sus beneficios marginales en los 10 años siguientes han venido dados por $B_m(t) = (9-2t)e^{t^2-9}$ €/año. Calcula el beneficio acumulado por la empresa en dicho periodo, el beneficio medio y el capital final de la empresa.

5.- Resuelve la ecuación diferencial:

$$y' + 2xy = x$$

6.- Halla la solución de la ecuación diferencial $y' + y \cos(x) = \cos(x)$ que verifica la condición $y(0) = -1$.

7.- Halla la solución de la ecuación diferencial $y' = \sqrt{y} \cos x$ que verifica la condición $y(0) = 4$.

8.- Halla la solución de la ecuación diferencial $\frac{y'}{y^2} = (x-3)$ que verifica la condición $y(2) = 1/4$.

9.- Calcula la función $y(x)$ que verifica la ecuación $y' = 4x \ln x$ y que satisface la condición inicial $y(1) = 5$.

10.- Calcula la función $y(x)$ que verifica la ecuación $6yy' - \sqrt{x} = 0$ y que satisface la condición inicial $y(1) = 0$.