

CAPÍTULO I: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y MATRICES.

En la Matemática escolar se estudian los sistemas de 2 ecuaciones lineales con 2 variables y los sistemas de 3 ecuaciones lineales con 3 variables, así como los métodos de resolución de cada uno de ellos.

Con el estudio de este capítulo se iniciará la búsqueda de un método general para resolver un sistema de ecuaciones lineales con cualquier cantidad de ecuaciones y cualquier cantidad de variables, así como de “herramientas” que nos permitan racionalizar la resolución de estos sistemas.

Una de esas “herramientas” son las MATRICES, que constituyen objetos matemáticos cuyo uso es cada vez más frecuente en la modelación matemática de innumerables problemas de la práctica y la investigación científica, incluso en la Computación.

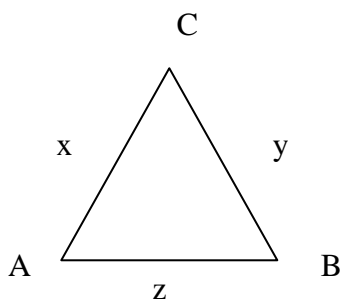
1.1. Matriz.

¿Qué es una **matriz**?

Analizar el siguiente problema:

“Tres cooperativas: A, B y C, están situadas formando un triángulo. Para ir de A a B, pasando por C, se recorren 27 km; el recorrido de B a C, pasando por A, es de 29 km y el de C a A, pasando por B, es de 32 km. ¿Qué distancia hay entre cada dos cooperativas?” (Tomado del libro Matemática 12, segunda parte, p 55)

Una representación gráfica facilitaría la comprensión y el planteo matemático de la situación descrita:



$$\begin{cases} x + y = 27 \\ x + z = 29 \\ y + z = 32 \end{cases}$$

Se ha planteado un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables.

Si despojamos a este sistema de las variables y los signos de la relación “igual a” se obtiene:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \quad \text{si sólo se consideran los coeficientes de las variables,}$$

o

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 27 \\ 1 & 0 & 1 & 29 \\ 0 & 1 & 1 & 32 \end{array} \quad \text{si además, se consideran los términos independientes.}$$

Definición: (matriz)

Se denomina **matriz** a una tabla o arreglo rectangular formado por elementos (números reales) dispuestos en filas y columnas:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Notación: Las matrices se denotan por letras mayúsculas de nuestro alfabeto (A, B, ..., Z) o abreviadamente por (a_{ij}) con $i, j \in \mathbb{N}^+$ y se escriben entre paréntesis o corchetes.

Sus elementos se denotan por a_{ij} , donde el primer subíndice, **i**, representa el número de la **fila** en que él está ubicado y el segundo subíndice, **j**, el número de la **columna**.

Ejemplo 1:

Son matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 27 \\ 1 & 0 & 1 & 29 \\ 0 & 1 & 1 & 32 \end{pmatrix}$$

A la matriz A se le denomina **matriz de los coeficientes** del sistema de ecuaciones lineales y a la matriz B, **matriz ampliada**.

Las **filas** son **horizontales** y las **columnas**, **verticales**. Así, por ejemplo, la fila 1 de la matriz A es 1, 1, 0, la columna 3 es 0, 1, 1. En la matriz B, la fila 2 es 1, 0, 1, 29 y la columna 4 es 27, 29, 32.

El elemento que está en la fila 1 y la columna 4 de la matriz B es 27, o sea, $b_{14} = 27$.

Al observar la matriz A se puede afirmar que tiene 3 filas y 3 columnas y si se observa la matriz B se puede decir, análogamente, que tiene 3 filas y 4 columnas.

Al par ordenado **(m;n)** donde **m** es la cantidad de **filas** que tiene una matriz A y **n** es la cantidad de **columnas** de esta, se le denomina **tipo de una matriz** y se denota por: $t(A) = (m;n)$.

Ejemplo 2:

$$t(A) = (3; 3) \quad t(B) = (3; 4)$$

Observación:

En la matriz A, el número de filas es igual al número de columnas, en este caso, en lugar de decir "tipo de A" se puede decir "el **orden** de A es 3" y se dice que la matriz A es **cuadrada**.

Definición: (matriz cuadrada)

Toda matriz en la que la cantidad de filas es igual a la cantidad de columnas se denomina **matriz cuadrada**.

Y ¿qué es la **diagonal principal de una matriz**?

Está formada por los elementos a_{ii} , es decir, aquellos elementos que ocupan una posición donde coincide el número de la fila con el de la columna donde están ubicados.

Ejemplo 3:

En la matriz A la diagonal principal está formada por los elementos $a_{11}=1$, $a_{22}=0$ y $a_{33}=1$, o sea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y en B: } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 27 \\ 1 & 0 & 1 & 29 \\ 0 & 1 & 1 & 32 \end{pmatrix} \text{ también.}$$

1.2 Algunas clasificaciones de matrices.

Existen diferentes clasificaciones de matrices. A continuación se mostrarán algunas de ellas y sus características:

Matriz fila: Son matrices de tipo $(1; n)$ con $n > 0$.

Ejemplo 4:

La matriz $F = (1 \ 0 \ -2)$ es una matriz fila de tipo $(1; 3)$.

Matriz columna: Son matrices de tipo $(m; 1)$ con $m > 0$.

Ejemplo 5:

La matriz $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es una matriz columna de tipo $(4; 1)$.

Matriz nula: Es una matriz cuyos elementos son todos iguales a cero.

Ejemplo 6:

Las matrices $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ son matrices nulas donde

O es de orden 2 y $t(Q) = (2; 3)$.

Matriz transpuesta:

La matriz transpuesta de una matriz A es la matriz que resulta de intercambiar en A las filas por las columnas y se denota A^T .

Ejemplo 7:

La matriz $R^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ es la transpuesta de la matriz $R = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$.

La matriz $F^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ es la transpuesta de la matriz $F = (1 \ 0 \ -2)$.

Observación:

Los elementos de la diagonal principal no cambian su posición.

Reflexionar sobre:

¿Cuál es la matriz transpuesta de R^T ? ¿Y de F^T ?

A continuación se verán algunas clasificaciones de **matrices cuadradas**:

Matriz unidad: (unitaria o idéntica)

Es una matriz cuadrada donde los elementos de la diagonal principal son todos iguales a 1 y los restantes son cero (0).

Ejemplo 8:

Las matrices $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ son matrices unidad de orden 2 y 3,

respectivamente.

Matriz simétrica:

Es una matriz cuadrada para cuyos elementos se cumple que $a_{ij} = a_{ji}$ (para todo $i, j \in \mathbb{N}^*$).

Ejemplo 9:

Las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $S = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ son matrices simétricas.

Observación:

En una matriz simétrica los elementos que están situados de forma simétrica con respecto a la diagonal principal son iguales.

Reflexionar sobre:

- ¿ Una matriz unidad es una matriz simétrica? ¿Y una matriz nula?
- Hallar la transpuesta de A y de S. Compare cada matriz con su transpuesta. Formule una proposición verdadera. ¿Se cumplirá para todas las matrices simétricas?

Matriz antisimétrica:

Es una matriz cuadrada para cuyos elementos se cumple que $a_{ij} = -a_{ji}$ y $a_{ii} = 0$ (para todo $i, j \in \mathbb{N}^*$).

Ejemplo 10:

La matriz $N = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 5 \\ 4 & 0 & -7 \\ -5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz antisimétrica.

Observación:

En una matriz antisimétrica los elementos que están situados de forma simétrica con respecto a la diagonal principal son opuestos y los elementos de la diagonal principal son cero.

Reflexionar sobre:

¿Una matriz unidad es una matriz antisimétrica? ¿Y una matriz nula?

Matriz diagonal:

Es una matriz cuadrada cuyos elementos $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ (para todo $i, j \in \mathbb{N}^*$).

Ejemplo 11:

La matriz $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ es una matriz diagonal y $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ también.

Observación:

En una matriz diagonal los elementos situados en la diagonal principal pueden o no ser cero, pero los que están fuera de la diagonal principal sí son todos cero.

Reflexionar sobre:

¿Una matriz unidad es una matriz diagonal? ¿Y una matriz nula?

Matriz escalar:

Es una matriz cuadrada cuyos elementos $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y $a_{ii} = k$ ($k \in \mathbb{R}$) para todo $i, j \in \mathbb{N}^*$.

Ejemplo 12:

Las matrices $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $L = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ son matrices escalares.

Reflexionar sobre:

¿Una matriz unidad es una matriz escalar? ¿Y una matriz nula?

Matriz triangular superior:

Es una matriz cuadrada cuyos elementos $a_{ij} = 0$ si $i > j$ (para todo $i, j \in \mathbb{N}^*$).

Ejemplo 13:

La matriz $T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ es una matriz triangular superior.

Observación:

En una matriz triangular superior los elementos situados por debajo de la diagonal principal son cero.

Reflexionar sobre:

- ¿Una matriz unidad es una matriz triangular superior? ¿Y una matriz nula? ¿Y una matriz diagonal? ¿Y una matriz escalar?
- ¿Cómo se definirá una matriz triangular inferior?

1.3. Matrices iguales.

Hasta aquí se han visto algunas clasificaciones de matrices y se han comparado algunas de ellas, pero ¿cuándo dos matrices son iguales?

Definición: (matrices iguales)

Dos matrices A y B son iguales si son del mismo tipo y los elementos situados en la misma posición respectivamente, en cada una de ellas, son iguales, o sea, $a_{ij} = b_{ij}$ (para todo $i, j \in \mathbb{N}^*$).

Ejemplo 14:

a) Las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ son iguales.

b) Si $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ determine los valores de a y b en la matriz $Q = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 3 \end{pmatrix}$ sabiendo que $P = Q$.

Solución:

Como $P = Q$ entonces se tiene que $-2 = a$ y $0 = b$.

1.4. Operaciones con matrices.

1.4.1. Adición de matrices. Propiedades.

En el epígrafe 1.1 se definió un ente matemático: **matriz**, ante la necesidad de modelar algunos problemas o para racionalizar el procedimiento de solución de un sistema de ecuaciones lineales cualquiera.

Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & -5 & 6 \\ 3 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

¿Se podrán adicionar las matrices? ¿Se podrá encontrar una matriz que exprese el resultado $A + B$? ¿Y $A+C$?

Con estos objetos matemáticos se pueden realizar operaciones al igual que las que realizamos comúnmente con los números en los diferentes dominios numéricos.

Sea $M_{(m;n)}(\mathbb{R})$ el conjunto de las matrices de tipo $(m;n)$ con elementos reales.

Definición: (adición de matrices)

La **función** definida por: $M_{(m;n)}(\mathbb{R}) \times M_{(m;n)}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{(m;n)}(\mathbb{R})$

$$(A; B) \rightarrow A + B$$

se denomina **adición de matrices**.

Observación:

En la definición anterior se debe observar que las matrices A y B pertenecen a un mismo conjunto de matrices por lo que son del mismo tipo, al igual que el resultado A+B, es por ello que se dice que la adición de matrices es una operación interna.

Pero, ¿cómo se obtiene la matriz A+B?

Definición: (suma de matrices)

Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices de **igual tipo**. La **suma** de las matrices A y B es la matriz $A+B = (a_{ij} + b_{ij})$ (para todo $i, j \in N^*$) tal que cualquier elemento de ella es la suma de los elementos que ocupan igual posición en A y B respectivamente.

Observación:

Se destaca que **adición** es el nombre de la operación y **suma** es el nombre del resultado de esta operación.

Ejemplo 15:

Retomemos la situación planteada al inicio de este epígrafe con las matrices A, B y C:

Determinemos el tipo de cada matriz: $t(A) = (3;4)$, $t(B) = (3;4)$ y $t(C) = (3;3)$.

Entonces según la definición de suma de matrices sólo podemos calcular A+B, ya que A y B son de igual tipo:

$$A+B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Se insiste en que: $t(A+B) = t(A) = t(B)$.

Al igual que la adición en los dominios numéricos, la **adición de matrices** cumple propiedades:

Propiedades de la adición de matrices:

Cualesquiera sean las matrices del mismo tipo A, B y C se cumple que:

- 1) $A + B = B + A$. **conmutatividad**
- 2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ **asociatividad**
- 3) $A + O = O + A = A$ **existencia del elemento neutro** (donde O es la matriz nula del tipo correspondiente)
- 4) Para cada matriz A existe una matriz denotada por $-A$ tal que:
 $A + (-A) = (-A) + A = O$ **existencia del elemento opuesto** (donde -A es la matriz opuesta de A y se obtiene de cambiar cada elemento de la matriz A por su opuesto).
- 5) $(A + B)^T = A^T + B^T$

Las demostraciones de las cuatro primeras propiedades se realizan aplicando las definiciones dadas y las propiedades correspondientes de los números reales para la adición.

Demostración de la propiedad 5:

Premisa: $A, B, C \in M_{(m;n)}(\mathbb{R})$

Tesis: $(A + B)^T = A^T + B^T$

Observa que se trata de demostrar una igualdad, por lo que podemos utilizar una de las siguientes vías:

- Partir de uno de los miembros de la igualdad y mediante la aplicación de definiciones, teoremas o propiedades, llegar al otro miembro de la igualdad.
- Desarrollar cada miembro de la igualdad por separado y comparar los resultados obtenidos. Si estos son iguales, se cumple la propiedad, en caso contrario, no se cumple la propiedad.

En este caso usaremos la primera vía mencionada:

Sean:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & \dots & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & \dots & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & \dots & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

matrices de tipo $(m;n)$.

$$\begin{aligned} A^T + B^T &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{m1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{21} + b_{21} & \dots & a_{m1} + b_{m1} \\ a_{12} + b_{12} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{m2} + b_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} + b_{1n} & a_{2n} + b_{2n} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} = (A + B)^T \end{aligned}$$

Luego, por simetría de la igualdad, se cumple la propiedad $(A + B)^T = A^T + B^T$.

1.4.2. Sustracción de matrices.

Resolver la ecuación: $A + X = B$ sabiendo que: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Para resolver este ejercicio se debe recordar que si tenemos la ecuación: $4 + x = 1$ esta se resuelve de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 4 + x &= 1 \\ x &= 1 - 4 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que la adición en el dominio \mathbb{R} posee una operación inversa: la sustracción.

Procedamos entonces de manera análoga:

$$\begin{aligned} A + X &= B \\ X &= B - A \end{aligned}$$

Pero, ¿cómo obtener la matriz $B - A$? ¿Existe?

Definición: (sustracción de matrices)

La **función** definida por: $M_{(m;n)}(\mathbb{R}) \times M_{(m;n)}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{(m;n)}(\mathbb{R})$

$$(\lambda; A; B) \rightarrow A - B$$

se denomina **sustracción de matrices**.

¿Y cómo se obtiene la matriz resultante $A - B$ de esta operación?

Definición: (diferencia de matrices)

Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices de **igual tipo**. La **diferencia** de las matrices A y B es la matriz $A - B = (a_{ij} - b_{ij})$ (para todo $i, j \in \mathbb{N}^+$), tal que cualquier elemento de ella es la diferencia de los elementos que ocupan igual posición en A y B respectivamente.

Ejemplo 16:

Retomemos la ecuación planteada al inicio de este epígrafe:

$$\begin{aligned} A + X &= B \\ X &= B - A \end{aligned}$$

Y hallemos su solución que es la matriz $B - A$:

$$X = B - A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observaciones:

- Se destaca que **sustracción** es el nombre de la operación y **diferencia** es el nombre del resultado de esta operación.
- Al igual que la adición, la sustracción de matrices sólo se puede realizar entre matrices de igual tipo.

1.4.3. Multiplicación de un número real por una matriz.

En los diferentes dominios numéricos, cuando tenemos las sumas:

$$3 + 3 \quad \text{ó} \quad 5 + 5 + 5 \quad \text{ó} \quad -1 - 1 - 1 - 1 - 1$$

¿De qué otra manera más abreviada las podemos expresar?

Pues simplemente se escribe: $2 \cdot 3$ ó $3 \cdot 5$ ó $5 \cdot (-1)$ respectivamente.

Se puede observar que las sumas se transforman en el producto de un **número real** (que representa las veces que se repite el mismo sumando) por el sumando.

¿Se podrá proceder análogamente con las matrices?

Es decir, si tenemos una matriz A de cualquier tipo, en lugar de calcular $A+A+A$, ¿podremos calcular $3 \cdot A$? ¿Cómo?

Definición: (multiplicación de un número real por una matriz)

La **función** definida por: $\mathbb{R} \times M_{(m;n)}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{(m;n)}(\mathbb{R})$

$$(\lambda; A) \rightarrow \lambda \cdot A$$

se denomina **multiplicación de un número real por una matriz**.

Observación:

En la definición anterior se debe observar que los elementos que se operan no pertenecen a un mismo conjunto como en la adición. En esta operación interviene un número real y una matriz dando por resultado una matriz, $\lambda \cdot A$, del mismo conjunto que la matriz A. A operaciones como la multiplicación de un número real por una matriz se les denomina operación externa.

Pero, ¿cómo se obtiene la matriz $\lambda \cdot A$?

Definición: (producto de un número real por una matriz)

Sea A una matriz y λ un número real. La matriz $\lambda \cdot A$ se obtiene multiplicando por el número real λ a cada elemento de la matriz A.

O sea, $\lambda \cdot (a_{ik}) = (\lambda \cdot a_{ik})$ abreviadamente (para todo $i, k \in \mathbb{N}^*$).

Ejemplo 17:

Sea $\lambda = 3 \in \mathbb{R}$ y la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ entonces:

$$\lambda \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 12 \\ 3 & 15 & 21 \\ 6 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Observación:

En lugar de decir “multiplicación de un **número real** por una matriz” o “producto de un **número real** por una matriz” también es común decir “multiplicación de un **escalar** por una matriz” o “producto de un **escalar** por una matriz”. Esto se debe a que a los elementos de la estructura algebraica **cuerpo** se les denomina **escalares** y el dominio de los números reales \mathbb{R} es un cuerpo, por lo que a sus elementos se les puede denominar, por tanto, escalares.

Propiedades de la multiplicación de un número real por una matriz:

Sean $A, B \in M_{(m;n)}(\mathbb{R})$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

- 1) $\lambda (\mu \cdot A) = (\lambda \mu) \cdot A$
- 2) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$
- 3) $\lambda (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$
- 4) $1 \cdot A = A$
- 5) $(-1) \cdot A = -A$
- 6) $0 \cdot A = O$
- 7) $\lambda \cdot O = O$
- 8) $(\lambda \cdot A)^T = \lambda (A^T)$.

Demostración de la propiedad 3:

Premisa: $A, B \in M_{(m;n)}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Tesis: $\lambda (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$

Observa que se trata de demostrar una igualdad.

Sean $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ (con $i, j \in \mathbb{N}^*$):

$$\lambda \cdot A + \lambda \cdot B = \lambda (a_{ij}) + \lambda (b_{ij}) \text{ sustituyendo}$$

$$= (\lambda a_{ij}) + (\lambda b_{ij}) \quad \text{por definición de producto de un número real por una matriz}$$

$$= (\lambda a_{ij} + \lambda b_{ij}) \quad \text{por definición de suma de matrices}$$

$$= (\lambda (a_{ij} + b_{ij})) \quad \text{por propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición en } \mathbb{R}$$

$$= \lambda (a_{ij} + b_{ij}) \quad \text{por definición de producto de un número real por una matriz}$$

$$= \lambda (A + B) \quad \text{sustituyendo}$$

Luego, por simetría de la igualdad, se cumple la propiedad $\lambda (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$.

Demostración de la propiedad 5:

Premisa: $A \in M_{(m;n)}(\mathbb{R})$, $(-1) \in \mathbb{R}$

Tesis: $(-1) \cdot A = -A$

Observa que se trata de demostrar una igualdad. Para ello procederemos de la siguiente forma:

Sabemos que $A + (-A) = (-A) + A = O$ por propiedad de la adición de matrices y si $-A = (-1)A$ entonces $(-1)A$ debe cumplir la misma propiedad que $-A$.

Sea $A \in M_{(m;n)}(\mathbb{R})$:

$$A + (-1)A = 1 \cdot A + (-1)A \quad \text{por propiedad } 1 \cdot A = A$$

$$= (1 + (-1)) \cdot A \quad \text{por propiedad } (\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$$

$$= 0 \cdot A \quad \text{por ser } 1 \text{ y } -1 \text{ números reales opuestos}$$

$$= O \quad \text{por propiedad } 0 \cdot A = O$$

Luego, se cumple la propiedad $(-1) \cdot A = -A$.

Observación:

Al igual que en el dominio de los números reales \mathbb{R} , en lo adelante, en lugar de escribir $A + (-B)$ se puede escribir $A - B$.

1.4.3. Multiplicación de matrices.

Mientras que la adición se definió solamente para matrices de igual tipo, definiremos la **multiplicación** para matrices que cumplen otra condición: que están **enlazadas**.

Definición: (matrices enlazadas)

La matriz A de tipo $(m;n)$ se llama **enlazada** con la matriz B de tipo $(p;q)$ si $n=p$, es decir, si el número de columnas de A coincide con el número de filas de B .

Ejemplo 20:

$$\text{Sean } A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}: t(A) = (2; 2) = t(B).$$

En este caso se cumple que A está enlazada con B y B está enlazada con A por lo que se puede obtener $A \cdot B$ y $B \cdot A$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \text{ y se tiene que } A \cdot B \neq B \cdot A$$

Sin embargo, para $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ sí se cumple que $A \cdot B = B \cdot A$.

Compruébelo.

Reflexionar sobre:

¿Se cumplirá la propiedad conmutativa para la multiplicación de matrices?

Propiedades de la multiplicación de matrices:

Si existen los productos y sumas considerados para las matrices A, B y C, entonces se cumple:

- 1) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ **asociatividad**
- 2) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ **distributividad a la izquierda**
- 3) $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$ **distributividad a la derecha**
- 4) $\lambda (A \cdot B) = (\lambda \cdot A) \cdot B = A (\lambda \cdot B)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$
- 5) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

No se cumple la conmutatividad de la multiplicación de matrices ya que no se cumple para todas las matrices que están enlazadas.

Se sabe que en los dominios numéricos el producto de dos números es cero si y solo si uno de los números o factor es cero. ¿Se cumplirá también esa propiedad para el producto de matrices?

Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 21:

Hallar el producto $A \cdot B$, si es posible, sabiendo que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$t(A) = (3; 3) \quad t(B) = (3; 3) \quad \text{luego, } t(A \cdot B) = (3; 3)$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

Halle $B \cdot A$.

Observaciones:

- En este ejemplo se ha obtenido la matriz nula O, sin embargo, ninguna de las matrices factores es nula.
- Luego, en el conjunto de las matrices **no** se cumple la propiedad: $A \cdot B = O$ si y solo si $A = O$ o $B = O$, es decir, que $A \cdot B = O$ no significa que, necesariamente, A o B sean las matrices nulas.

¿Existirá alguna matriz X tal que $A \cdot X = A$?

Veamos:

Sea A una matriz cualquiera de tipo (m; n) y la matriz unitaria I de orden n. Hallemos el producto A·I :

$$A \cdot I = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = A$$

Compruebe que I, matriz unitaria de orden m, cumple que $I \cdot A = A$

Con esto hemos demostrado otra propiedad de la multiplicación de matrices: la **existencia del elemento neutro**, la matriz unitaria (a la izquierda y a la derecha).

Observaciones:

- Para las matrices de tipo (m; n) existe un elemento neutro a la izquierda, la matriz unitaria I de orden m, que es **diferente** del elemento neutro a la derecha, la matriz unitaria I de orden n.
- En el caso de las matrices cuadradas, sí existe un elemento neutro único tal que: $A \cdot I = I \cdot A = A$. (Reflexionar por qué).

1.5. Rango de una matriz.

1.5.1. Transformaciones elementales.

En este epígrafe se tiene el propósito de comenzar la búsqueda de un procedimiento que permita resolver un sistema de m ecuaciones lineales con n variables utilizando el mismo principio que en los sistemas de ecuaciones lineales estudiados en la Escuela: reducir el número de variables en cada ecuación del sistema.

Desde la Educación Primaria se conoce que para resolver ecuaciones se deben aplicar un conjunto de transformaciones denominadas equivalentes, que permiten despejar la variable (o las variables) presente en la ecuación. Entre ellas se pueden recordar las siguientes:

- Se puede multiplicar o dividir una ecuación por un número distinto de cero.
- Se puede adicionar o sustraer a ambos miembros de una ecuación un mismo número.

En el caso de los sistemas de ecuaciones lineales (de dos ecuaciones con dos variables o de tres ecuaciones con tres variables), además:

- Se puede permutar ecuaciones.
- Se puede adicionar o sustraer a una ecuación un múltiplo de otra ecuación.

¿Existirán transformaciones análogas que se le puedan aplicar a las matrices?

Definición: (transformaciones elementales)

Si una matriz B se origina de una matriz A de modo tal que:

- I. Se permutan dos filas o dos columnas.
- II. Se multiplica una fila o una columna por un número real distinto de cero.
- III. Se adiciona a una fila o columna un múltiplo cualquiera de otra fila o columna, entonces se dice que B se origina por una **transformación elemental** de la matriz A.

¿Será posible transformar una matriz cuadrada en una matriz triangular superior aplicando las transformaciones elementales?

Ejemplo 22:

Consideremos la matriz cuadrada A y apliquémosle las transformaciones elementales anteriormente definidas, para expresarla como una matriz triangular superior:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \downarrow -2 \\ \downarrow 3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & -3 & 13 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \downarrow 3 \\ \downarrow 7 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 70 \end{pmatrix}$$

Observación:

Se ha logrado transformar a la matriz cuadrada A en una matriz triangular superior, pero ¿cómo se ha procedido?

- Se debe marcar la diagonal principal y anular todos los elementos por debajo de ella.
- Primero se trabaja en la **1ra. columna** a partir de la **1ra. fila**, que queda fija, y se multiplica la 1ra. fila por el número que sea necesario de forma tal que al adicionarla a la 2da. fila el elemento a_{21} sea 0 (a veces se necesita multiplicar también la 2da. fila para lograr que los elementos a_{12} y a_{21} sean opuestos). En este mismo paso se trabaja análogamente entre la 1ra. fila y la 3ra. para lograr hacer 0 el elemento a_{31} .
- Después se trabaja en la **2da. columna** a partir de la **2da. fila**, que queda fija, y se multiplica la 2da. fila por el número que sea necesario de forma tal que al adicionarla a la 3ra. fila el elemento a_{32} sea 0 (en este caso se debe multiplicar también la 3ra. fila por un número para lograrlo).
- Análogamente, se continúa este procedimiento, si es necesario según el tipo de la matriz, trabajando en la **3ra. columna** a partir de la **3ra. fila**, que queda fija y así sucesivamente.
- Todo esto se señala como se observa en el ejemplo 22: la flecha parte de la fila a partir de la que se va a realizar la transformación y llega hasta la fila donde se va a escribir el resultado de dicha transformación, la zaeta indica la fila que se cambia. Se debe ser cuidadoso al colocar los números por los que se debe multiplicar convenientemente, al nivel de la fila que se multiplica indicando al lado derecho de esta flecha y al nivel de la ecuación correspondiente el número por el que se multiplica en cada caso.
- Observar que se multiplican todos los elementos de la fila (o filas) y se suman algebraicamente con el que le corresponda en su columna escribiendo el resultado en la fila indicada por la zaeta.

Pero, ¿será posible transformar una matriz que no sea cuadrada en una matriz triangular superior aplicando las transformaciones elementales?

La respuesta es no, porque si la matriz no es cuadrada no puede ser triangular superior. Sin embargo, sí se pueden aplicar las transformaciones elementales a una matriz que no sea cuadrada y obtener una matriz en forma “trapezoidal”.

Ejemplo 23:

Consideremos la matriz B de tipo (3; 4), no cuadrada, y apliquémosle las transformaciones elementales:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 27 \\ 1 & 0 & 1 & 29 \\ 0 & 1 & 1 & 32 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 27 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 32 \end{pmatrix} \xrightarrow{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 27 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 34 \end{pmatrix}$$

Observen cómo en la última matriz obtenida, luego de hacer cero todos los elementos por debajo de la diagonal principal, la forma que nos sugieren los elementos por encima de la diagonal principal es la de un trapecio, de ahí que se dice que está en forma “trapezoidal”.

Observación:

En general, a la forma “triangular superior” o “trapezoidal” se le llama “escalonada” o “matriz escalón”.

1.5.1. Rango de una matriz.

Pero, ¿qué es el **rango** de una matriz?

Se le llama **rango** de una matriz A al número real que expresa la cantidad de elementos consecutivos distintos de cero que hay en la diagonal principal de una matriz escalonada y se denota: $r(A) = n$.

Luego, para calcular el rango de una matriz hay que expresarla en forma escalonada.

Y ¿serán iguales los rangos de la matriz original y de la matriz transformada?

Precisamente eso lo asegura el siguiente teorema:

Teorema 1:

El rango de una matriz permanece invariante al aplicarle las transformaciones elementales.

Ejemplo 24:

El rango de las matrices de los ejemplos 20 y 21 es: $r(A) = 3, r(B) = 3$.

¿Cuál es el rango de las matrices siguientes?

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad r(C) = 2 \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

En el caso de la matriz C es fácil ver que está en la forma escalonada y en su diagonal principal hay dos elementos consecutivos distintos de cero, por lo que su rango es dos.

Sin embargo, en la matriz D, aunque está en la forma escalonada, hay un cero intercalado en la diagonal principal, entonces no podemos determinar su rango todavía. ¿Qué hacer?

Pues debemos quitar ese cero del lugar en que está. ¿Cómo? Permutando la fila o la columna en que él se encuentra con otra fila o columna que nos permita obtener un número distinto de cero en dicho lugar (d_{22}). Permutemos las columnas 2 y 4:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pero, observen que ahora la matriz obtenida no está escalonada, por lo que debemos volver a aplicar transformaciones elementales para expresarla en dicha forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \downarrow 4 \\ \downarrow 5 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \downarrow 4 \\ \downarrow -3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, $r(D) = 3$.

Si observamos nuevamente la matriz A del ejemplo 22 nos percatamos que su rango, que es 3, coincide con su orden. Las matrices con esta característica se denominan **matrices regulares** o **no singulares**.

Definición: (matriz regular o no singular)

Toda matriz cuadrada cuyo orden coincida con su rango se denomina **matriz regular** o **no singular**.

Reflexionar sobre:

- ¿Cuál puede ser el rango de una matriz fila?
- ¿Cuál puede ser el rango de una matriz columna?
- ¿Cuál es el rango de una matriz nula de orden n ? ¿Es regular?
- ¿Cuál es el rango de una matriz unidad de orden n ? ¿Es regular?
- ¿Cómo varía el rango de una matriz si se le añade una fila?
- ¿Cómo varía el rango de una matriz si se le añade una columna?

1.6. Inversa de una matriz.

En el dominio de los números reales (al igual que en \mathbb{Q}_+ y \mathbb{Q}) se cumple que:

$$2 \cdot \frac{1}{2} = 1; \quad -\frac{1}{3} \cdot (-3) = 1; \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1; \quad \dots$$

en general, para cada número real "a" (distinto de cero) existe otro número real " a^{-1} " tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$, donde a^{-1} es el inverso de a y 1 es el elemento neutro de la multiplicación en \mathbb{R} .

¿Se cumplirá lo mismo en el conjunto de las matrices?

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$, ¿tendrá solución la ecuación matricial $A \cdot X = I$ donde I es la

matriz unidad de orden 3?

Al estudiar la multiplicación de matrices comprobamos que, aunque no se cumple la propiedad conmutativa para esta operación, sí existen algunas matrices que conmutan con otras. Pero, dada la condición exigida para poder realizar la multiplicación de matrices (que deben estar enlazadas), se ha observado que las matrices que conmutan con otra cumplen una condición: son cuadradas.

Entonces se puede pensar que, quizás bajo cierta condición, existen matrices cuadradas que no sólo conmutan, sino que además, su producto sea la matriz unitaria.

Definición: (matriz inversible)

Una matriz cuadrada A es inversible si existe otra matriz cuadrada B , que conmuta con A , y que cumple que: $A \cdot B = B \cdot A = I$.

Ejemplo 25:

La matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ es inversible porque:

- $t(A) = (2; 2)$, o sea, A es cuadrada,
- existe una matriz B , de orden 2, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ tal que:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pero, ¿toda matriz cuadrada será inversible?

Teorema 2:

Una condición necesaria y suficiente para que una matriz A sea inversible es que A sea regular (no singular).

Definición: (matriz inversa)

Se denomina **matriz inversa** de una matriz inversible A a una matriz A^{-1} que cumple que: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

Observación:

Si A^{-1} es la inversa de A , entonces A es la inversa de A^{-1} . **Pruébalo.**

Ejemplo 26:

En el ejemplo 25, B es la inversa de la matriz A y viceversa, A es la inversa de la matriz B . ¿Será la única?

Teorema 3:

La matriz inversa de una matriz cuadrada A, si existe, es única.

Demostración:

(Extraiga la premisa y la tesis)

Sea A una matriz cuadrada invertible. Supongamos que existen dos matrices cuadradas B y C que son inversas de A.

Según la definición de matriz inversa se cumple que:

$$A \cdot B = B \cdot A = I \quad (1) \quad \text{y} \quad A \cdot C = C \cdot A = I \quad (2)$$

Además, sabemos que: $B \cdot I = B$ por propiedad de la multiplicación de matrices, luego:

$$\begin{aligned} B &= B \cdot I \text{ por ser } I \text{ elemento neutro de la multiplicación de matrices} \\ &= B \cdot (A \cdot C) \text{ sustituyendo según (2)} \\ &= (B \cdot A) \cdot C \text{ por asociatividad de la multiplicación de matrices} \\ &= I \cdot C \text{ sustituyendo según (1)} \\ &= C \text{ por ser } I \text{ elemento neutro de la multiplicación de matrices} \end{aligned}$$

Por tanto, $B = C$, es decir, la inversa de la matriz A es única.

Ya se puede responder la primera interrogante planteada al inicio de este epígrafe:

Para una matriz A existe su inversa A^{-1} y es única, tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, pero bajo ciertas condiciones:

- A debe ser cuadrada,
- A debe ser regular (no singular)

También se puede responder la segunda interrogante planteada al inicio de este epígrafe:

La ecuación matricial $A \cdot X = I$ puede tener solución si la matriz A es cuadrada y regular:

$t(A) = (3; 3)$ luego, A es cuadrada de orden 3.

$$\begin{aligned} r(A) &= r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \curvearrowright \\ \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{matrix} = r \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix} = r \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 6 & 11 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow (-6) \end{matrix} \\ &= r \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3 \end{aligned}$$

Por tanto, A es regular porque su rango es igual a su orden, luego admite inversa, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} A \cdot X &= I \\ (A^{-1} \cdot A) \cdot X &= A^{-1} \cdot I \\ I \cdot X &= A^{-1} \\ X &= A^{-1} \end{aligned}$$

Pero, ¿cómo calcular A^{-1} ?

Para ello aplicaremos un procedimiento conocido por “método de Gauss-Jordán”.

Conocemos que la matriz unitaria I es una matriz escalar, por lo que está escalonada y es fácil ver que su rango coincide con su orden.

También sabemos que toda matriz regular, mediante transformaciones elementales, puede convertirse en una matriz unitaria del mismo orden.

Utilizando esto, el método antes mencionado consiste en colocar la matriz A, a la que queremos calcularle su inversa, al lado de la matriz unitaria del mismo orden que A. Se le aplican a ambas las mismas transformaciones por filas (o por columnas) de forma tal que A se convierta en I. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 27:

Retomemos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ de la segunda interrogante y trabajemos por

filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \downarrow (-2) \\ \downarrow (-4) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Observación:

En este paso se determina el rango de A, por lo que no es necesario determinarlo antes. Si el rango de A no coincide con el orden de A, se detiene el procedimiento aquí.

Ahora se comienzan a aplicar las transformaciones elementales de abajo hacia arriba, con el propósito de anular los elementos por encima de la diagonal principal de la matriz que está en el lugar inicial de A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \uparrow (-1) \\ \uparrow 2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ -6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sólo hace falta multiplicar por -1 la segunda y tercera filas de la matriz que ocupa el lugar inicial de A para que esta sea la matriz unitaria.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ -6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \cdot (-1) \\ \cdot (-1) \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Observación:

En el lugar inicial de la matriz A se encuentra la matriz unitaria y en el lugar inicial de la matriz unitaria aparece una nueva matriz. Multipliquémosla por A:

$$\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En ambos casos se obtiene la matriz unitaria de orden 3. Luego, la nueva matriz obtenida es A^{-1} , o sea:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la ecuación matricial $A \cdot X = I$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ tiene por solución a la

matriz $X = A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Observación:

Al resolver una ecuación matricial se debe tener en cuenta que la multiplicación de matrices no es conmutativa y que para efectuar dicha operación, las matrices deben estar enlazadas.

1.7. Sistemas de m ecuaciones lineales con n variables (SEL).

Recordemos primeramente qué es una ecuación lineal:

Definición: (ecuación lineal en n variables)

Una ecuación lineal en n variables x_1, x_2, \dots, x_n es una igualdad de la forma:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

donde a_1, a_2, \dots, a_n son los coeficientes de las variables x_1, x_2, \dots, x_n respectivamente y b es el término independiente, siendo a_i ($i= 1, 2, \dots, n$) y b números reales (con

$a_i \neq 0$) y las variables también toman valores en el dominio \mathbb{R} .

Observación:

La característica esencial de las ecuaciones lineales en n variables es que todas las variables están elevadas al exponente 1.

Ejemplo 28:

Son ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 3x &= 8 && \text{en una variable: } x \\ 2x + y &= -1 && \text{en dos variables: } x, y \\ x + 2y - 3z &= 0 && \text{en tres variables: } x, y, z \end{aligned}$$

Se llama **solución** de una ecuación lineal en n variables a un n -uplo ordenado de números reales (k_1, k_2, \dots, k_n) tal que al sustituir x_1 por k_1 , x_2 por k_2, \dots , y x_n por k_n en la ecuación $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$ esta se satisface, es decir, se convierte en una proposición verdadera.

Al conjunto de todas las soluciones de una ecuación lineal en n variables se le llama **conjunto solución** y se denota por **S**.

Observación:

Se sabe que una ecuación lineal tiene solución única si sólo tiene una variable, y si tiene más de una variable, tiene infinitas soluciones.

Ejemplo 29:

La ecuación $3x = 8$ en una variable tiene por solución única a $x = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$, luego, su conjunto solución es $S = \left\{ 2\frac{2}{3} \right\}$.

La ecuación $2x + y = -1$ en dos variables, tiene infinitas soluciones, que se pueden obtener, al despejar una de las variables en la ecuación, en este caso se despejó y , mediante la expresión:

$$y = -1 - 2x$$

donde **y** es la **variable dependiente** y **x**, la **variable independiente o libre**.

Si se quiere obtener una de las infinitas soluciones, basta asignarle un número real cualquiera a x , sustituirlo en la expresión $y = -1 - 2x$ y obtener el valor correspondiente de y :

Sea, por ejemplo, $x = 1$ entonces $y = -1 - 2(1) = -3$, luego, una solución particular es $(1; -3)$.

El conjunto solución es $S = \{(x; -1-2x): x \in \mathbb{R}\}$.

Análogamente, la ecuación lineal $x + 2y - 3z = 0$ en tres variables tiene infinitas soluciones, que se pueden obtener mediante la expresión:

$$x = -2y + 3z$$

El conjunto solución es $S = \{(-2y + 3z; y; z): y, z \in \mathbb{R}\}$.

Finalmente, estamos en condiciones de estudiar los SEL y un procedimiento general para resolver un sistema con cualquier cantidad de ecuaciones y cualquier cantidad de variables.

En lo adelante, trataremos de responder las siguientes interrogantes:

1. ¿Qué condiciones son necesarias y suficientes para que un SEL tenga solución?
2. ¿Bajo qué condiciones la solución de un SEL soluble está determinada de manera única?
3. Si existe más de una solución, ¿es posible hallar una ley de formación para el conjunto de todas las soluciones?

Estos sistemas tienen numerosas aplicaciones en la práctica para la resolución de complejos problemas de las ciencias y la técnica que se modelan a través de ellos. ¿Cómo se define un SEL?

Definición: (Sistema de m ecuaciones lineales con n variables (SEL))

Un sistema de m ecuaciones lineales con n variables es un sistema de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

o brevemente: $\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k = b_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) donde los números reales a_{ik} se denominan **coeficientes** y los números reales b_i , **términos independientes** del SEL.

Ejemplo 30:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 4 \\ 3x + y - z = 0 \\ x + 2z = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

es un sistema de 4 ecuaciones lineales con 3 variables o incógnitas.

2, 3 y -5 son los coeficientes de las variables x, y, z respectivamente, en la ecuación 1, y 4 es su término independiente.

Si en cualquier ecuación del SEL se sustituyen las variables x_1, x_2, \dots, x_n por números reales de forma tal que al calcular se obtiene el término independiente b_i correspondiente, entonces decimos que (x_1, x_2, \dots, x_n) es **una solución** del SEL. (Por supuesto, (x_1, x_2, \dots, x_n) tiene que satisfacer todas las ecuaciones del SEL). Al conjunto **S** formado por todas las soluciones del SEL se le llama **conjunto solución** de este.

Ejemplo 31:

El sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x + 3y + z = 5 \\ x + y + 5z = -7 \\ 2x + 3y - 3z = 14 \end{cases}$$

tiene una solución: $x = 1, y = 2, z = -2$ y se escribe: $(1; 2; -2)$ y su conjunto solución es $S = \{(1, 2, -2)\}$. **Compruébelo.**

Pero el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ -2x - 6y - 2z = -10 \\ x + y + 5z = -7 \\ 2x + 3y - 3z = 14 \end{cases}$$

tiene el mismo conjunto solución y en las mismas variables. **Compruébelo.**

Sin embargo, ¿qué los diferencia?

Estos sistemas se dice que son **equivalentes**. ¿Por qué?

Definición: (Sistemas de m ecuaciones lineales con n variables equivalentes)

Dos SEL en las mismas variables x_1, x_2, \dots, x_n se denominan **equivalentes** si ambos tienen el mismo conjunto solución.

Pero, ¿cómo obtener un sistema equivalente a un SEL dado?

Teorema 4:

De un SEL se obtiene un sistema equivalente si se realizan las siguientes transformaciones:

- I. Permutar dos ecuaciones del sistema.
- II. Multiplicar una ecuación del sistema por un número real distinto de cero.
- III. Adicionar a una ecuación del sistema un múltiplo cualquiera de otra ecuación del sistema.

Ejemplo 32:

En el ejemplo 31, la segunda ecuación del sistema inicial la multiplicamos por -2, es decir, aplicamos la transformación II.

Observación:

Comparar estas transformaciones con las transformaciones elementales aplicadas a las matrices para expresarlas en forma escalonada.

Desde el inicio del capítulo se ha trabajado con un SEL y de él se aprendió a extraer la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

Ejemplo 33:

Extraer la matriz de los coeficientes del primer sistema del ejemplo 31:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{¿Cuál es su tipo? } (4; 3)$$

Extraer la matriz columna de los términos independientes:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \\ 14 \end{pmatrix} \quad \text{¿Cuál es su tipo? } (4; 1)$$

¿Será posible escribir el SEL mediante matrices?

Observación:

Las ecuaciones que forman el SEL son sumas de productos de un coeficiente por una variable en el miembro izquierdo y en el miembro derecho, se tienen los términos independientes.

¿Qué operación con matrices nos permite obtener el miembro izquierdo de este SEL?

La multiplicación de matrices exige, que para realizarla, las matrices estén enlazadas, entonces ¿qué tipo debe tener la matriz de las variables? R: (3; 1).

O sea:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Esta es la expresión matricial del SEL del ejemplo 31. **Compruébelo.**

Teorema 5:

Todo SEL se puede expresar mediante matrices en la forma: $A \cdot X = B$ donde A es la matriz de los coeficientes del sistema, X es la matriz de las variables y B es la matriz de los términos independientes.

Reflexionar sobre:

Teniendo en cuenta la forma matricial $A \cdot X = B$ en que se puede expresar un SEL y lo estudiado sobre matrices, ¿cómo se puede obtener el conjunto solución de un SEL? ¿Se puede aplicar siempre este procedimiento?

Sea un SEL de la forma $A \cdot X = B$, si existe la matriz inversa de A, A^{-1} , entonces se puede multiplicar a la izquierda a la ecuación anterior por esta matriz, obteniendo:

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A \cdot X &= A^{-1} \cdot B \\ (A^{-1} \cdot A) \cdot X &= A^{-1} \cdot B \quad \text{por asociatividad de la multiplicación de matrices} \\ I \cdot X &= A^{-1} \cdot B \quad \text{por definición de matriz inversa} \\ X &= A^{-1} \cdot B \quad \text{por ser I elemento neutro de la} \\ &\quad \text{multiplicación de matrices} \end{aligned}$$

O sea, que si existe la matriz inversa de A, A^{-1} , entonces se puede encontrar la solución del SEL escrito en forma matricial multiplicando la inversa de la matriz de los coeficientes por la matriz de los términos independientes del sistema.

Ejemplo 34:

$$\text{Sea el SEL: } \begin{cases} x + y - z = 12 \\ 4x - 3y - z = 2 \\ 3x + 2y + z = 8 \end{cases}$$

Escrito en forma matricial se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Donde la matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Existe A^{-1} ?

A es cuadrada de orden 3 y :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \downarrow (-4) \\ \downarrow \\ \downarrow (-3) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \downarrow \\ \downarrow (-7) \\ \downarrow \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & -25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 17 & 1 & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \uparrow 25 \\ \uparrow 3 \\ \uparrow (-25) \end{array}$$

aquí se ve que el rango de A es 3, por lo

que A es regular y por tanto, existe A^{-1} , hallémosla:

$$\begin{pmatrix} -25 & -25 & 0 \\ 0 & -175 & 0 \\ 0 & 0 & -25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & 1 & -7 \\ -49 & 28 & -21 \\ 17 & 1 & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \uparrow (-7) \\ \uparrow \\ \uparrow \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 175 & 0 & 0 \\ 0 & -175 & 0 \\ 0 & 0 & -25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 21 & 28 \\ -49 & 28 & -21 \\ 17 & 1 & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} :175 \\ :(-175) \\ :(-25) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{25} & \frac{3}{25} & \frac{4}{25} \\ \frac{7}{25} & \frac{-4}{25} & \frac{3}{25} \\ \frac{-17}{25} & \frac{-1}{25} & \frac{7}{25} \end{pmatrix}$$

Luego, A^{-1} es la matriz:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{25} & \frac{3}{25} & \frac{4}{25} \\ \frac{7}{25} & \frac{-4}{25} & \frac{3}{25} \\ \frac{-17}{25} & \frac{-1}{25} & \frac{7}{25} \end{pmatrix}$$

La solución del sistema entonces es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 25 & 25 & 25 \\ 7 & -4 & 3 \\ 25 & 25 & 25 \\ -17 & -1 & 7 \\ 25 & 25 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $S = \{(2; 4; -6)\}$

Otra forma de representar los SEL es geoméricamente, pero sólo los de dos o tres variables, pues en este momento histórico podemos representar hasta tres dimensiones.

Ejemplo 35: (Ver figura 1)

Sea el SEL:
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

Cada ecuación representa una recta del plano, como se sabe de estudios anteriores.

En este caso las rectas representadas se cortan en un punto, por lo que este SEL tiene solución única, según el gráfico, el punto (1; 2).

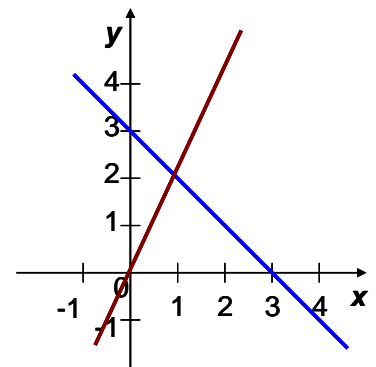


Figura 1

Ejemplo 36: (Ver figura 2)

Dado el SEL:
$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 2x + 2y - 8 = 0 \end{cases}$$

Cada ecuación representa una recta del plano.

En este caso las rectas representadas son paralelas, por lo que este SEL no tiene solución, o sea, $S = \emptyset$.

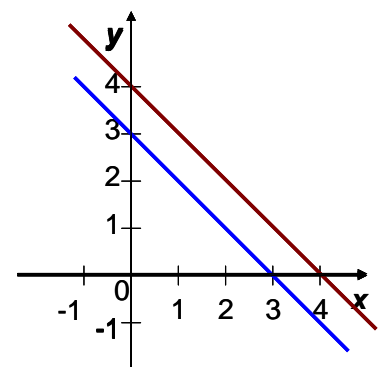


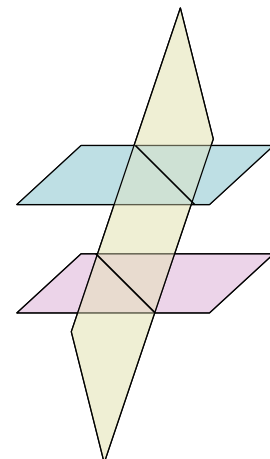
Figura 2

Ejemplo 37: (Ver figura 3)

Sea el SEL:
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -4 \\ 2x + 4y + 6z = 7 \\ x + 3y + 2z = -3 \end{cases}$$

En este caso cada ecuación del sistema representa un plano del espacio.

La primera y la segunda ecuaciones representan planos paralelos y la tercera, un plano que corta a cada uno de los otros en una recta. En este caso



no existen puntos comunes entre los tres planos, por lo que el SEL no tiene solución.

Figura 3

Ejemplo 38: (Ver figura 4)
 Sea el SEL:
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -4 \\ x - y - 3z = 8 \\ 2x + y + 6z = -14 \end{cases}$$

En este caso, también cada ecuación del sistema representa un plano del espacio. Los planos se interceptan dos a dos en una recta y las tres rectas, a su vez, se cortan en un punto, por lo que el SEL tiene solución única.

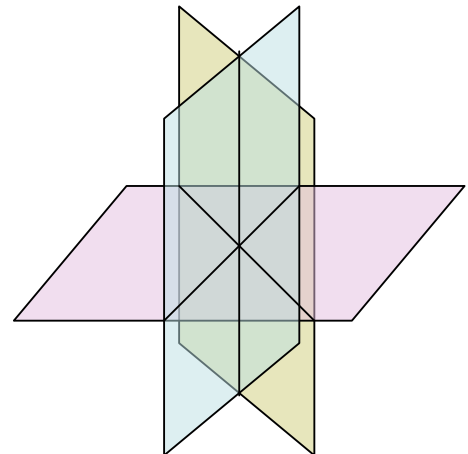


Figura 4

Ejemplo 39: (Ver figura 5)
 Sea el SEL:
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -4 \\ x - y - 3z = 8 \\ x + 5y + 9z = -16 \end{cases}$$

En este caso, también cada ecuación del sistema representa un plano del espacio. Los tres planos se interceptan en una recta, por lo que el SEL tiene infinitas soluciones con una variable libre.

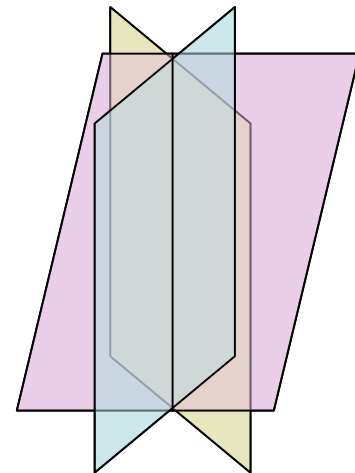


Figura 5

Reflexionar sobre:

Buscar otras posiciones relativas de tres planos en el espacio que representen SEL que no tengan solución o que tengan infinitas soluciones.

1.7.1. Método de eliminación de Gauss.

Hasta aquí hemos visto dos formas de resolver los sistemas de m ecuaciones lineales con n variables: la primera, escribiendo el sistema en forma matricial y hallando la inversa de la matriz de los coeficientes, que al multiplicarla por la matriz de los términos independientes nos da la solución del sistema; pero esta forma tiene una limitación: si la matriz de los coeficientes no es regular, no se puede aplicar. La segunda forma vista es la geométrica, pero esta forma también tiene una limitación: hasta ahora solo se pueden representar sistemas de hasta tres ecuaciones y hasta tres variables, y por otra parte, sabemos que en esta forma se cometen imprecisiones debido al trazado del dibujo.

Analizando los métodos de resolución de SEL de dos ecuaciones lineales con dos variables y de tres ecuaciones lineales con tres variables, estudiados en la Escuela, podemos concluir que en ellos hay una esencia común: reducir el número de

variables paulatinamente en las ecuaciones hasta obtener una ecuación lineal con una variable que se pueda despejar.

Esta es también la esencia de un nuevo método para la solución de un SEL que estudiaremos a continuación: el método de eliminación de Gauss, el cual es un método general, cuya aplicación permite determinar si un SEL es soluble o no, y en caso de serlo, si tiene solución única o infinitas soluciones, y desde luego, permite obtener la solución o soluciones, en el caso de que existan. Este método es una generalización de los métodos ya estudiados en la Escuela.

El método de eliminación de Gauss para la resolución de sistemas de m ecuaciones lineales con n variables es muy fácil, y en la práctica, es, por lo general, el método que más rápidamente conduce a la solución del sistema.

¿En qué consiste este método?

El método de eliminación de Gauss consiste en transformar el SEL dado en otros equivalentes, sucesivamente, aplicando las transformaciones equivalentes ya enunciadas anteriormente, de forma tal que se vayan eliminando variables, una a una, a partir de la segunda ecuación, tomando el SEL una forma escalonada o trapezoidal.

Para la transformación a la forma trapezoidal se procede a eliminar la primera variable del sistema por debajo de la primera ecuación, aplicando las transformaciones enunciadas anteriormente, es decir, se multiplica la primera ecuación y la segunda, si es necesario, de forma tal que los coeficientes de la primera variable sean números opuestos y se adicionan ambas ecuaciones, manteniendo la primera sin variar y escribiendo el resultado de la adición de estas ecuaciones en el lugar de la segunda ecuación. Ahora, se repite este proceso entre la primera ecuación y la tercera, para eliminar la primera variable en la tercera ecuación, después entre la primera y la cuarta ecuación, y así se procede sucesivamente hasta eliminar la primera variable en todas las ecuaciones, excepto en la primera. En el caso que la primera variable del sistema no aparezca en la primera ecuación, se permuta dicha ecuación con cualquiera de las otras donde sí aparezca la primera variable y se procede como se describió anteriormente. Todo lo descrito debe hacerse en un solo paso.

En un segundo paso, se procede de manera análoga para eliminar la segunda variable por debajo de la segunda ecuación, permaneciendo fijas la primera ecuación y la segunda, y eliminando la segunda variable en las siguientes ecuaciones.

En el tercer paso, se dejan fijas la primera, la segunda y la tercera ecuación, y análogamente se elimina la tercera variable por debajo de la tercera ecuación.

El procedimiento termina cuando:

- en una de las ecuaciones del SEL aparece una contradicción (o una proposición falsa), es decir, en el miembro izquierdo de una ecuación se obtiene 0 y en el miembro derecho, el término independiente no es 0, o
- ya no es posible eliminar más variables en las ecuaciones del SEL y se obtiene una ecuación donde se puede despejar una variable y/o una proposición verdadera ($0=0$).

Cuando el proceso de eliminación consecutiva de las variables termina (y se han eliminado las ecuaciones de la forma $0=0$, si las hubiera) y no se obtuvo ninguna contradicción en el sistema en forma trapezoidal, se dice que el **sistema es soluble**.

Al **número de ecuaciones en la forma trapezoidal** se le denota por r y a la **cantidad de variables**, por n .

Si en el SEL expresado en forma trapezoidal se tiene que $r = n$, este tiene **solución única** y si se tiene que $r < n$, este tiene **infinitas soluciones**.

En este último caso, en que $r < n$, se obtienen **$n-r$ variables libres**, que al sustituirse por números reales cualesquiera dan origen a cada una de las infinitas soluciones.

Para obtener los valores de las variables en el caso en que se tiene solución única, se despeja la variable que quedó en la última ecuación y se sustituye en la penúltima ecuación, donde se despeja la otra variable presente y así sucesivamente, se van sustituyendo los valores de las variables de abajo hacia arriba hasta despejar la primera variable en la primera ecuación del SEL.

En el caso en que hay infinitas soluciones, se despeja una de las variables en la última ecuación no nula del SEL en la forma trapezoidal (la r -ésima ecuación), generalmente se acostumbra a despejar la r -ésima variable y se procede análogamente al caso descrito anteriormente.

Observaciones:

- Cuando un SEL tiene solución se dice que es compatible. En caso contrario, se dice que es incompatible.
- Si un SEL tiene solución única se dice que es determinado, pero si tiene infinitas soluciones, se dice que es indeterminado.

Reflexionar sobre:

¿Cuál es el valor de verdad de la siguiente proposición: “Un SEL con menos ecuaciones que variables nunca podrá ser determinado”?

Ejemplo 40:

Consideremos el sistema:
$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ 2x + y + z = 4 \\ 3x + 2y + z = 5 \end{cases}$$
 y apliquemos el método de eliminación de Gauss para resolverlo:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ 2x + y + z = 4 \\ 3x + 2y + z = 5 \end{cases} \begin{array}{l} \downarrow (-2) \\ \downarrow (-3) \end{array} \begin{array}{l} \text{Eliminamos la primera} \\ \text{variable por debajo de} \\ \text{la primera ecuación.} \end{array}$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ -y - 3z = -6 \\ -y - 5z = -10 \end{cases} \downarrow (-1) \begin{array}{l} \text{Eliminamos la segunda} \\ \text{variable por debajo de} \\ \text{la segunda ecuación.} \end{array}$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ -y - 3z = -6 \\ -2z = -4 \end{cases}$$

Hemos obtenido un sistema equivalente al original, pero expresado en forma trapezoidal, donde no hay contradicción, por lo que es soluble y como $r = 3 = n$, es decir, la cantidad de ecuaciones en esta forma trapezoidal es igual a la cantidad de variables del sistema, este tiene solución única.

En la tercera ecuación se puede despejar la tercera variable, z :

Despejando z , se tiene: $z = \frac{-4}{-2} = 2.$

Sustituyendo por $z = 2$, en la segunda ecuación, se tiene:

$$\begin{aligned} -y - 3(2) &= -6 \\ y &= -6 + 6 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo por $z = 2$ y $y = 0$, en la primera ecuación, se tiene:

$$\begin{aligned} x + 0 + 2 \cdot 2 &= 5 \\ x &= 5 - 4 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Luego, $S = \left\{ (1; 0; 2) \right\}$.

Observaciones:

- Se ha obtenido una única solución que consta de un valor para cada variable.
- Para comprobar, hay que hacerlo en **todas** las ecuaciones del sistema. **¡Compruébelo!**
- La combinación de las transformaciones equivalentes aplicadas tiene la ventaja de evitar considerablemente el cálculo con fracciones.
- Si hay coeficientes fraccionarios, se sugiere convertirlos en enteros multiplicando a la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores presentes.
- Si todos los coeficientes y el término independiente de una ecuación tienen un divisor común, entonces se puede multiplicar por su inverso a dicha ecuación para simplificar los cálculos.
- Las transformaciones equivalentes aplicadas se indican colocando una flecha a la derecha del sistema, cuyo origen se sitúa al nivel de la fila a partir de la que se hace la transformación y la zeta se coloca al nivel de la fila que se va a transformar (donde se escriben los resultados de los cálculos) indicando al lado derecho de esta flecha y al nivel de la ecuación correspondiente el número por el que se multiplica en cada caso.

Ejemplo 41:

Hallar el conjunto solución del siguiente SEL utilizando el método de eliminación de Gauss para resolverlo:

$$\begin{cases} 7x - y + 5z = 1 \\ x + 3y - z = 7 \\ 15x + y + 9z = 9 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} 7x - y + 5z = 1 \\ x + 3y - z = 7 \\ 15x + y + 9z = 9 \end{cases} \begin{array}{l} \downarrow (-7) \\ \downarrow (-7) \end{array} \begin{array}{l} (15) \\ (-7) \end{array}$$

$$\begin{cases} 7x - y + 5z = 1 \\ -22y + 12z = -48 \\ -22y + 12z = -48 \end{cases} \downarrow (-1)$$

$$\begin{cases} 7x - y + 5z = 1 \\ -22y + 12z = -48 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Hemos obtenido un sistema equivalente al original, pero expresado en forma trapezoidal, donde no hay contradicción, por lo que es soluble, eliminamos la última ecuación, $0 = 0$, y se tiene que $r = 2 < 3 = n$, es decir, la cantidad de ecuaciones en esta forma trapezoidal es menor que la cantidad de variables del sistema, por lo que este tiene infinitas soluciones y existe $3-2=1$ variable libre.

$$\begin{cases} 7x - y + 5z = 1 \\ -22y + 12z = -48 \end{cases}$$

Despejamos la segunda variable, y , en la segunda ecuación y se obtiene:

$$y = \frac{-48 - 12z}{-22} = \frac{-2(24 + 6z)}{-22} = \frac{24 + 6z}{11}$$

Sustituyendo por $y = \frac{24 + 6z}{11}$, en la primera ecuación, y despejando x se tiene:

$$x = \left(1 - 5z + \frac{24 + 6z}{11} \right) : 7$$

$$x = \frac{5 - 7z}{11}$$

Observar que se ha tomado a z como **variable libre o independiente**, por lo que x y y son **variables dependientes** de z .

$$\text{Luego, } S = \left\{ \left(x = \frac{5 - 7z}{11}; y = \frac{24 + 6z}{11}; z \right) : z \in \mathbb{R} \right\}$$

Ejemplo 42:

Determinar el conjunto solución del siguiente SEL utilizando el método de eliminación de Gauss para resolverlo:

$$\begin{cases} 7x - y + 5z = 1 \\ x + 3y - z = 7 \\ 15x + y + 9z = 2 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} 7x - y + 5z = 1 \\ x + 3y - z = 7 \\ 15x + y + 9z = 2 \end{cases} \begin{array}{l} \downarrow (-7) \\ \downarrow (-7) \\ \downarrow (-7) \end{array} \begin{array}{l} (15) \\ \\ (-7) \end{array}$$

$$\begin{cases} 7x - y + 5z = 1 \\ -22y + 12z = -48 \\ -22y + 12z = 1 \end{cases} \begin{array}{l} \\ \downarrow (-1) \\ \end{array}$$

$$\begin{aligned} 7x - y + 5z &= 1 \\ -22y + 12z &= -48 \\ \mathbf{0} &= \mathbf{49} \end{aligned}$$

Llegamos a una proposición falsa o contradicción en una de las ecuaciones en la forma trapezoidal, por tanto, el SEL no tiene solución.
Luego, $S = \emptyset$.

Ejemplo 43:

Consideremos ahora el sistema:

$$\begin{cases} 9z - 2u = -8 \\ x + 2y - z + u = 5 \\ 2x + 4y + 3z - u = 5 \\ -2x - 4y + z + 2u = -9 \end{cases}$$

Para poder aplicar el método de eliminación de Gauss para resolverlo debemos observar que la primera variable, x , del sistema no aparece en la primera ecuación por lo que es necesario permutar dicha ecuación con cualquiera de las restantes donde sí aparezca esta variable.

Permutemos la primera ecuación con la cuarta:

$$\begin{cases} -2x - 4y + z + 2u = -9 \\ x + 2y - z + u = 5 \\ 2x + 4y + 3z - u = 5 \\ 9z - 2u = -8 \end{cases}$$

Resolviendo el SEL se tiene:

$$\begin{cases} -2x - 4y + z + 2u = -9 \\ x + 2y - z + u = 5 \\ 2x + 4y + 3z - u = 5 \\ 9z - 2u = -8 \end{cases} \begin{array}{l} \downarrow (2) \\ \downarrow \end{array}$$

$$\begin{cases} -2x - 4y + z + 2u = -9 \\ -z + 4u = 1 \\ 4z + u = -4 \\ 9z - 2u = -8 \end{cases} \begin{array}{l} \downarrow (4) \\ \downarrow (9) \end{array}$$

$$\begin{cases} -2x - 4y + z + 2u = -9 \\ -z + 4u = 1 \\ 17u = 0 \\ 34u = 1 \end{cases} \begin{array}{l} \downarrow (-2) \end{array}$$

$$\begin{cases} -2x - 4y + z + 2u = -9 \\ -z + 4u = 1 \\ 17u = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Llegamos a una proposición falsa o contradicción en una de las ecuaciones, por tanto, este SEL no tiene solución.
Luego, $S = \emptyset$.

Observación:

Al comparar este procedimiento de expresar un SEL en la forma trapezoidal con el seguido para hallar el rango de una matriz se puede ver que son similares, por lo que es conveniente trabajar con matrices, lo cual racionaliza el trabajo. ¿Cómo hacerlo?

Se extrae la matriz ampliada del SEL, que además de los coeficientes, incluye los términos independientes, y calculamos su rango.

Ejemplo 44:

Consideremos nuevamente el SEL del ejemplo 40:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ 2x + y + z = 4 \\ 3x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

Extraigamos la matriz ampliada:

$$(A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

Y calculemos su rango:

$$\begin{aligned} r(A, b) &= r \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{(-2)} \downarrow \xrightarrow{(-3)} \downarrow r \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & -5 & -10 \end{array} \right) \downarrow (-1) \\ &= r \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array} \right) = 3 \end{aligned}$$

Observación:

Si se intercambian las dos últimas columnas se mantiene el mismo rango.

Pero, ¿qué hacemos ahora? Veamos el siguiente teorema:

Teorema de Rouché-Frobenius (o Kronecker-Capelli):

Un SEL tiene solución si y solo si el rango de la matriz de los coeficientes del sistema es igual al rango de la matriz ampliada.

Si además, el rango de estas matrices coincide con la cantidad de variables del sistema, este tiene solución única; pero, si el rango de estas matrices es menor que la cantidad de variables del sistema, entonces el SEL tiene infinitas soluciones.

Reflexionar sobre:

¿Por qué es verdadera la siguiente proposición? :

“El rango de la matriz de los coeficientes del sistema que es igual al rango de la matriz ampliada, cuando el sistema es soluble, nunca es mayor que la cantidad de variables”.

Ejercicio resuelto:

Apliquemos el Teorema de Rouché-Frobenius al SEL del ejemplo 44:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ 2x + y + z = 4 \\ 3x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

Obtuvimos que el rango de la matriz de los coeficientes del sistema es igual al rango de la matriz ampliada, o sea, $r(A) = r(A, b) = 3$, por lo que el sistema es soluble, y sabemos que el sistema tiene 3 variables, $n = 3$, entonces, como $r = n$ este sistema tiene solución única, tal y como vimos en el ejemplo 40.

¿Y cómo obtener esa solución si procedemos por esta vía?

Retomemos la última matriz transformada del ejemplo 44:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array} \right)$$

Y volvamos a incorporarle las variables y los signos de la relación de igualdad, retornando al sistema, pero ya en su forma trapezoidal:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ -y - 3z = -6 \\ -2z = -4 \end{cases}$$

Observar que coincide con el obtenido en el ejemplo 40, por lo que se procede de la misma forma para encontrar la solución.

Ejemplo 45:

Consideremos nuevamente el SEL del ejemplo 41:

$$\begin{cases} 7x - y + 5z = 1 \\ x + 3y - z = 7 \\ 15x + y + 9z = 9 \end{cases} \begin{array}{l} \downarrow (15) \\ \downarrow (-7) \\ \downarrow (-7) \end{array}$$

Apliquemos el método de eliminación de Gauss, pero utilizando la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 7 \\ 15 & 1 & 9 & 9 \end{array} \right) \begin{array}{l} \downarrow (-7) \\ \downarrow (-7) \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & -22 & 12 & -48 \\ 0 & -22 & 12 & -48 \end{array} \right) \downarrow (-1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & -22 & 12 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Obtenemos que $r(A) = r(A, b) = 2$, por lo que el sistema es

soluble, pero como $r(A) < n = 3$, entonces tiene infinitas soluciones con $n - r = 3 - 2 = 1$ variable libre, tal como se vio en el ejemplo 41. Retomando el SEL ya en forma trapezoidal:

$$\begin{cases} 7x - y + 5z = 1 \\ -22y + 12z = -48 \end{cases}$$

Se procede de la misma forma que en el ejemplo 41 para hallar el valor de cada variable.

Ejemplo 46:

Retomemos el SEL del ejemplo 42:

$$\begin{cases} 7x - y + 5z = 1 \\ x + 3y - z = 7 \\ 15x + y + 9z = 2 \end{cases} \quad (-7)$$

Apliquemos el método de eliminación de Gauss, pero utilizando la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 7 \\ 15 & 1 & 9 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \downarrow (-7) \\ \downarrow (15) \\ \downarrow (-7) \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & -22 & 12 & -48 \\ 0 & -22 & 12 & 1 \end{array} \right) \downarrow (-1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & -22 & 12 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & 49 \end{array} \right)$$

Observar que se obtiene que $r(A) = 2$, y al intercambiar las dos últimas columnas de la matriz ampliada se tiene que $r(A, b) = 3$, o sea, $r(A) \neq r(A, b)$ por lo que el sistema no tiene solución.

1.7.1. Sistemas de ecuaciones lineales homogéneos.

Definición: (Sistema de m ecuaciones lineales con n variables homogéneo)

Un sistema de m ecuaciones lineales con n variables es un sistema homogéneo si todos sus términos independientes son iguales a cero, o sea:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Ejemplo 47:

Son sistemas homogéneos:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ -3x + y + 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -x + 5z = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ y - 4z = 0 \\ x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

Observación:

Como los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos son un caso particular de SEL, se resuelven aplicando los mismos métodos estudiados.

Reflexionar sobre:

La condición de solubilidad de un sistema homogéneo a partir de la condición de solubilidad de un SEL cualquiera, según el método de eliminación de Gauss y según el Teorema de Rouché-Frobenius.

Observaciones:

- No es necesario considerar la matriz ampliada en un SEL homogéneo ya que todos los términos independientes son iguales a cero.
- Es evidente que todas las ecuaciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo se satisfacen cuando hacemos que todas las variables sean iguales a cero.

Teorema 6:

Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo tiene siempre la solución trivial $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

¿Pero cómo saber cuándo tiene solución única y cuándo tiene infinitas soluciones? Como un sistema de ecuaciones lineales homogéneo es ante todo un sistema de m ecuaciones lineales con n variables, se aplican las mismas condiciones establecidas anteriormente para un SEL cualquiera, es decir:

- Si en el SEL homogéneo expresado en forma trapezoidal se tiene que $r = n$, o sea, la cantidad de ecuaciones (no nulas) en esta forma coincide con el número de variables, este tiene **solución única**, que es **la trivial**.
- Si se tiene que $r < n$, el SEL homogéneo tiene **infinitas soluciones** y tendrá $n - r$ variables libres.

Teorema 7:

Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo es siempre soluble de forma no trivial si la cantidad de ecuaciones (no nulas) en la forma trapezoidal del sistema es menor que el número de variables de este.

Observación:

Se aclara que un SEL homogéneo que tiene infinitas soluciones posee, además de la solución trivial, otras infinitas soluciones.

Ejemplo 48:

Hallar el conjunto solución de los siguientes sistemas homogéneos:

$$\text{a) } \begin{cases} x - 3y - 4z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 4x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 7x + y - z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \\ 4x - 5y - 7z = 0 \end{cases}$$

Solución:

$$\text{a) } r \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(-1) \\ (-1) \\ (-4)}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 14 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(-5) \\ (6) \\ (3)}} = r \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 14 & 18 \end{pmatrix}$$

$$= r \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow[\downarrow (5)]{(-19)} = r \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 = n$$

Este sistema homogéneo tiene solución única, la trivial, luego, $S = \{(0; 0; 0)\}$.

$$\begin{aligned} \text{b) } r \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & -5 & -7 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\downarrow} = r \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & -1 \\ 4 & -5 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\downarrow]{(-7)} \xrightarrow[\downarrow]{(-4)} = r \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -13 & -15 \\ 0 & -13 & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow[\downarrow]{(-1)} \\ &= r \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -13 & -15 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 < 3 = n \end{aligned}$$

Este sistema homogéneo tiene infinitas soluciones con $3 - 2 = 1$ variable libre.

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ -13y - 15z = 0 \end{cases}$$

De donde se tiene: $y = \frac{15}{-13}z$ y sustituyendo en la primera ecuación a y se obtiene,

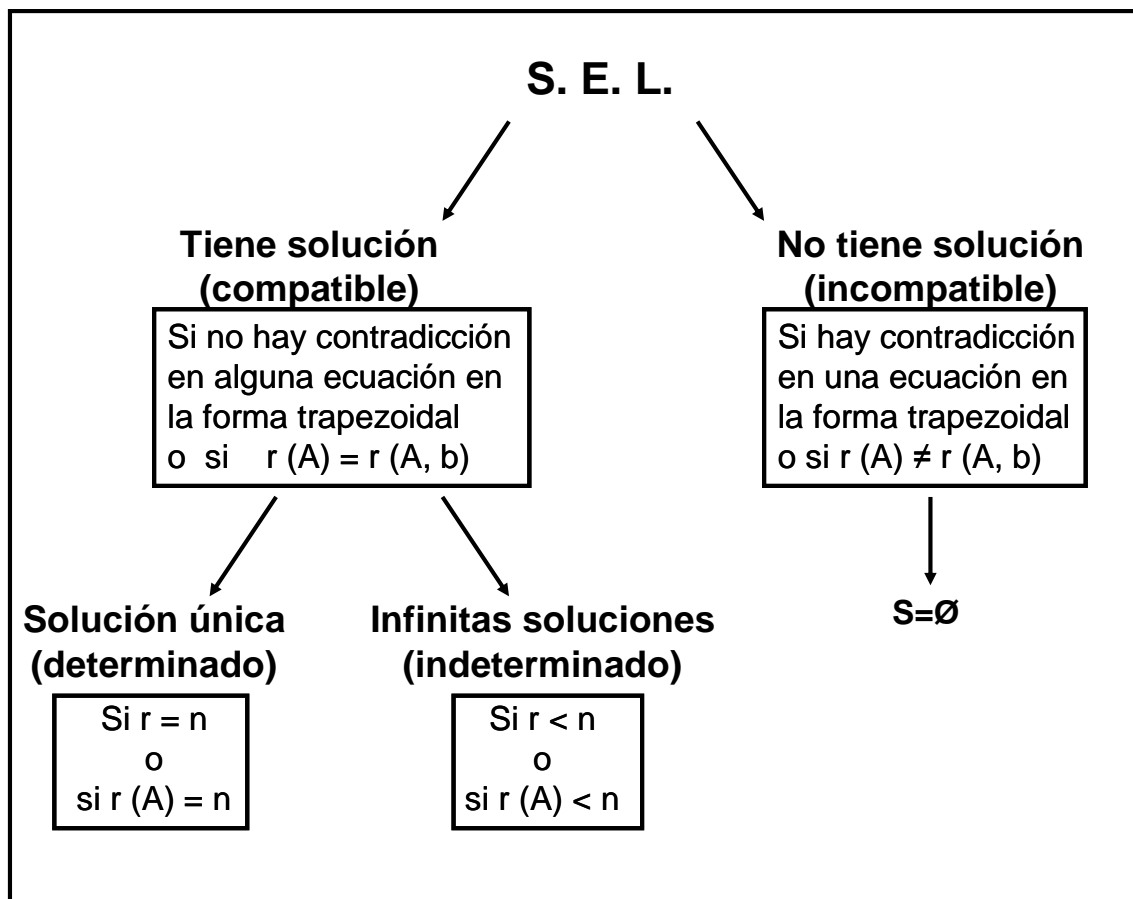
$$\text{al despejar } x: \quad x = \frac{4}{13}z.$$

$$\text{Por tanto, } S = \left\{ \left(\frac{4}{13}z; \frac{15}{-13}z; z \right) \mid z \in R \right\}.$$

Observación:

La ventaja esencial del método de eliminación de Gauss consiste en que mediante este método puede tratarse todo tipo de sistema de ecuaciones lineales: soluble o no soluble, homogéneo o no homogéneo, y constituye una generalización de los métodos estudiados en la Escuela.

A modo de resumen se puede realizar el siguiente cuadro:



EJERCICIOS

1. Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ -11 & 12 & -13 & 14 & -15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix}$$

- Determine su tipo.
- Diga el valor de cada uno de los elementos siguientes: a_{13} , a_{24} , a_{33} , a_{42} , a_{45} .
- Designe cada uno de los elementos siguientes de la matriz dada por la notación a_{ik} : -4, 19, -11, 6, 18.
- Mencione los elementos de la diagonal principal.

2. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Determine el tipo de cada una.

- b) Mencione los elementos de la diagonal principal de cada una.
- c) Halle los elementos: a_{21} , b_{13} , c_{31} , d_{22} , e_{12} , f_{32} .
- d) ¿Qué relación existe entre las matrices B y F?
- e) Halle A^T y C^T .
- f) Clasifique la matriz E de todas las formas posibles.
- g) ¿Es A una matriz antisimétrica? Fundamente su respuesta.
- h) ¿Es $G = (1)$ una matriz? Fundamente su respuesta. Si es posible, diga cuál es su tipo y clasifíquela.
- i) Escriba la matriz nula de tipo (3;1).

3. Escriba, si es posible, una matriz con las siguientes características:

- a) Triangular superior de orden 4.
- b) Matriz fila de tipo (2;1).
- c) Matriz unidad de orden 5.
- d) Matriz simétrica de tres filas.
- e) Matriz antisimétrica de cuatro columnas.
- f) Matriz diagonal y su transpuesta.
- g) Matriz columna.
- h) Matriz de tipo (2;3) cuya diagonal principal esté formada por las soluciones del SEL:

$$\begin{cases} \frac{4}{x} - \frac{y}{4} = 1 \\ \frac{6}{x} + \frac{y}{6} = \frac{11}{3} \end{cases}$$

4. Halle los valores de a, b, c y d de la matriz L para que se cumpla que $L = M$ si

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \text{ y } L = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c-d & c \\ \sqrt{2a+d} & b-1 \end{pmatrix}.$$

5. Escriba una matriz P que sea igual a la matriz S si:

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{121} & x & \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \\ \tan 45^\circ & -0,5^2 & y \end{pmatrix} \text{ y además, } y = \log_{\frac{1}{4}} 0,25 \text{ y } x \text{ es la solución de la}$$

ecuación $3,2^x = 1$.

6. Sea el SEL:

$$\begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$$

- a) Extraiga la matriz de los coeficientes C y la matriz ampliada A.
- b) Determine el tipo de cada una. ¿Son cuadradas?
- c) ¿Cuáles son los elementos de la diagonal principal de la matriz ampliada?

- d) ¿Qué posición ocupa el elemento -2 en estas matrices? ¿Cuál es la posición del elemento 3 en la matriz ampliada?
 e) Escriba la matriz transpuesta de cada una y determine su tipo.

7. Sean las matrices:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 0 & 9 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcule, si es posible:

$$P + Q, P + R, Q - R, R - P, R + P, -2S, 5 \cdot Q^T, \frac{1}{3} \cdot Q, P+P+P, \\ R \cdot Q, P \cdot R, S \cdot Q^T, S \cdot Q, R \cdot P, Q \cdot S, R^2.$$

8. Halle una matriz X y una matriz Y tal que: $X + A = A$ y $A + Y = O$ si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

9. Halle x, y, z y w si:

a) $3 \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{pmatrix}.$

b) $\begin{pmatrix} 3x & 2y \\ 3z & w-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ -1 & 3w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 8 \end{pmatrix}.$

10. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

10.1. Calcule:

- a) $F = A \cdot B$ b) $G = B \cdot C$ c) $F \cdot C$ d) $A \cdot G$
 e) $(A+B) \cdot C$ f) $A \cdot C + B \cdot C$ g) $A \cdot (B+C)$ h) $A \cdot B + A \cdot C$
 i) $B^T \cdot A^T$ j) $5F - 3G$ k) $D = -2A^2 + C^T$ l) $4D + A \cdot B$

10.2. ¿Qué valor debe tomar x para que $x \cdot C = \begin{pmatrix} -3,5 & -0,5 & 0 \\ -1 & -1 & -1,5 \\ -0,5 & 0,5 & -0,5 \end{pmatrix}$?

10.3. Verifique que se cumplen las propiedades:

$$(A+B) + C = A + (B+C) \\ (A+B)^T = A^T + B^T \\ (A \cdot C)^T = C^T \cdot A^T$$

11. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ halle: a) $B = 2A^2 - 3A + 5I$.

b) $C = A^2 + 3A - 10I$.

12. ¿Qué matrices conmutan con la matriz $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

13. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcule todas las sumas y productos posibles.

b) Calcule, si es posible: CDC, CAB y DBA.

14. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, determine todas las matrices no nulas $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que:

a) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

15. Sean las matrices:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Clasifique las matrices dadas.

b) Calcule: M·L, L·M, M·V, V·L.

c) Formule proposiciones a partir de los resultados anteriores.

d) Demuestre o refute una de ellas.

16. Diga si las proposiciones siguientes son verdaderas o falsas. En este último caso explique por qué.

Sean A y B matrices. Si existen las sumas, diferencias y productos, entonces se cumple que:

1) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

2) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

17. Sea la función h definida por la ecuación $h(x) = x^2 - 3x$ y la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Halle h(A).

18. Sean las matrices:

$$H = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Determine el tipo de cada una.
- Nombre los elementos de la diagonal principal de cada una. Señálela.
- ¿Puede ser el rango de K mayor que 4? ¿Por qué?
- Halle el rango de cada una.
- ¿Cuáles son regulares?

19. ¿Cuál es el rango de la matriz nula de orden 3? ¿Es regular?

20. ¿Cuál es el rango de la matriz unidad de orden 5? ¿Es regular?

21. Considere una matriz A cualquiera de tipo (m;n). ¿Qué valores puede tomar su rango? ¿Por qué?

22. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 6 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 12 & 8 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

- Estime el rango de cada una.
- Halle el rango de cada una.
- ¿Cuáles son regulares?
- Halle la transpuesta de cada una y su rango.
- Compare el rango de cada matriz con el de su transpuesta. Escriba una proposición verdadera y fundaméntela.

Sugerencia: Para calcular el rango de la matriz G puede usar asistentes matemáticos como el Derive.

23. Formule otra definición del concepto "rango de una matriz".

24. Calcule el rango de las matrices A y B del ejemplo 1 del epígrafe 1.1. Compárelos.

25. Determine, si es posible, la inversa de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

En los casos en que no sea posible, argumente por qué.

26. Resuelva, si es posible, las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $M \cdot X = I$ si $M = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $Y \cdot P = I$ si $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$

c) $T \cdot Z = I$ si $T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

Reflexionar sobre:

La forma que tiene la inversa de una matriz diagonal y en particular, la inversa de una matriz escalar.

27. Comprueba en cada caso la propiedad dada:

a) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

b) $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ si $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

28. Dadas las matrices regulares A, B y C, si se cumple que $A \cdot B = C$:

a) Halle la matriz B si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) Halle la matriz A si $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

29. Calcule la inversa de la matriz A del ejemplo 1 del epígrafe 1.1.

a) Escriba una matriz y adiciónela a A^{-1} .

b) Escriba una matriz y multiplíquela por A^{-1} .

30. Sean los SEL:

$$a) \begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 5x - 3y - z = 16 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - z = -1 \\ 2x - y = 5 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

30.1. Extraiga la matriz de los coeficientes de cada uno.

30.2. Halle, si es posible, la inversa de dichas matrices.

30.3. Calcule el producto de la matriz inversa hallada y la matriz columna formada por los términos independientes en cada caso.

31. Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcule todas las sumas y productos posibles de dos matrices.

b) Halle:

$$B^T - 3C, 5E^{-1} \cdot A^{-1}, G^{-1} + H, C \cdot D - 2H^{-1}, F^T - E \cdot B, H^3 - G^T + 2G - F \cdot B.$$

32. Sea el SEL:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4u = 11 \\ 2x + 3y + 4z + u = 12 \\ 3x + 4y + z + 2u = 13 \\ 4x + y + 2z + 3u = 14 \end{cases}$$

a) Extraiga la matriz de los coeficientes C y la matriz ampliada A del sistema.

b) Determine el tipo de cada una.

c) Halle el rango de la matriz de los coeficientes.

d) Determine la inversa de la matriz de los coeficientes, si es posible.

e) Escriba una matriz y adiciónela a la matriz ampliada.

f) Escriba una matriz y multiplíquela a la derecha por la matriz de los coeficientes.

g) Halle la transpuesta de la matriz ampliada y calcule su triplo.

h) Halle el conjunto solución del SEL dado.

33. Lea cuidadosamente:

En un triángulo cualquiera la suma de las amplitudes del ángulo mediano y del ángulo menor excede en 36° a la amplitud del ángulo mayor, y la suma de las amplitudes de los ángulos mayor y mediano es igual al triplo de la amplitud del ángulo menor. ¿Cuántos grados mide cada ángulo? (Tomado del libro "Matemática 12", pág. 78)

a) Realice el planteo de la situación descrita.

b) Extraiga la matriz de los coeficientes A.

c) Extraiga la matriz B formada sólo por los términos independientes.

- d) Determine el tipo de cada una y clasifíquelas.
 e) Halle A^{-1} y B^{-1} , si es posible.
 f) Calcule $A^{-1} \cdot B$, si es posible.
 g) Responda la interrogante planteada.

34. Halle el conjunto solución de los siguientes SEL:

$$a) \begin{cases} x + y - 2z = 4 \\ 2x - y + z = 6 \\ 5x + 2y - 5z = 18 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} a + 2b + c = 2 \\ 3a + b - 2c = 1 \\ 4a - 3b - c = 3 \\ 2a + 4b + 2c = 4 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y + 2z + v = 5 \\ 2x + 3y - z - 2v = 2 \\ 4x + 5y + 3z = 7 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x + y + z + u = 6 \\ 3x - y + 2z + 5u = 2 \\ x - 3y + 3u = 4 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 3x + 4y + 5z = 2 \\ 5x + 4y + 3z = -18 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 3x + 2y + z = 8 \\ 4x - 3y - z = 2 \\ x + y - z = 12 \\ 5x + 5y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} x + 2z + 5u = 6 \\ 2x + y + 8z + 13u = 14 \\ x + 3z + 7u = 7 \\ x + 4z + 3u = 4 \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} a + 2b + 3c + 4d = 5 \\ a + 3b + 3c + 2d = 3 \\ 2a + 4b + 3c + 3d = 5 \\ a + b + c + d = 2 \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} p + 2q + 3r = 6 \\ -p - r = -2 \\ -q - r = -2 \\ 3p - q + 2r = 4 \end{cases}$$

$$j) \begin{cases} 2f + g - 3h = 8 \\ f + g + h = 2 \\ f - g - h = 1 \\ 4f - 3g + 2h = 3 \end{cases}$$

$$k) \begin{cases} x - y - 2z + u + 2v = 2 \\ x + 2y + 8z + 6u + v = 1 \\ 2x + y + 2z + u + v = 9 \end{cases}$$

$$l) \begin{cases} 3a + b - 8c + 2d + f = 0 \\ 2a - 2b - 3c - 7d + 2f = 0 \\ a + 11b - 12c + 34d - 5f = 0 \\ a - 5b + 2c - 16d + 3f = 0 \end{cases}$$

35. Determine el conjunto solución de los siguientes SEL homogéneos:

$$a) \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \quad c) \begin{cases} 7x - 3y + z = 0 \\ 2y + x - z = 0 \end{cases} \quad d) \begin{cases} 2x - 7y - z = 0 \\ 4x + y + 2z = 0 \\ 5x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ 2x + 2y - 3z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases} \quad f) \begin{cases} 3x + 4y - 5z + 7u = 0 \\ 2x - 3y + 3z - 2u = 0 \\ 4x + 11y - 13z + 16u = 0 \\ 7x - 2y + z + 3u = 0 \end{cases} \quad g) \begin{cases} 2x + 3y - z + 5v = 0 \\ 3x - y + 2z - 7v = 0 \\ 4x + y - 3z + 6v = 0 \\ x - 2y + 4z - 7v = 0 \end{cases}$$

$$\text{h) } \begin{cases} x + y - 3u - v = 0 \\ x - y + 2z - u = 0 \\ 4x - 2y + 6z + 3u - 4v = 0 \\ 2x + 4y - 2z + 4u - 7v = 0 \end{cases} \quad \text{i) } \begin{cases} x - 2y + z - u + v = 0 \\ 2x + y - z + 2u - 3v = 0 \\ 3x - 2y - z + u - 2v = 0 \\ 2x - 5y + z - 2u + 2v = 0 \end{cases}$$

$$\text{j) } \begin{cases} a - 2b + c + d - e = 0 \\ 2a + b - c - d + e = 0 \\ a + 7b - 5c - 5d + 5e = 0 \\ 3a - b - 2c + d - e = 0 \end{cases} \quad \text{k) } \begin{cases} \frac{a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{c}{3} = 0 \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{6} - \frac{c}{2} = 0 \\ \frac{a}{6} - \frac{b}{3} + \frac{c}{6} = 0 \end{cases} \quad \text{l) } \begin{cases} \frac{x+y}{3} + \frac{x-y}{2} = 0 \\ \frac{2x+y}{5} + \frac{3x-2y}{4} = 0 \end{cases}$$

36. Analice para qué números reales λ , el SEL es soluble y determine su conjunto solución:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 3x + 5y + z = 9 \\ 2x + 3y + z = \lambda^2 - 4\lambda + 6 \\ 5x + 6y + \lambda z = 15 \end{cases}$$

37. Sea el SEL:
$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \end{cases}$$

- a) ¿Para qué valores reales λ , el SEL tiene solución única? Hállaala.
 b) ¿Qué valores reales λ hacen incompatible este SEL? Explique su respuesta.
 c) ¿Cuáles valores reales λ hacen que el sistema tenga infinitas soluciones? Halle el conjunto solución en este caso.

38. Dados los SEL siguientes:

$$\text{a) } \begin{cases} kx + 3y - z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ -kx + y + 2z = -1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = -2 \end{cases}$$

En cada caso, halle los valores reales de k para los cuales el sistema no tiene solución única. Precise para qué valores reales de k el sistema tiene infinitas soluciones.

39. Encuentre los valores reales de t para los cuales cada uno de los siguientes SEL tiene solución no trivial:

$$\text{a) } \begin{cases} tx + y + z = 0 \\ 7x + ty + z = 0 \\ -4x + y + (t+1)z = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + 2ty + z = 0 \\ 2tx + 2y + z = 0 \\ 3x + 2y + tz = 0 \end{cases}$$

40. Halle una condición para α , β y γ de forma tal que el siguiente SEL sea incompatible:

$$\begin{cases} x+3y-z=\alpha \\ x-2y+z=\beta \\ 3x+4y-z=\gamma \end{cases}$$

41. En el siguiente SEL **a**, **b** y **c** están expresados en función de **x**, **y** y **z**:

$$\begin{aligned} a &= x+2y-z \\ b &= x-y+2z \\ c &= 3x+3y+z \end{aligned}$$

Expresé a **x**, **y** y **z** en función de **a**, **b** y **c**.

42. Determine las posiciones relativas de las siguientes rectas, dadas por sus ecuaciones, en el plano:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } r: x+3y-6=0 & \text{b) } m: x-y-1=0 & \text{c) } t: x+8=y+2 \\ \text{s: } 3x+9y-10=0 & \text{n: } 2y-x-4=0 & \text{u: } y-4=x+2 \\ & \text{p: } -7-5y+4x=0 & \end{array}$$

43. Demuestre que las siguientes rectas, dadas por sus ecuaciones, se cortan en un punto y calcule las coordenadas de este.

$$r: y=5-x, \quad s: 3x+4y-18=0, \quad t: y=\frac{13-2x}{3}.$$

44. Determine, en cada caso, si los tres planos dados por sus ecuaciones se intersectan en el espacio. Si es posible, identifique el conjunto intersección.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \alpha: -2x+y+4z=-3 & \text{b) } \delta: x+y-3z+1=0 & \text{c) } \rho: x+2y+z=8 \\ \beta: 3x-1,5y-6z=4,5 & \epsilon: 2x+y-2z-1=0 & \pi: 2x+2y+z=9 \\ \gamma: 6x-3y-12z=9 & \mu: x+2y-7z-1=0 & \omega: 3x+3y+5z=24 \end{array}$$

45. Determine la posición relativa de los siguientes planos, representados por sus ecuaciones, en el espacio:

$$\begin{aligned} \pi_1: x+2y+3z+4 &= 0 \\ \pi_2: x-y-3z-8 &= 0 \\ \pi_3: x+5y+9z+16 &= 0 \end{aligned}$$

46. Los puntos $A(1; -1; 4)$, $B(1; 1; 0)$ y $C(-1; 2; 5)$ pertenecen al plano ρ del espacio. Halle la ecuación que representa a dicho plano si se conoce que el término independiente es -1 .

47. Tres rectas del plano tienen un punto común. Si se escribe la matriz ampliada de orden 3, correspondiente al SEL formado por las ecuaciones que las representan, ¿cuál es el rango de dicha matriz?

48. Cada una de las siguientes matrices en forma escalonada han sido obtenidas de un sistema de tres ecuaciones con tres variables: x , y , z . Diga una interpretación geométrica de cada sistema.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

49. A continuación se describe, en cada caso, la intersección de tres planos:

a) Un punto. b) Una recta. c) Un plano.

Diga el tipo de solución que tiene el SEL formado por las ecuaciones que representan a estos planos en cada caso.

50. Sean las funciones f y g definidas en \mathbb{R} por las ecuaciones:

$$f(x) = -\frac{x}{2} - \frac{5}{2} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{-2x+10}{-4}$$

Determine para qué elementos del dominio se obtiene la misma imagen.

51. Halle la ecuación que representa a la función cuadrática definida en el intervalo $[-2;4]$, si se conoce que en los extremos del intervalo toma el valor máximo 13 y $g(1) = 4$ es su valor mínimo.

52. Analice el texto del siguiente ejercicio y responda:

“La suma de las tres cifras de un número es 14. La cifra de las decenas es igual a la suma de las cifras de las centenas y las unidades. Si del número se resta 99, se obtiene otro número que se compone de las mismas cifras, pero en orden inverso. ¿Cuál es el número original?” (Tomado del libro “Matemática 12”, 2da. parte, p: 55)

- Haga el planteo de la situación descrita.
- Escriba el SEL obtenido mediante matrices.
- Resuelva el SEL utilizando el método de la matriz inversa y responda el ejercicio.
- Describa los pasos que utilizó en el inciso anterior.
- Escriba la matriz ampliada del SEL y adiciónale una matriz.
- Efectúe el producto de $-\sqrt{5}$ por la matriz de los coeficientes del SEL.
- Calcule el producto de la matriz de los términos independientes y su transpuesta de forma tal que obtenga:
 - La matriz de mayor orden posible.
 - La matriz de menor orden posible.

53. En un consultorio médico se seleccionaron los adultos que debían recibir una atención priorizada, resultando 110 entre hipertensos, diabéticos y embarazadas. La octava parte de los hipertensos con la novena parte de los diabéticos y la quinta parte de las embarazadas hacen un total de 15, y la cantidad de embarazadas e hipertensos es 65. ¿Cuántos hipertensos, diabéticos y embarazadas fueron seleccionados?

54. Dado el SEL:
$$\begin{cases} 3x - 2y + 3z = 25 \\ 2x - 4y + 2z = 14 \\ x - y - z = -4 \end{cases}$$

- Escriba un ejercicio con texto cuyo planteo se corresponda con el SEL dado.
- Describa los pasos que usted seguiría para explicarle la resolución de este ejercicio a un grupo de estudiantes.

55. Como parte del Ejercicio Meteoro 2010, tres trabajadores: A, B y C, de un taller elaboraron un plan de aviso a sus compañeros de trabajo para su movilización en

caso de catástrofe. Si A le diera un compañero más a C, ambos tienen que avisar a la misma cantidad de compañeros. Si B tuviera que avisarle a un compañero menos, tendría tantos como C, y si A tuviera que avisarle a 5 compañeros más, tendría tanto como el doble de los que tiene C. ¿Cuántos compañeros laboran en el taller?

56. Durante tres semanas en una casa se consumieron 127 kWh. Si a la mitad del consumo de la primera semana se añade la tercera parte del consumo de la segunda, y la novena parte del consumo de la tercera, se han gastado 39 kWh. Además, el consumo de la tercera semana excedió en 4 kWh a la mitad de lo consumido entre la primera y la segunda. ¿En cuál semana se ahorró más electricidad?

57. En una zona de los CDR del municipio Playa de La Habana, entre tres comités: A, B y C, recogieron 140 lb de cartón como parte del plan de recuperación de materias primas. Si el CDR A recogió el doble de lo que recogió el C, y el B recolectó 10 lb menos que el A, ¿cuántas libras de cartón recogió cada CDR?

58. En un consultorio del médico de familia se vacunaron 160 personas entre embarazadas, asmáticos y niños contra el virus de la influenza AH1N1. La cuarta parte de la suma de la cantidad de embarazadas y de asmáticos equivale al número de niños disminuido en 20, y si a la mitad de la diferencia entre la cantidad de embarazadas y de niños se le añade el número de asmáticos, se obtienen 57 personas. ¿Cuántas embarazadas, asmáticos y niños fueron vacunados en dicho consultorio?

59. En una cooperativa hay 180 animales entre carneros, vacas y cerdos, destinados al autoconsumo y al abastecimiento de un pueblo cercano. La diferencia entre el número de cerdos y de carneros es 35, y la cantidad de vacas y carneros (juntos) excede en 20 a la cantidad de cerdos. ¿Cuántos animales hay de cada tipo?

60. A partir de datos reales elabore un problema cuya solución conduzca al planteo de un SEL y resuélvalo. (Cite la fuente de los datos).

61. La siguiente tabla muestra la cantidad aproximada (en gramos) de carbohidrato, grasa y proteína contenida en cada gramo de leche, carne y vegetales:

	Leche	Carne	Vegetales
Carbohidrato	0,1	0	0,6
Grasa	0,2	0,3	0
Proteína	0,1	0,5	0,1

Halle la cantidad de cada alimento necesaria para obtener una ración con 95,2 g de carbohidrato, 89,6g de grasa y 137,2g de proteína.

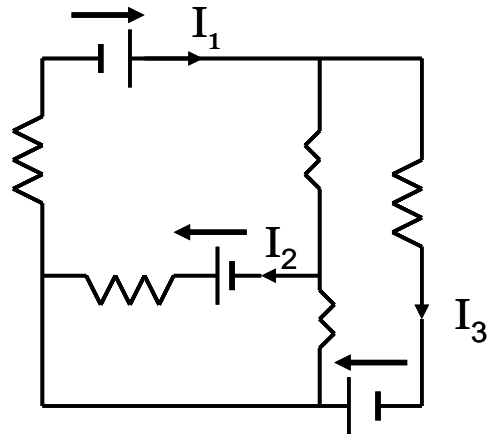
62. Las corrientes I_1 , I_2 e I_3 (amperes) en tres alambres de una calculadora electrónica están conectadas a las fuentes E_1 , E_2 y E_3 (medidas en voltios) de tres señales como se muestra a continuación:

$$E_1 = 5 I_1 - I_2 - 2 I_3$$

$$E_2 = - I_1 + 2 I_2 + I_3$$

$$E_3 = -2 I_1 + I_2 + 4 I_3$$

Si E_1 , E_2 y E_3 son de 7v, 13v y 11v respectivamente, halle I_1 , I_2 e I_3 .



63. Lea detenidamente cada uno de los teoremas enunciados en este capítulo.

- Escríbalo en la forma “si... entonces...” (condicional) o “... si y solo si...” (bicondicional) según corresponda, si no está en dicha forma.
- Señale premisa y tesis en cada uno.
- Elabore el recíproco de cada uno y determine su valor de verdad.
- Escriba el contrarrecíproco de cada uno.

RESPUESTAS

1. a) $t(A) = (4; 5)$.

b) $a_{13} = 3$, $a_{24} = 9$, $a_{33} = -13$, $a_{42} = 17$, $a_{45} = 20$.

c) $-4 = a_{14}$, $19 = a_{44}$, $-11 = a_{31}$, $6 = a_{21}$, $18 = a_{43}$.

d) 1, 7, -13, 19.

2.

a) $t(A)=(2;2)$, $t(B)=(2;3)$, $t(C)=(3;2)$, $t(D)=(2;3)$, $t(E)=(2;2)$, $t(F)=(3;2)$,

b) A : 2 y 0 ; B : 4 y 2 ; C : 2 y 1 ; D : 1 y 5 ; E : 1 y 1 ; F : 4 y 2.

c) $a_{21}= 1$, $b_{13}= 1$, $c_{31}= 0$, $d_{22}= 5$, $e_{12}= 0$, $f_{32}= 0$.

d) $B=F^T$ o $F=B^T$.

e) $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

f) E es cuadrada, simétrica, unidad, diagonal, escalar, triangular superior, triangular inferior.

g) No, pues un elemento de la diagonal principal es $2 \neq 0$.

h) Sí, está formada por un número real, $t(G)=(1;1)$, G es cuadrada, simétrica, unidad.

i) $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. $a= 1$, $b = -5$, $c = 5$, $d = 7$.

5. $P = \begin{pmatrix} 11 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -0,25 & 1 \end{pmatrix}$

6.

$$\text{a) } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $t(C)=(4;3)$, $t(A)=(4;4)$. A sí es cuadrada, C no.

c) Todos son iguales a 1.

d) -2 está en la segunda fila y tercera columna.

3 está en la tercera fila y cuarta columna.

$$\text{e) } C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad t(C^T)=(3;4),$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad t(A^T)=(4;4).$$

7.

$P + Q$ no es posible (no son del mismo tipo)

$$P + R = R + P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 0 & 9 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$Q - R$ no es posible (no son del mismo tipo)

$$R - P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -4 \end{pmatrix}; \quad -2S = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}; \quad 5 \cdot Q^T = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 35 \\ -25 & 45 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3} \cdot Q = \begin{pmatrix} 2 & \frac{-5}{3} \\ 0 & 3 \\ 7 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}; \quad P+P+P = 3P = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 9 \\ 6 & 15 & -3 \\ 0 & -6 & 12 \end{pmatrix}; \quad R \cdot Q = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ -19 & 45 \\ 18 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P \cdot R = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 3 \\ -15 & 18 & -1 \\ 16 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad S \cdot Q^T = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 15 \\ 29 & -9 & 27 \end{pmatrix};$$

$S \cdot Q$ no es posible (no están enlazadas)

$$R \cdot P = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 6 & 24 & -14 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}; \quad Q \cdot S = \begin{pmatrix} -8 & 11 \\ 36 & -9 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}; \quad R^2 = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -2 \\ -9 & 14 & -8 \\ -7 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

8.

$$X + A = A$$

$$X = A - A = O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + Y = O$$

$$Y = O - A = -A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

9. a) $x = 2, y = 4, z = 1, w = 3$.

b) Adicionando en el miembro derecho, se tiene:

$$\begin{pmatrix} 3x & 2y \\ 3z & w-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+4 & x+y \\ z+w-1 & 3w+8 \end{pmatrix}$$

Por definición de igualdad de matrices, se tiene:

$$3x = x+4 \quad y \quad 2y = x+y \quad y \quad 3z = z+w-1 \quad y \quad w-z = 3w+8$$

$$2x = 4 \quad y \quad y = x \quad y \quad 2z - w = -1 \quad y \quad z + 2w = -8$$

$$x = 2 \quad y \quad y = 2 \quad y \quad \begin{cases} 2z - w = -1 \\ z + 2w = -8 \end{cases} \downarrow (-2) \quad \begin{cases} 2z - w = -1 \\ -5w = 15 \end{cases} \text{ de donde } w = -3.$$

Sustituyendo en $2z - w = -1$ por $w = -3$ se obtiene: $z = -2$.

10.

$$10.1. \text{ a) } F = \begin{pmatrix} 24 & -7 & -1 \\ 1 & -6 & 2 \\ 14 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{b) } G = \begin{pmatrix} 33 & 7 & -2 \\ 47 & 5 & 6 \\ 10 & -2 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{c) } F \cdot C = \begin{pmatrix} 153 & 11 & -22 \\ -3 & -13 & -16 \\ 104 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } A \cdot G = \begin{pmatrix} 153 & 11 & -22 \\ -3 & -13 & -16 \\ 104 & 8 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{e) } (A+B) \cdot C = \begin{pmatrix} 53 & 7 & 5 \\ 43 & 1 & 9 \\ 15 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{f) } A \cdot C + G = \begin{pmatrix} 53 & 7 & 5 \\ 43 & 1 & 9 \\ 15 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{g) } A \cdot (B+C) = \begin{pmatrix} 44 & -7 & 6 \\ -3 & -10 & 5 \\ 19 & 3 & 13 \end{pmatrix} \quad \text{h) } A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} 44 & -7 & 6 \\ -3 & -10 & 5 \\ 19 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\text{i) } B^T \cdot A^T = \begin{pmatrix} 24 & 1 & 14 \\ -7 & -6 & 0 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{j) } 5F - 3G = \begin{pmatrix} 21 & -56 & 1 \\ -136 & -45 & -8 \\ 40 & 6 & 48 \end{pmatrix} \quad \text{k) } D = \begin{pmatrix} 1 & -18 & -29 \\ 5 & -8 & 1 \\ 4 & -1 & -13 \end{pmatrix}$$

$$1) 4D+F = \begin{pmatrix} 28 & -79 & -117 \\ 21 & -38 & 6 \\ 30 & -4 & -46 \end{pmatrix}$$

$$10.2. \quad x = -0,5.$$

$$11. a) B = \begin{pmatrix} 16 & -18 \\ -27 & 61 \end{pmatrix}$$

$$b) C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

12.

Para que una matriz conmute con M debe ser cuadrada de orden 2, por lo que hay que buscar las matrices de la forma $\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$ tales que:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De donde se obtiene, al efectuar los productos y por igualdad de matrices, que las matrices que conmutan con la matriz M son de la forma $\begin{pmatrix} -y+u & y \\ 0 & u \end{pmatrix}$.

13. a) No es posible calcular sumas, pues no hay matrices de igual tipo.

Se pueden calcular los productos: A·A, A·B, A·D, C·A, C·B, C·D y D·C.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -11 & -2 & -5 \end{pmatrix}, \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ -21 \end{pmatrix}, \quad A \cdot D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 7 \\ -9 & -2 \end{pmatrix}, \quad C \cdot A = \begin{pmatrix} 11 & -4 & 5 \\ 9 & -14 & 3 \end{pmatrix},$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 18 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad C \cdot D = \begin{pmatrix} 15 & 11 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}, \quad D \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 14 & 15 \\ 5 & 13 & 10 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$b) CDC = \begin{pmatrix} 41 & 108 & 89 \\ 28 & 73 & 57 \end{pmatrix}, \quad CAB = \begin{pmatrix} -27 \\ -65 \end{pmatrix}, \quad \text{DBA no es posible hallarlo.}$$

$$14. a) \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{pmatrix}$$

15.

a) M: Matriz cuadrada, diagonal, escalar.

L: Matriz cuadrada, diagonal, escalar.

V: Matriz cuadrada.

$$b) M \cdot L = L \cdot M = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}, \quad M \cdot V = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 4 & 8 & 0 \\ 6 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad V \cdot L = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ -6 & -12 & 0 \\ -9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

c) Ejemplo:

P₁: La multiplicación de dos matrices escalares del mismo orden es conmutativa.

P₂: El producto de dos matrices escalares del mismo orden es una matriz escalar

de igual orden cuyos elementos de la diagonal principal son el producto de los elementos de la diagonal principal de cada una de ellas.

P₃: El producto de una matriz escalar por una matriz cuadrada del mismo orden es una matriz cuadrada de igual orden que se obtiene de multiplicar el elemento de la diagonal principal de la matriz escalar por cada elemento de la matriz cuadrada.

d) Demostración de P₂:

Sean A y B matrices escalares de orden n:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b \end{pmatrix}$$

entonces:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} ab & 0 & \dots & 0 \\ 0 & ab & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & ab \end{pmatrix} \text{ por definición de producto de matrices.}$$

Como $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ se tiene que $a \cdot b = b \cdot a$ por conmutatividad de la multiplicación de números reales, por lo que queda demostrada también la proposición P₁.

La demostración de la proposición P₃ se realiza de manera análoga a la de la proposición P₂.

Reflexionar sobre:

¿Se cumple la proposición P₃ si la matriz no es cuadrada, sino de tipo (m;n)?

16.

1) F porque AB no siempre es igual a BA.

2) F porque AB no siempre es igual a BA.

17.

$$h(A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

18.

a) $t(H)=(4;1)$, $t(J)=(1;3)$, $t(K)=(4;4)$, $t(N)=(6;4)$.

b) H: 10; J: 0; K: 2, 0, 56, -6; N: 2, 3, 4, 5.

c) No, porque K es de orden 4.

d) $r(H) = 1$, $r(J) = 1$, $r(K) = 2$, $r(N) = 4$.

e) Ninguna es regular, pues H, J y N no son cuadradas y $r(K) = 2 \neq 4$, que es su orden.

19. El rango de la matriz nula de orden 3 es 0. No es regular.

20. El rango de la matriz unidad de orden 5 es 5. Sí es regular.

21. Si $t(A) = (m;n)$ entonces $r(A) \leq m$ o $r(A) \leq n$, pues el rango de una matriz no puede ser mayor que la cantidad de filas o de columnas de esta.

22.

b) $r(A)=3, r(B)=4, r(C)=2, r(D)=2, r(E)=1, r(F)=3, r(G)=6, r(H)=3.$

c) G.

d) $r(A^T)=3, r(B^T)=4, r(C^T)=2, r(D^T)=2, r(E^T)=1, r(F^T)=3, r(G^T)=6, r(H^T)=3.$

e) "El rango de una matriz y el de su transpuesta coinciden".

23. Por ejemplo:

"El rango de una matriz en forma trapezoidal o escalonada es igual al número de filas con elementos no todos nulos".

24. $r(A)=3, r(B)=3$, luego, $r(A) = r(B)$.

25.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, C^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}, D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, J^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

F^{-1} no existe ya que F no es regular.

H^{-1} no existe ya que H no es cuadrada.

26.

a) $X = M^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

b) No tiene solución porque no existe P^{-1} pues P no es cuadrada.

c) $Z = T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$ si $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0.$

27.

$$\text{a) } A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}, (A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

28.

$$\text{a) } A \cdot B = C$$

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot B = A^{-1} \cdot C \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{matrix} B = A^{-1} \cdot C \\ A \cdot B = C \end{matrix}$$

$$A \cdot (B \cdot B^{-1}) = C \cdot B^{-1} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = C \cdot B^{-1}$$

$$29. \text{ Sea } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ entonces } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

30.

$$30.1. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$30.2. \text{ a) } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{26} & \frac{5}{26} & -\frac{2}{26} \\ \frac{13}{26} & \frac{13}{26} & -\frac{13}{26} \\ \frac{1}{26} & \frac{1}{26} & -\frac{1}{26} \\ \frac{2}{26} & \frac{2}{26} & -\frac{2}{26} \\ \frac{1}{26} & \frac{11}{26} & -\frac{7}{26} \end{pmatrix} \quad \text{b) } B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$30.3. \text{ a) } \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & \frac{5}{13} & -\frac{2}{13} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{26} & \frac{11}{26} & -\frac{7}{26} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

31.

$$\text{b) } B^T - 3C = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad 5E^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad G^{-1} + H = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{8}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot D - 2H^{-1} = \begin{pmatrix} -12 & -17 & -3 \\ 3 & 7 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad F^T - E \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H^3 - G^T + 2G - F \cdot B = \begin{pmatrix} -13 & 4 & -3 \\ -3 & -8 & -6 \\ -3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

32.

$$\text{a) } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & | & 11 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & | & 12 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & | & 13 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & | & 14 \end{pmatrix}$$

b) $t(C) = (4; 4)$, $t(A) = (4; 5)$.

c) $r(C) = 4$.

d) $r(C) = 4 = n$, C es regular. $C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{11}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{11}{40} & -\frac{9}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{11}{40} & -\frac{9}{40} & \frac{1}{40} \\ \frac{11}{40} & -\frac{9}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} \end{pmatrix}$

g) $3 \cdot A^T = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \\ 6 & 9 & 12 & 3 \\ 9 & 12 & 3 & 6 \\ 12 & 3 & 6 & 9 \\ 33 & 36 & 39 & 42 \end{pmatrix}$

h) $S = \{(2; 1; 1; 1)\}$.

33.

- a) Amplitud del ángulo menor: x
 Amplitud del ángulo mediano: y
 Amplitud del ángulo mayor: z

$$\text{Planteo: } \begin{cases} x + y - z = 36 \\ y + z = 3x \\ x + y + z = 180 \end{cases}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, c) $B = \begin{pmatrix} 36 \\ 0 \\ 180 \end{pmatrix}$

d) $t(A) = (3; 3)$, A es una matriz cuadrada.

$t(B) = (3; 1)$. B es una matriz columna.

e) B^{-1} no existe ya que B no es una matriz cuadrada.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

f) $A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 45 \\ 63 \\ 72 \end{pmatrix}$

g) El ángulo menor mide 45° ; el mediano, 63° , y el mayor, 72° .

34.

a) $S = \left\{ \left(\frac{10+z}{3}, \frac{5z+2}{3}, z \right) : z \in \mathbb{R} \right\}$ b) $S = \langle 0; 1 \rangle$ c) $S = \emptyset$ d) $S = \emptyset$

e) $S = \langle -10; 8-2z; z \rangle; z \in \mathbb{R}$ f) $S = \langle 4; -6 \rangle$ g) $S = \emptyset$ h) $S = \langle 0; 0; 1 \rangle$

i) $S = \langle -r; 2-r; r \rangle; r \in \mathbb{R}$ j) $S = \emptyset$

k) $S = \langle 1-4u-3v; -7-5u-3v; 2+u+v; u; v \rangle; u, v \in \mathbb{R}$

l) $S = \left\{ \left(\frac{19}{8}c + \frac{3}{8}d - \frac{1}{2}f; \frac{7}{8}c - \frac{25}{8}d + \frac{1}{2}f; c; d; f \right) : c, d, f \in \mathbb{R} \right\}$

35.

a) $S = \langle 0 \rangle$ b) $S = \langle z; -z; z \rangle; z \in \mathbb{R}$ c) $S = \langle 8x; 17x \rangle; x \in \mathbb{R}$

d) $S = \langle 0; 0; 0 \rangle$ e) $S = \langle 0; 0; 0 \rangle$ f) $S = \left\{ \left(\frac{3z-13u}{17}; \frac{19z-20u}{17}; z; u \right) : z, u \in \mathbb{R} \right\}$

g) $S = \langle 0; 0; 0; 0 \rangle$ h) $S = \left\{ \left(\frac{7}{6}v - z; \frac{5}{6}v + z; z; \frac{v}{3}; v \right) : z, v \in \mathbb{R} \right\}$

i) $S = \left\{ \left(\frac{-4u+7v}{8}; \frac{-4u+5v}{8}; \frac{4u-5v}{8}; u; v \right) : u, v \in \mathbb{R} \right\}$ j) $S = \langle 0; 0; 0; v; v \rangle; v \in \mathbb{R}$

k) $S = \langle 0; 0; 0 \rangle$ l) $S = \langle 0 \rangle$

36. El SEL es soluble para $\lambda = 4$. $S = \langle -2z; z; z \rangle; z \in \mathbb{R}$.

37.

a) El SEL tiene solución única para cualquier número real λ distinto de 1 y de -2 .

Si $\lambda = -1$, entonces $S = \{(1; 1)\}$.

b) El SEL es incompatible para $\lambda = -2$, ya que se obtiene una contradicción en la última ecuación.

c) Para $\lambda = 1$, el SEL tiene infinitas soluciones. $S = \{(-y - z; y; z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$.

38.

a) No soluble si $k = -\frac{7}{2}$.

b) No soluble si $k = 1$, infinitas soluciones si $k = -2$.

39.

a) Para $-1, 2$ y -2 .

b) Para 1 y -2 .

40. La condición es que $-2\alpha - \beta + \gamma \neq 0$.

$$41. \quad x = \frac{7}{3}a + \frac{5}{3}b - c, \quad y = -\frac{5}{3}a - \frac{4}{3}b + c, \quad z = -2a - b + c.$$

42.

a) r y s son paralelas.

b) m , p y q se cortan en el punto $(-2; -3)$.

c) t y u son paralelas coincidentes.

43. Se cortan en el punto $P(2; 3)$.

44.

a) Los tres planos son coincidentes.

b) No se intersectan los tres planos.

c) Los tres planos se cortan en el punto $Q(1; 2; 3)$.

45. Los tres planos se intersectan en una recta.

46. $\rho: 7x + 4y + 3z - 11 = 0$.

47. El rango es 2.

48.

a) Los tres planos se intersectan en una recta.

b) Los tres planos se intersectan en un punto.

c) Los tres planos se intersectan en un plano.

d) Los tres planos se intersectan en una recta.

50. Para $x = 5 + 2y$ con $y \in \mathbb{R}$.

51. La ecuación que representa a la función cuadrática es $g(x) = x^2 - 2x + 5$.

52.

a) cifra de las centenas: c
cifra de las decenas: d
cifra de las unidades: u

$$\begin{cases} c + d + u = 14 \\ d = c + u \\ 100c + 10d + u - 99 = 100u + 10d + c \end{cases}$$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) El número es 473.

f) $\begin{pmatrix} -\sqrt{5} & -\sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -\sqrt{5} & \sqrt{5} \\ -\sqrt{5} & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (14 \ 0 \ 1) = \begin{pmatrix} 196 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 \\ 14 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$(14 \ 0 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (197)$$

53. Fueron seleccionados 40 hipertensos, 45 diabéticos y 25 embarazadas.

55. En el taller laboran 27 compañeros.

56. En la primera semana se consumió 40 kWh; en la segunda, 42 kWh, y en la tercera, 45 kWh, por lo que se ahorró más electricidad en la primera semana.

57. El CDR A recogió 60 lb de cartón, el B, 50 lb y el C, 30 lb.

58. Fueron vacunados 62 embarazadas, 50 asmáticos y 48 niños.

59. Hay 45 carneros, 55 vacas y 80 cerdos.

61. Son necesarios 112g de leche, 224g de carne y 140g de vegetales.

62. $I_1 = 4a$, $I_2 = 7a$ e $I_3 = 3a$.