Álgebra lineal.

Seminario 1: Operaciones con matrices. Determinantes. Método de Cramer.

Objetivos:

- Conocer las definiciones de las operaciones (suma, multiplicación y multiplicación por un escalar) con matrices, determinante y menores de una matriz cuadrada.
- Aplicar estos conceptos y sus propiedades a la solución de ejercicios.
- Aplicar el concepto de determinante para resolver SEL utilizando el Método de Cramer.

Introducción:

Desarrollo:

Los estudiantes deben prepararse y exponer los siguientes aspectos teóricos y resolver los ejercicios que se plantean a continuación:

1. Operaciones con matrices. Propiedades.
   - Suma. Propiedades. (pág. 104, 105)
   - Multiplicación. Propiedades. (pág. 105, 109)
   - Multiplicación por un escalar. Propiedades. (pág. 103, 104)
2. Determinantes.
   - Definición de determinante. (pág. 36 a 46)
   - Propiedades de los determinantes. (pág. 51 a 60)
   - Menores. Cálculo de determinantes por menores. (pág. 49 a 51)
3. Método de Cramer para resolver SEL. (pág. 60 a 67)

Ejercicios:

1. Sean las matrices:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 11\\ 0 & 9 & -4\\ 7 & 7 & 3\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 12 & 0\\ 8 & 3\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}6 & 1\\ 2 & 3\\ 5 & 5\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}3 & 4 & 4\\ 7 & 5 & 3\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}\quad E=\begin{bmatrix}6 & 2 & 1\\ 4 & 5 & 7\end{bmatrix}$$

a) Determine cuales se pueden sumar.
b) En los casos posibles efectúe la suma.
c) Efectúa la suma de matrices $C + E^t$, tomando que los coeficientes de la matriz son elementos de Z_7.

2. Calcular los productos siguientes en los casos posibles.

$$\text{a)}\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\qquad \text{b)}\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}\qquad \text{c)}\begin{bmatrix}6 & -4 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\text{d)}\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}\qquad \text{e)}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 4\\ 1\end{bmatrix}$$

Efectúe el producto de matrices del inciso b tomando los coeficientes de las matrices en Z_8.

3. Dadas las matrices siguientes hallar M = 3(A B C - 2 I)

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\0 & 1 & 1\\2 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

4. Encontrar el elemento de la segunda fila y la tercera columna de la matriz producto

$$\begin{bmatrix}4 & -1 & 2\\0 & 5 & 8\\6 & -3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 4 & -6\\7 & 1 & 2\\5 & 12 & -4\end{bmatrix}$$

5. Escribir un algoritmo para:
a) Sumar matrices.
b) Multiplicar un número real por una matriz

6. Expresar el siguiente sistema de ecuaciones lineales como un producto de matrices de la forma AX = B

5x – 2y -3z = 4
4x + 2y + 18z = 1

7. Expresar la siguiente ecuación matricial como un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix}1 & 8 & 7 & 2\\0 & 3 & 6 & 1\\1 & 3 & 9 & 18\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$$

9. Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\-4 & -3 & 5\\2 & 0 & 6\end{pmatrix},$$

a) Calcule el menor M_{23}.

b) Calcule el determinante de A.

c) Si A es la matriz asociada a un SEL, ¿es posible resolverlo aplicando el método de Cramer? En caso afirmativo aplíquelo y dé el conjunto solución conociendo que la columna de los términos independientes es:

$$b=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Conclusiones:

Insistir en los aspectos de mayor dificultad presentados por los estudiantes y explicar que pueden utilizar el asistente matemático Derive para realizar estas operaciones para lo que deben revisar el material de orientación sobre el uso de este asistente que se ha preparado y que se encuentra en el sitio.

Bibliografía.

Libro de texto páginas. 36- 71, 79- 90 .

Historia:

Cramer, Gabriel

(Ginebra, Suiza, 1704-Bagnols-sur-Cèze, Francia, 1752) Matemático suizo. Fue catedrático de matemáticas (1724-1727) y de filosofía (1750-1752) en la Universidad de Ginebra. En 1750 expuso en Introducción al análisis de las curvas algebraicas la teoría newtoniana referente a las curvas algebraicas, clasificándolas según el grado de la ecuación. Reintrodujo el determinante, algoritmo que Leibniz ya había utilizado al final del siglo XVII para resolver sistemas de ecuaciones lineales con varias incógnitas. Editó las obras de Jakob Bernoulli y parte de la correspondencia de Leibniz.