

CLASE TEÓRICO PRÁCTICA 1

Tema I: Sistema de Ecuaciones Lineales y Matrices.

Título: SEL y Matrices. Método de Gauss

Sumario:

Ecuaciones lineales.

Sistemas de ecuaciones lineales.

Método de Gauss.

Matrices.

En este tema estudiaremos los sistemas de ecuaciones lineales, matrices y los determinantes y veremos algunos métodos para resolverlos. Comenzaremos por algunas definiciones.

El objetivo fundamental es que adquieran herramientas para poder resolver sistemas de ecuaciones lineales de m ecuaciones con n incógnitas. Además de que dominen el trabajo con matrices para que puedan ser utilizadas para resolver problemas de diferente índole.

Ecuaciones lineales.

Definición

Una ecuación con n variables x_1, x_2, \dots, x_n se dice *lineal*, si puede escribirse en la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

Las a_i son los *coeficientes* y b es el *término independiente* de la ecuación. A las variables se les llama incógnitas o indeterminadas. Si $b = 0$, la ecuación se dice *homogénea*, en caso contrario se dice *no homogénea*.

La ecuación que se obtiene de sustituir “ b ” por 0, es la *ecuación homogénea asociada* con la ecuación.

Ejemplos:

1. La ecuación

$$x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 6x_4 = -5$$

2. $2x_1 - 2x_2 + \sqrt{7}x_3 = 0$

3. Las ecuaciones $x + y = 2$, $x - y^2 = 1$, $\cos x = y$

Solución de una ecuación lineal

Definición: Una solución particular de una ecuación lineal es un sistema k_1, k_2, \dots, k_n de números, tales que, al ser sustituidos en la ecuación, se obtiene una identidad.

El sistema homogéneo correspondiente es

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} .$$

Veamos qué entenderemos por solución de un sistema de ecuaciones lineales.

Definición:

Se denomina una **solución** del sistema a un conjunto de n números k_1, k_2, \dots, k_n , tales que, al sustituir $x_1 = k_1, x_2 = k_2, \dots, x_n = k_n$ en todas las ecuaciones de sistema, las satisfacen idénticamente. El conjunto de todas las soluciones posibles se conoce como el **conjunto solución**. Cualquier elemento genérico del conjunto solución se llama **solución general**.

Ejemplo:

Probemos que $x_1 = -4, x_2 = -1$ y $x_3 = 3$ es una solución particular del sistema

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = -16 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 8 \end{cases} .$$

En efecto, si sustituimos los valores correspondientes tenemos

$$4(-4) + 3(-1) + 3 = -16 - 3 + 3 = -16,$$

$$2(-4) - (-1) + 5(3) = -8 + 1 + 15 = 8.$$

Los sistemas de ecuaciones se clasifican, de acuerdo con la existencia o no de solución para el mismo, en **compatibles** e **incompatibles**. Si la solución es única, se dice que es **compatible determinado** y si posee más de una solución se dice que es **compatible indeterminado**.

Resolución de un sistema lineal.

Nuestro objetivo ahora será lograr un método práctico para resolver un sistema de ecuaciones lineales. Es decir, para determinar todas las soluciones en caso de que estas existan. Los sistemas más fáciles de resolver tienen la forma triangular, o de escalón. En ellos, la variable delantera en cada ecuación se presenta a la derecha de la variable delantera de la ecuación escrita arriba, o sea, en la forma

Definición: Dos sistemas de ecuaciones lineales se dicen *equivalentes* si ambos poseen el mismo conjunto de soluciones.

Ejemplo:

Los sistemas

$$\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 3x - y = 5 \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} 2x - 4y = -10 \\ 5y = 20 \end{cases}$$

son equivalentes ya que ambos tienen como única solución $x=3, y=4$.

Definición (transformaciones elementales en ecuaciones)

Dado un sistema de ecuaciones lineales se denominan *transformaciones elementales* sobre el sistema a las siguientes:

- Intercambiar dos ecuaciones ($E_i \leftrightarrow E_j$).
- Sustituir una ecuación por su suma con otra multiplicada por una constante ($E_i + cE_j \rightarrow E_i$).
- Multiplicar una ecuación por una constante distinta de cero y poner esta nueva ecuación en su lugar ($cE_i \rightarrow E_i$).

Teorema

Si sobre un sistema de ecuaciones lineales se realiza una transformación elemental, el sistema resultante es equivalente al inicial.

Ejemplo:

Tomemos los sistemas ya vistos anteriormente

$$\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 3x - y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 6y = 33 \\ 3x - y = 5 \end{cases} ,$$

donde el segundo se obtuvo de multiplicar la primera ecuación por 3. Ambos sistemas tienen solución única y es $x=3, y=4$.

Lo mismo sucedería si tomamos los sistemas

$$\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 5x + 3y = 27 \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + 2y = 11 \end{cases} ,$$

los cuales también tienen el mismo conjunto solución que los dos anteriores.

Veamos ahora un método para reducir un sistema de ecuaciones lineales a un sistema lineal escalonado.

Método de Gauss.

Consiste en transformar el sistema de ecuaciones en un sistema escalón equivalente

Ejemplos:

1. Apliquemos el método de Gauss al sistema

$$\begin{cases} x + y - 2z + 3w = 1 \\ 3x + 2y - z + 2w = 4 \\ 3x + 3y - 3z - 3w = 5 \end{cases} .$$

Sustituimos la segunda ecuación por la suma de ella con la primera multiplicada por -3, y la tercera por la suma de ella con la primera multiplicada por -3.

$$\begin{cases} x + y - 2z + 3w = 1 \\ -y + 5z - 7w = 1 \\ 3z - 12w = 2 \end{cases} .$$

En este caso ya se detiene el proceso. Solamente nos queda despejar

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 - 3w \\ -y + 5z = 1 + 7w \\ 3z = 2 + 12w \end{cases}$$

y podemos determinar x, y, z en función de w

$$z = \frac{2 + 12w}{3}$$

$$y = 5z - 7w - 1 = \frac{7 + 39w}{3}$$

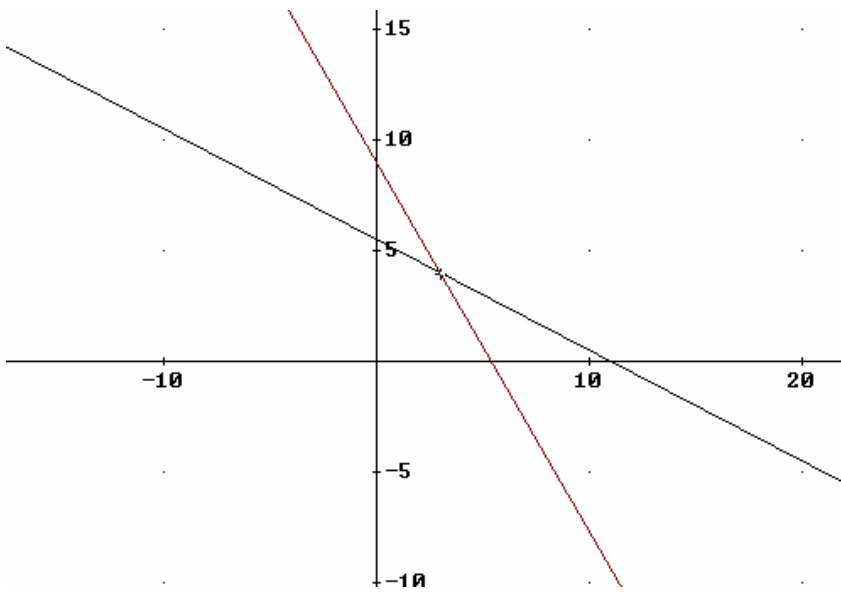
$$x = 1 - y + 2z - 3w = -8w .$$

El sistema dado es compatible indeterminado.

Geoméricamente.

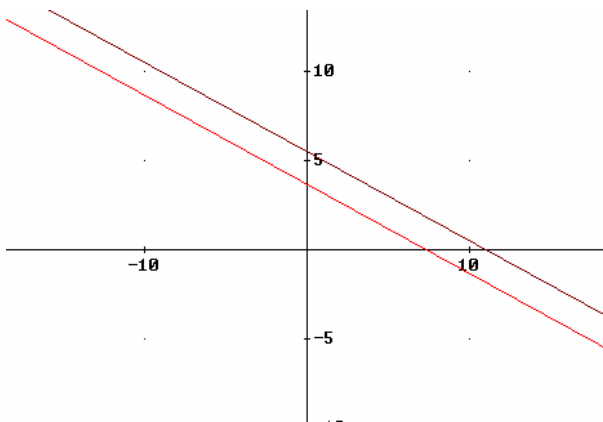
Veamos la solución de los siguientes SEL visto en forma geométrica.

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y = 11 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$



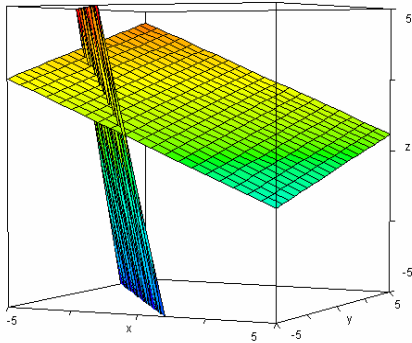
Si resolvemos este sistema de ecuaciones obtenemos la solución $x = 3$, $y = 4$ que es única, lo que se confirma geoméricamente pues cada ecuación representa una recta en el plano que se intersectan en un punto, el punto $(3, 4)$.

$$\text{b) } \begin{cases} x + 2y = 11 \\ 3x + 6y = 22 \end{cases}$$



Si resolvemos este sistema de ecuaciones llegamos a que el mismo no tiene solución, lo que se confirma geoméricamente pues cada ecuación representa una recta las cuales no poseen ningún punto de intersección, son paralelas.

$$\text{c) } \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = -16 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 8 \end{cases}$$



Si resolvemos este sistema de ecuaciones obtenemos la solución $S = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 = \frac{4}{5}(1 - 2x_3), x_2 = \frac{9x_3 - 32}{5} \right\} = \left\{ \left(\frac{4}{5}(1 - 2x_3), \frac{9x_3 - 32}{5}, x_3 \right) / x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

es decir, tiene infinitas soluciones. Geométricamente, nos damos cuenta que cada ecuación representa un plano en el espacio, estas ecuaciones se interceptan y su intersección es una recta, todos los puntos de esta recta son solución del SEL dado.

Los métodos de solución de los sistemas de ecuaciones lineales se apoyan en la realización de determinadas operaciones con sus coeficientes, por lo que en la práctica es conveniente abreviar la escritura de un sistema lineal, escribiendo solamente sus coeficientes y términos constantes debidamente ordenados en forma de rectángulo.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right),$$

a las cuales se les denominará respectivamente **matriz** y **matriz ampliada** del sistema de ecuaciones lineales. Se acostumbra a poner una línea a modo de separador para indicar dónde está la columna de los términos independientes. Si llamamos A a la matriz del sistema usaremos la notación \overline{A} para su matriz ampliada.

Si tenemos el sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

entonces, escribiendo solamente los coeficientes de las incógnitas x_1, x_2 y x_3 , tenemos la matriz del sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Esta matriz es cuadrada de orden 3 y la diagonal principal está formada por los números 2, 2, 3. El elemento a_{23} es el que está situado en la segunda fila tercera columna y es el -3.

Si le agregamos otra columna, formada por los términos independientes de la ecuación, obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \end{array} \right),$$

que es la matriz ampliada del sistema. Esta matriz no es cuadrada ya que tiene 3 filas y 4 columnas.

En general, se define una matriz como un arreglo rectangular de números. Las matrices juegan un papel muy importante dentro del álgebra lineal y serán estudiadas con más detalle en este tema.

Formalicemos pues el concepto de matriz, del cual ya habíamos hablado.

Concepto de matriz.

Las matrices aparecen por primera vez hacia el año 1850, introducidas por **J. J. Sylvester**. El desarrollo inicial de la teoría se debe al matemático **W. R. Hamilton** en 1853. En 1858, **A. Cayley** introduce la notación matricial como una forma abreviada de escribir un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

Las matrices se utilizan en el cálculo numérico, en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, de las ecuaciones diferenciales y de las derivadas parciales. Además de su utilidad para el estudio de sistemas de ecuaciones lineales, las matrices aparecen de forma natural en geometría, estadística, economía, informática, física, etc.

La utilización de matrices (arrays) constituye actualmente una parte esencial de los lenguajes de programación, ya que la mayoría de los datos se introducen en los ordenadores como tablas organizadas en filas y columnas: hojas de cálculo, bases de datos.

Definición

Llamaremos **matriz de m filas y n columnas** a toda tabla rectangular de números dispuestos en m filas horizontales y n columnas, en la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}$$

La i-ésima fila de A es $(a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in})$ y la j-ésima columna es

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdot \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

A los números a_{ij} les llamaremos **coeficientes** de la matriz

El número a_{ij} es el (i, j) -ésimo elemento de A y está situado en la fila i, columna j. Si la matriz tiene m filas y n columnas diremos que es una matriz de **tamaño $m \times n$** . Si $m=n$ diremos que es una **matriz cuadrada de orden n**. A la diagonal de la matriz cuadrada donde están los elementos de la forma a_{ii} se le conoce como **diagonal principal**. Si en una matriz cuadrada de orden n todos los elementos de la diagonal principal son iguales a 1 y el resto son ceros, se dice que esta matriz es la **matriz identidad de orden n**.

Si todos los coeficientes de una matriz de $m \times n$ son ceros, decimos que ésta es la **matriz nula** de tamaño $m \times n$ y se denota por $0_{m \times n}$ o simplemente por 0 si no hay lugar a dudas.

Si $m=1$, diremos que es A una **matriz fila** y si $n=1$ diremos que es una **matriz columna**.

Si A es cuadrada real y $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i y todo j, la matriz se dice **simétrica** y, si

$a_{ij} = -a_{ji}$, se dice **antisimétrica**.

Ejemplos:

1. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$ es una matriz cuadrada de orden 2.

2. $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}_{3 \times 1}$ es una matriz columna.
3. $(1 \ 4 \ 5)_{1 \times 3}$ es una matriz fila.
4. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ Esta es una matriz simétrica de orden 3.
5. $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es matriz nula de 2×1 o matriz columna nula de tamaño 2×1 .
6. $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es matriz nula de orden 2.
7. $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 3}$ es la matriz nula de tamaño 4×3 .

Veamos los siguientes casos particulares de matrices.

Si A es una matriz cuadrada cuyos elementos son a_{ij} , entonces su diagonal principal estará formada por los a_{ii} . La matriz A es **triangular superior** si todos los elementos debajo de la diagonal principal son cero, ejemplo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{6} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

A es **triangular inferior** si todos los elementos por encima de la diagonal principal son cero,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{7} & \mathbf{6} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$$

A es **diagonal** si todos los elementos arriba y debajo de la diagonal principal son cero.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

A se dice **escalar** si es diagonal y todos los elementos de la diagonal son iguales.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}_n$$

Ejercicios:

Dados los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\text{I. } \begin{cases} x + 5y = 1 \\ x + y = 7 \end{cases} \quad \text{II. } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \end{cases} \quad \text{III. } \begin{cases} 2x_2 - 2x_4 = 0 \\ 7x_2 + 5x_3 - 11x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

- Dé la matriz asociada y la matriz ampliada para cada caso.
- Aplique el Método de Gauss para resolver los SEL.
- Clasifique cada SEL en compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible de acuerdo al conjunto solución.

Resumen de la clase:

- ¿Cómo se representa un SEL de m ecuaciones con n incógnitas?
- ¿Qué significa resolver un SEL?
- ¿Cuándo un SEL se dice homogéneo?
- ¿Cuándo un SEL se dice no homogéneo?
- ¿Cuándo se dice que un sel es compatible?
- ¿Cómo se clasifican los sistemas atendiendo a sus soluciones?
- ¿Cuándo se dice que dos sistemas son equivalentes?
- ¿Qué es la matriz de un sistema?

- ¿A qué llamamos tamaño de la matriz?
- ¿Cuándo decimos que una matriz es cuadrada?
- ¿Cómo es la matriz nula?
- ¿Cómo es la matriz identidad?

Bibliografía

Libro de texto:

Álgebra Lineal, Colectivo de autores

Estudio independiente

Pág. 5 a la Pág. 23. Libro Álgebra Lineal, Colectivo de autores

Ver con detalle los ejemplos incluidos en las páginas de la 5 a la 23

Resolver los SEL 1-19 de las 84-87 del libro de texto