

CAPÍTULO 2: DETERMINANTES.

2.1 Determinantes de orden 2 y orden 3.

En el capítulo anterior se resolvieron sistemas de m ecuaciones lineales con n variables a través del “método de eliminación de Gauss”, el cual puede racionalizarse con el uso de las matrices.

En este capítulo se continuará trabajando con los sistemas de ecuaciones lineales (SEL) y abordaremos otras formas más racionales de resolver un SEL, ya que el uso de ellos en la resolución de problemas de la ciencia y la técnica, y el desarrollo vertiginoso de estas y las tecnologías de la informática y las comunicaciones así lo exigen.

Con este propósito se definirá a continuación un nuevo concepto: DETERMINANTE, concepto este que está muy relacionado a las matrices y a los SEL que abordamos en el capítulo anterior.

Sea el sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

cuya matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Al tratar de deducir una fórmula para hallar las soluciones de este SEL se obtienen expresiones que no son fáciles de recordar, por lo que nuestro trabajo se reduce a encontrar una vía que facilite su rápida memorización a través del concepto siguiente:

Definición: (Determinante de orden 2)

Denominamos **determinante** de una matriz cuadrada A de orden 2 al **número real**:

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Observaciones:

- Observar que la matriz es cuadrada de orden 2, de ahí que se le llame “determinante de orden 2”.
- En otras palabras, el cálculo de un determinante de orden 2 se realiza hallando la diferencia entre el producto de los elementos de la diagonal principal de la matriz y el producto de los elementos de la otra diagonal.

Ejemplo 1:

Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$. Calcular sus determinantes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 5(-3) - 2(-2) = -15 + 4 = -11$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 0 \cdot 7 - 3(-1) = 0 + 3 = 3$$

A continuación consideremos el SEL:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

cuya matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Análogamente a como se procedió en el caso anterior se obtiene la siguiente definición:

Definición: (Determinante de orden 3)

Se entiende por determinante de una matriz cuadrada A de orden 3 al **número real**:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Para recordar más fácilmente esta expresión se utiliza la llamada "Regla de Sarrus".

Regla de Sarrus:

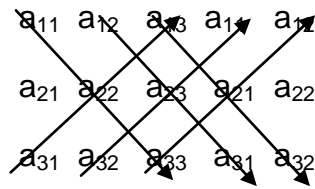
Se escriben las columnas de la matriz en orden, una al lado de la otra y al final se añaden otra vez, la primera y la segunda, formando un esquema rectangular.

Se calculan los productos de los elementos de las diagonales principales (hacia abajo) y se suman dichos productos. Análogamente se calculan los productos de los elementos de las otras diagonales (hacia arriba) y se suman dichos productos.

Finalmente, a la suma de los productos de las diagonales principales (hacia abajo) se le resta la suma de los productos de las otras diagonales (hacia arriba) y la diferencia obtenida es el determinante buscado.

Todo esto se puede representar mediante un esquema. (Ver figura 1)

$$M = a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}$$

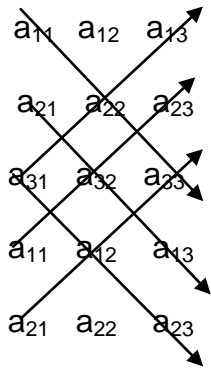


$$N = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$|A| = N - M$$

Figura 1.

Este esquema también puede hacerse con las filas de manera análoga: (Ver figura 2)



$$N = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$$

$$M = a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{12}a_{33}$$

$$|A| = N - M$$

Figura 2.

Existe otra forma de hacer un esquema para calcular determinantes de orden 3 conocida por "la canasta", debido a la forma que sugiere su representación. (Ver figura 3)

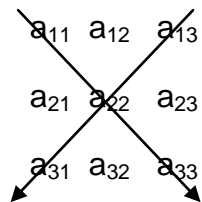


Figura 3.

Ejemplo 2:

1) Calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

Solución:

$M = 12 + 1 + 18 = 31$

$N = 6 + 4 + 9 = 19$

$$N - M = 19 - 31 = -12$$

$M = 0 + 10 + 18 = 28$

$N = 6 - 10 + 0 = -4$

$$N - M = -4 - 28 = -32$$

2) Hallar el determinante de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \quad D = (-7)$$

Solución:

$$|A| = -25 + (-24) = -49 \quad |B| = -38 - (-5) = -38 + 5 = -33$$

$|C|$ No existe puesto que la matriz C no es cuadrada.

$$|D| = -7$$

Definición: (Determinante de orden 1)

El determinante de una matriz cuadrada $A = (a_{11})$ de orden 1 es el **número real** a_{11} .

Observación:

En este epígrafe se han estudiado las definiciones de determinante de orden 1, 2 y 3. En todos los casos, observar que el determinante de una matriz es un número real,

(determinado por la matriz) mientras que la matriz es un arreglo o esquema de números reales.

Ejercicio resuelto 1:

Escriba la ecuación de la recta s que pasa por los puntos A (3; -4) y B (-2; 1) del plano utilizando determinantes.

Solución:

Se sabe que la ecuación de una recta que pasa por los puntos A (x_a ; y_a) y B (x_b ; y_b) puede expresarse por:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sustituyendo:
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante por la fila 1, se tiene:

$$x \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Luego: $-5x - 5y + 11 = 0$ es la ecuación de la recta s .

2.2 Determinantes de orden $n \geq 4$. Propiedades de los determinantes.

En el epígrafe anterior se inició el estudio de los determinantes de matrices cuadradas de orden 1, 2 y 3. En este epígrafe se dará continuidad al estudio de los determinantes, pero ahora de orden $n \geq 4$ y buscaremos un procedimiento general para el cálculo de un determinante, así como algunas propiedades que contribuirán a racionalizar el cálculo de estos.

Consideremos nuevamente un determinante de orden 3:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Agrupemos ahora convenientemente los términos dos a dos en el orden en que aparecen y tratemos de extraer factor común:

$$\begin{aligned} & a_{11} (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12} (a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13} (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ = & a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ = & a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+1} a_{11} D_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} D_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} D_{13}
\end{aligned}$$

Hemos desarrollado el determinante de A según la fila 1.

De forma análoga se puede proceder con otra fila o columna, basta agrupar los términos convenientemente para extraer como factores comunes los elementos de otra fila o de una columna cualquiera.

Observación:

Observar que el cálculo de un determinante de orden 3 se ha reducido al cálculo de determinantes de orden 2, que es el orden inmediato inferior.

Cabría preguntarse entonces: ¿Se podrán reducir también de forma análoga los determinantes de orden 2 a orden 1?

Desarrollémoslo ahora por la primera columna

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \\
&= (-1)^{1+1} a_{11} |a_{22}| + (-1)^{2+1} a_{21} |a_{12}| \\
&= (-1)^{1+1} a_{11} D_{11} + (-1)^{2+1} a_{21} D_{21}
\end{aligned}$$

Todo el trabajo realizado hasta el momento conduce a la idea que se puede reducir el cálculo de determinantes de orden n al cálculo de determinantes de orden (n - 1), por lo que se puede pensar en una definición general por recurrencia de determinantes de orden n.

Definición: (Determinante de orden n)

- Se entiende por determinante de una matriz de orden 1 al elemento de esa matriz.
- Sea A una matriz de orden n y supongamos que tenemos definido el determinante de toda matriz cuadrada de orden (n - 1). Si denotamos por D_{ik} al determinante de la matriz que se obtiene de A eliminando su i-ésima fila y su k-ésima columna, y hacemos:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} D_{ik} \quad \text{con } D_{ik}: \text{ Menor } \quad A_{ik}: \text{ Adjunto}$$

entonces se denomina determinante de la matriz A al **número real**:

$$|A| = a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + \dots + a_{n1} A_{n1} = \sum_i^n a_{i1} A_{i1} \quad \text{según la columna 1.}$$

Observación:

Se debe tener en cuenta que un determinante también puede calcularse según otra columna cualquiera, obteniéndose, en general:

$|A| = \sum_1^n a_{ik} A_{ik}$ ($k= 1,2,\dots,n$) según la k-ésima columna
o según una fila cualquiera, obteniéndose:

$$|A| = \sum_1^n a_{ik} A_{ik} \quad (i= 1,2,\dots,n) \text{ según la i-ésima fila.}$$

Ejemplo 3:

Calcular $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

Solución:

Como se puede desarrollar según cualquier columna o fila se selecciona entonces la más conveniente de ellas.

Desarrollémoslo por la columna 2:

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{4+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (-2) \cdot (-3) + (-3) = 6 - 3 = 3 \end{aligned}$$

Observación:

Observar que como en este caso existen columnas y filas que tienen elementos nulos (0) el trabajo se facilita lo cual racionaliza el cálculo; pero ¿y si no existen elementos nulos en las filas o columnas? ¿Se podrán hacer cero los elementos de una columna (o fila)?

Para ello veamos algunas **PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES:**

Teorema1: El determinante de la matriz unitaria I_n es 1, o, sea:

$$|I_n| = 1$$

Ejemplo 4:

$$|I_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Teorema 2: Si una matriz B se obtiene de una matriz cuadrada A multiplicando los elementos de una columna (fila) por un número real t, entonces el determinante de B es el t-múltiplo del determinante de A.

Ejemplo 5:

Sean las matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$. Calcule el determinante de la matriz C.

Solución:

$$|B| = 4 - \llcorner 6 \gg = 10 \quad Y \quad |C| = 12 - \llcorner 18 \gg = 30 = 3 \cdot 10 = 3|B|$$

Teorema 3: El determinante de una matriz cuadrada A cambia de signo si permutamos en A dos columnas (filas).

Ejemplo 6:

Sean las matrices $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ y $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calcule el determinante de cada

una.

Solución:

Observar que la matriz E se obtuvo de la matriz D permutando en esta las columnas 1 y 2.

$$|D| = -33 \quad y \quad |E| = 33$$

Teorema 4: Si una matriz cuadrada A tiene dos columnas (filas) iguales entonces su determinante se anula.

Teorema 4' (Generalización del teorema 4)

Si en una matriz cuadrada A dos columnas (filas) son proporcionales entonces el determinante se anula.

Ejemplo 7:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 5 & -15 & 2 \end{pmatrix} \quad |A| = 0 \quad \text{porque la columna 2 se obtiene de multiplicar la 1 por } k = -3.$$

Teorema 5: El determinante de una matriz cuadrada A permanece invariable si adicionamos a una columna (fila) un múltiplo cualquiera de otra columna (fila).

Ejemplo 8:

Sea la matriz $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$. Calcule su determinante.

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 25 = -33 = |D|$$

En este determinante se multiplicó por 3 la primera fila y se le adicionó a la segunda.

Observación:

Es importante tener en cuenta esta propiedad para el cálculo de determinantes, pues de esta manera se pueden obtener ceros en una columna y eso facilitaría el trabajo a la hora de calcular el determinante pedido.

Reflexionar sobre:

Hacer un resumen sobre las propiedades de los determinantes atendiendo a:

- ¿Cuándo un determinante es igual a 0?
- ¿Cuándo un determinante permanece invariante?
- ¿Cuándo un determinante cambia?

Teorema 6: El determinante de la matriz transpuesta de una matriz cuadrada A es igual al determinante de la matriz A, o sea: $|A| = |A^T|$

Teorema 7: Una matriz es regular si y solo si su determinante es distinto de cero.

Teorema 8: El determinante del producto de dos matrices A y B cuadradas, de orden n, es igual al producto de los determinantes de cada matriz.

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

Teorema 9:

Si los elementos de la k-ésima columna de una matriz cuadrada A tienen la forma:

$$a_{ik} = a'_{ik} + a''_{ik} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

entonces se cumple que: $|A| = |A'| + |A''|$.

Demostración:

Sea una matriz cuadrada A tal que los elementos de su k-ésima columna se pueden escribir en la forma: $a_{ik} = a'_{ik} + a''_{ik}$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Desarrollando el determinante de A según la k-ésima columna se obtiene:

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{ik} A_{ik} = \sum_{i=1}^n (a'_{ik} + a''_{ik}) A_{ik} = \sum_{i=1}^n a'_{ik} A_{ik} + \sum_{i=1}^n a''_{ik} A_{ik} = |A'| + |A''|$$

En este epígrafe se ha estudiado una definición (por recurrencia) de determinante de orden n (n=1,2,...,k) y a partir de ella se obtuvo un procedimiento general para el cálculo de determinantes por reducciones sucesivas a órdenes inferiores. Este procedimiento se realiza según una fila o columna, alternando los signos “+” y “-”, según la fila o columna de la matriz, y extrayendo el determinante que resulta de eliminar la fila y columna donde se ubica el elemento en cada caso.

También se estudiaron algunas propiedades que facilitan el trabajo a la hora de calcular los determinantes de orden n.

2.3 Regla de Cramer.

En el epígrafe 2.1 se obtuvo un procedimiento para resolver los SEL de dos ecuaciones con dos variables y para recordarlas se hacía a través de los determinantes, ¿pero será aplicable siempre, a cualquier SEL?

Teorema 10:

Si el determinante de la matriz de los coeficientes de un SEL es distinto de cero, entonces este SEL tiene solución única. Cada variable x_j es igual al cociente que tiene por denominador el determinante de la matriz de los coeficientes del sistema y por numerador, al determinante que se obtiene al sustituir la i-ésima columna por los términos independientes del SEL en la matriz de los coeficientes.

Ejemplo 9:

Determine el conjunto solución de los siguientes SEL aplicando la regla de Cramer:

$$a) \begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ -x + 3y + z + 3u = 2 \\ y - z = 0 \\ -3y + z = 2 \end{cases} \quad m=n=4$$

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -3 \\ -3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

A es una matriz regular, por tanto el SEL tiene solución única.

$$x = \frac{D_x}{|A|} = \frac{-24}{-6} = 4 \quad D_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -24$$

$$y = \frac{D_y}{|A|} = \frac{6}{-6} = -1 \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$z = \frac{D_z}{|A|} = \frac{6}{-6} = -1 \quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$u = \frac{D_u}{|A|} = \frac{-20}{-6} = \frac{10}{3} \quad D_u = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -20$$

Observaciones:

- Este procedimiento sólo es aplicable a SEL que tengan el mismo número de ecuaciones que de variables.
- La regla de Cramer sólo se puede aplicar si el determinante de la matriz de los coeficientes del SEL es distinto de cero.
- Si el determinante de la matriz de los coeficientes es igual a cero, no significa que el sistema no tenga solución, sólo que no se puede aplicar esta regla (puede suceder que el SEL tenga infinitas soluciones).

$$b) \begin{cases} 3x + 4y + 3z = 1 \\ 2x - y - z = 6 \\ x + 3y + 2z = -1 \end{cases}$$

Solución:

$$b) |A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 6 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \quad x = \frac{D_x}{|A|} = \frac{4}{4} = 1$$

$$D_Y = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \quad y = \frac{D_Y}{|A|} = \frac{4}{4} = 1$$

$$D_Z = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -12 \quad z = \frac{D_Z}{|A|} = \frac{-12}{4} = -3$$

$$S = \{1; -3\}$$

$$c) \begin{cases} 4x - y + 3u = 2 \\ -x + 2z + 2u = -1 \\ x - y - 3u = 1 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$$

Solución:

$$c) |A| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \\ 5 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \\ 5 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{NO es posible aplicar la regla de Cramer.}$$

Para aplicar la regla de Cramer se deben seguir los siguientes pasos:

- Calcular el determinante de la matriz A de los coeficientes del SEL: $|A|$.
- Si $|A| \neq 0$ entonces:
 - Calcular cada uno de los determinantes D_j que se obtienen de sustituir la j-ésima columna correspondiente a la variable X_j , por la columna de los términos independientes.
 - Calcular el valor de cada variable $X_j = \frac{D_j}{|A|}$
 - Escribir el conjunto solución del SEL.

2.4. Cálculo de la inversa de una matriz regular utilizando los determinantes.

En el epígrafe anterior se utilizó el cálculo de determinantes para la resolución de SEL que tuvieran la misma cantidad de ecuaciones que de variables y donde el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero, lo cual indica que el SEL tiene solución única.

Cabría preguntarse entonces: ¿Qué nombre recibe este procedimiento?

¿Cómo se determina, con ayuda de los determinantes, si una matriz es regular?

Calculamos primero el determinante de la matriz de los coeficientes para saber si es distinto de cero, si lo es quiere decir que la matriz es regular, luego tiene inversa.

Veamos a continuación el siguiente teorema:

Teorema 11:

La inversa de la matriz regular A es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix} \quad \text{donde } A_{ik} = (-1)^{i+k} D_{ik}$$

Observación:

Observar que los adjuntos correspondientes a una fila se colocan en columna y viceversa.

Ejemplo 10:

Determinar, si es posible, la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ utilizando determinantes.

Solución:

Calculamos $|A|$ para ver si A es regular:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0. \text{ Luego } A \text{ es regular y por lo tanto, tiene inversa.}$$

Determinemos entonces los adjuntos A_{ij} :

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \quad A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6 \quad A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

Hallemos el cociente de cada adjunto por el determinante de A y escribamos la matriz A^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

¡Comprobar que $A \cdot A^{-1} = I$!

Observación:

Observar que hallar la inversa de una matriz regular por este método exige mucho trabajo de cálculo. Sin embargo, en la actualidad, con el uso de los asistentes matemáticos, a través de la computadora, este cálculo se realiza muy rápidamente.

Ejercicio resuelto 2:

Dado el SEL:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = -3 \\ x + u = 4 \\ x - y + z - u = -1 \end{cases}$$

- a) Expresar el sistema a través de matrices.
- b) Resuélvalo utilizando el cálculo de la inversa, si es posible.

Solución:

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad t(A) = (4,4)$$

$$A \cdot X = B$$

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \downarrow = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \downarrow (-1) = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

Luego, A es regular.

$$\begin{aligned} A \cdot X &= B \\ A^{-1} \cdot A \cdot X &= A^{-1} \cdot B \\ (A^{-1} \cdot A) \cdot X &= A^{-1} \cdot B \\ I \cdot X &= A^{-1} \cdot B \\ X &= A^{-1} \cdot B \end{aligned}$$

Calculemos A^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad S = \left\{ \left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}; \frac{3}{2} \right) \right\}$$

En este epígrafe hemos estudiado otro método para calcular la inversa de una matriz dada.

Reflexionar sobre:

¿Qué condición debe cumplirse, aplicando determinantes, para que una matriz posea inversa?

¿Cómo se calcula la inversa de una matriz regular aplicando los determinantes?

¿Siempre será posible calcular la inversa de la matriz de los coeficientes de un SEL?

Observación:

Es válido señalar la conveniencia de los asistentes matemáticos como el Derive, a la hora de calcular los determinantes que forman los adjuntos A_{ij} cuando el orden de la matriz es superior a 4.

Ejercicios propuestos

1. Calcula los siguientes determinantes.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} & \text{b) } \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} \end{array} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{d) } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{f) } \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -8 & 5 & 2 \\ -12 & -6 & 3 \end{vmatrix}$$

2. Si A es una matriz cuadrada de orden 3 y se conoce que $|A| = 18$, calcula $|B|$ si :

a) La matriz B se obtiene al multiplicar por $\frac{1}{3}$ la tercera fila de la matriz A.

b) La matriz B se obtiene sumando las columnas uno y dos de la matriz A y colocando el resultado en la columna uno.

3. Determine si las siguientes matrices poseen inversa:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \text{b) } \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 & -1 \\ 1 & -5 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Escriba la ecuación de la recta que pasa por los puntos P(5;1) y Q(0; -2) del plano utilizando determinantes.

5. De los teoremas enunciados en este capítulo:

a) Determine la premisa y la tesis.

b) Escriba el recíproco de cada uno y determine su valor de verdad.

c) Elabore un ejemplo para cada uno de los teoremas 6, 7, 8 y 9.

6. Los números 204, 527 y 255 son divisibles por 17. Demuestre que $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ es divisible

también por 17.

7. Resuelve, si es posible, aplicando la Regla de Cramer los siguientes sistemas:

$$a) \begin{cases} x - y + 3w = 1 \\ y + 2z - w = 0 \\ 2x + z - w = 0 \\ x - y + 2z + 3w = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} a + 2b + 2c = -1 \\ a + 3b - 4c = 9 \\ a + 2b + c = 4 \\ 3a + 6b + 8c = 6 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3y + 2x = z + 1 \\ 3x + 2z = 8 - 5y \\ 3z - 1 = x - 2y \end{cases}$$

8. Comprobar que el siguiente SEL tiene solución $m=n=p=q=1$ y determinar si se obtuvo aplicando la Regla de Cramer.

$$\begin{cases} 2m - 3n + 4p - 4q = 0 \\ 3m - n + 11p - 13q = 0 \\ 4m + 5n - 7p - 2q = 0 \\ 13m - 25n + p + 11q = 0 \end{cases}$$

9. Demostrar que el SEL $\begin{cases} ax + by + cz + dt = 0 \\ bx - ay + dz - ct = 0 \\ cx - dy - az + bt = 0 \\ dx + cy - bz - at = 0 \end{cases}$ tiene solución única si a, b, c y d son números reales no todos nulos.

10. Calcule el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{vmatrix}$$

11. Compruebe que:

$$\begin{vmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{vmatrix} = -b^2$$

12. Determine los valores de k tales que:

$$\begin{vmatrix} k & k \\ 4 & 2k \end{vmatrix} = 0$$

13. Dadas $B = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ -t & 4 & 0 \\ 2t & t^2 & t \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} t+2 & 1 & 0 \\ -t+8 & 4 & 0 \\ 2t+2t^2 & t^2 & t \end{pmatrix}$. Si $|B| = -5t^2$, halle $|C|$.

14. Calcular:

$$\text{a) } V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ac & ab \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } B = \begin{vmatrix} z & -z & 0 \\ 0 & z^2 & -1 \\ 1 & z & z+1 \end{vmatrix} \text{ sabiendo que } z \in \mathbb{C} \text{ es tal que } z^5 = 1 \text{ y } z \neq 1$$

15. Sin efectuar el desarrollo pruebe que:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

16. Determine si existe la inversa de la siguiente matriz utilizando determinantes y calcúlela, si es posible:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

17. Utilice el asistente matemático Derive para calcular los siguientes determinantes. Explique cómo editar matrices en Derive y una vez editada la matriz A, mediante el comando DETA calcule el determinante.

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} a & b & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & a & b & 2a \\ 1 & 1 & 2 & b & -a \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -b & 1 & 1 & a & b \end{vmatrix}$$

Respuesta a los ejercicios propuestos.

1. a) 1 b) -24 c) -7 d) 0 e) 0 f) -108

2. La respuesta está en dependencia de la matriz que escoja el estudiante.

3. a) No ya que el determinante es igual a 0 y la matriz no es regular
b) Si ya que el determinante es distinto de cero por lo que la matriz es regular.
c) Si ya que el determinante es distinto de cero por lo que la matriz es regular.
d) No que el determinante es igual a 0 y la matriz no es regular,

4. La ecuación de la recta r es: $3x - 5y - 10 = 0$

6.
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 34 = 2 \cdot 17$$

7. a) $S = \left\{ \frac{1}{5}; \frac{2}{5}; \frac{-2}{5}; \frac{2}{5} \right\}$ b) No es posible resolverlo por la regla de Cramer ya que la matriz de los coeficientes no es cuadrada y no se le puede hallar el determinante.
c) $S = \frac{3}{4} - 1; 2$

10. $(t + 2)(t - 2)$

12. $k=0$ o $k=2$

13. $|C| = 5t^2$ Sugerencia: Aplique las propiedades de los determinantes.

14. a) $|V| = (a - b)(a - c)(b - c)$

b) $|B| = -1$

15. Sugerencia: Como sabemos que el valor de un determinante no se altera si se hacen transformaciones equivalentes entonces adiciónale a la tercera columna la segunda.

16.
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{-3}{5} \end{pmatrix}$$